This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

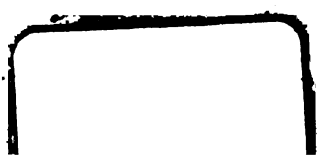
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909695 0



Löffler 2te jul. 1832 – 5 – 24 –
Fritz. Klein of 7te – " – 18 –

5 – 42

Heiligenstein

(Hollwent Lum)
OKG

Aufgaben-Systeme und Sammlungen

aus der

ebenen Geometrie,

zu einem

selbstständigen Unterricht in der Analysis

geordnet und durch Gesetze vorbereitet

von

H. v. Holleben und P. Gerwien,

Lieutenants im 21sten und 22sten Infanterie-Regiment und Lehrer im Königl. Preuß. Kadetten-Korps.

Erster Theil.

Geometrische Analysis.

Berlin, 1832.

Gedruckt und verlegt

bei G. Reimer.

Geometriſche Analyſis.

Zweiter Band.

Aufgaben.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Mit zwei und vierzig Steintafeln.

Berlin, 1832.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

II. Hauptstück.

Uebungen, welche entweder durch das erste Hauptstück vorbereitet, oder an sich leicht sind.

II. A. Erster Abschnitt.

Aufgaben, welche ohne die Lehre vom Kreise, und ohne Proportionen lösbar sind.

1stes Kapitel.

Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben.

609. Aufgabe. △ aus b, h'.

Auflösung. Siehe 75.

Zusatz. Man erhält 2 Resultate, ein spitz∠ und ein stumpf∠ △.

609. a. Aufgaben. △ aus a, b, h''. △ aus b, h.

Auflösung. Siehe 75.

Zusatz. Es ergeben sich zwei verschiedene Resultate.

610. Aufgaben. △ aus a, b, (b+c). △ aus a, b, (b−c). ꝛc.

Auflösung. Siehe 100.

611. Aufgabe. △ aus a, β, t''.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

612. Aufgaben. △ aus α, β, h.
△ aus α, β, h'.
△ aus α, β, h''.

Analysis. Diese ergiebt sich durch 114.

613. Aufgabe. △ aus a, h', β.

Analysis. Mittelst 114 ergiebt sich die Aufgabe: △ aus a, β, γ.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Warum ist △ aus a, h'', β unmöglich?

614. Aufgabe. △ aus α, h', h.

Analysis. α und h' geben c nach 114. Hiedurch ist die Aufgabe auf die vorhergehende reduzirt.

615. Fig. X. Aufgabe. ▱ aus α, c', b.

Analysis. $\frac{c'}{2}$, α, b bestimmen ein △, aus welchem sich das ▱ ableiten läßt.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

616. Aufgabe. △ aus a, α, h'.

Analysis. Siehe 114.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

617. Aufgabe. △ aus α, h', t''.

Analysis. Durch 114 ergiebt sich c und die Lage von b.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

618. Aufgabe. ◺ aus p, q in c.

Auflösung. Folgt aus 75.

619. Aufgaben. △ aus α, (b + c), h'.
△ aus α, (b − c, h'.
△ aus α, (b + c), h''.
△ aus α, (b − c), h''.

Analysis. Durch 114 und 100 erhält man △ aus b, c, α.

620. Aufgaben. △ aus a, h′, (β—γ).
△ aus a, h″, (β—γ).
△ aus b, h, (β—γ).
△ aus c, h, (β—γ).

Analysis. Folgt aus 114 und 100.

621. Aufgaben. △ aus b, h, (p—q).
△ aus c, h, (p—q).

Analysis. Nach 114 folgt aus b u. h nicht allein γ, sondern auch p, weshalb sich durch 100 das △ ableiten läßt.

622. Aufgaben. △ aus b, h″, (β—γ).
△ aus c, h′, (β—γ).

Analysis. Ergiebt sich aus 114 und 103.

623. Aufgabe. △ aus α, h′, h″.

Auflösung. Schiebe h′ und h″ nach 81 zwischen die Schenkel von α.

624. Aufgabe. △ aus β, γ, → a um △ NOQ (d. h. a soll durch Q, b durch N, c durch O gehen.)

Analysis. Durch Q und → a ist a der Lage nach gegeben, durch β und γ bestimmen sich nach 64 mittelst O und N sowohl B und C als A.

625. Aufgabe. △ aus a, b, → a in △ NOQ (d. h. A soll in NO, B in OQ, C in NQ fallen).

Analysis. Da → a und a gegeben ist, bestimmen sich die Punkte B und C nach 94, weshalb aus B nur b abzuschneiden ist, um A (zuweilen doppelt) festzustellen.

626. Aufgabe. △ aus a, h, → a in △ NOQ.

Analysis. → a und a bestimmen B und C nach 94. A ergiebt sich schließlich durch den Ort 79.

627. Aufgabe. △ aus → a, zwei Punkten P und P′, die von b und h getroffen werden sollen, in △ NOQ zu beschreiben.

Analysis. → a und P′ für h bestimmen Lage h, und damit A; P und A ferner C, und C mit → a schließt sich B.

628. Aufgabe. Gegeben L, L', und A dazwischen; man soll ein △ aus t und → t zeichnen, dessen Winkelspitzen A in A, B in L, C in L' fallen.

Analysis. Durch A, → t und t bestimmt sich der zweite Endpunkt dieser Länge, weshalb man in Beziehung auf denselben nur 127 anzuwenden hat, um B und C festzustellen.

629. Aufgabe. Gegeben L, L' und A dazwischen; man soll ein △ aus b und → t zeichnen, dessen Winkelspitzen A in A, B in L, C in L' fallen.

Analysis. Durch A und → t ergiebt sich die Lage von t, b und A bestimmen B, folglich hat man aus B eine Linie nach L' zu ziehen, welche durch die Lage von t halbirt wird; siehe 129.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

630. Aufgaben. △ aus a, h, t'.

▱ aus a, h, c'.

Analysis. Verlängert man nach 123 t' um sich selbst, so bestimmt sich ein △ aus a, c, h so, daß c = 2t' ist; siehe 86.

Zusatz. Man erhält 2 verschiedene Resultate.

631. Aufgabe. △ aus a, ∠ (t''a), h.

Analysis. Nach 123 reduzirt sich die Aufgabe auf △ aus a, γ, h, so daß γ = ∠ (t''a) ist; siehe 82.

632. Fig. X. Aufgabe. △ aus a, t'', ∠ (t''b).

Analysis. Konstruirt man nach 128 das zugehörige ▱, so zeigt sich in demselben c' = 2t'', ∠ (bc') = ∠ (t''b) und a gegeben, also ein △ aus a, α, b bestimmt.

633. Aufgabe. △ aus a, β, t'.

Analysis. Konstruirt man nach 123 das zugehörige ▱, so bestimmt sich ein △ aus a, c, γ, in welchem c = 2t' und γ = 2R — dem gegebenen ∠ β ist.

634. Aufgaben. △ aus a, h', t''.

▱ aus a, h', c'.

Analyſis. Durch a, h' erhält man γ nach 114, und hat folglich die Aufgabe 638 zu löſen.

635. Aufgabe. △ aus α, h', t.

Analyſis. α und h' beſtimmen c nach 114; man hat alſo △ aus c, α, t, ſiehe 633, zu löſen.

636. Aufgabe. △ aus h, Ort L für A und einer feſtliegenden Linie (p — q).

Analyſis. Durch h und die Lage von (p — q) beſtimmt ſich nach 79 A in L. Fällt man nun h aus A, ſo ergiebt ſich ſowohl p als q (fürs ſpitz∠ △); nur die letztere Linie von h aus in entgegengeſetzter →, weshalb der fehlende Punkt B durch Umklappung von q feſtgeſtellt werden kann.

636. a. Aufgaben. △ aus a, b, (h + h').
△ aus h, h', (a + b).

Analyſis. (a + b) und (h + h') beſtimmen nach 149 γ oder deſſen Supplement; man hat alſo △ aus a, b, γ, oder △ aus h, h', γ zu verzeichnen.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

636. b. Aufgaben. △ aus a, b, (h' — h).
△ aus h, h', (a — b).

Analyſis. (a — b) und (h' — h) beſtimmen nach 152 γ oder deſſen Supplement; man hat alſo △ aus a, b, γ, oder △ aus h, h', γ zu verzeichnen.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

637. Aufgabe. △ aus a, γ, (b + c). (Vergl. 131.)

Analyſis. Man verfahre nach 130; nur trage man c an b, damit beide Schenkel des ∠ γ bekannt werden. Von dem aus (b + c), a, γ gebildeten △ hat man dann ein △ durch Ort 72 wegzunehmen, um △ ABC zu erhalten.

Anmerkung. Die Aufgabe bleibt dieſelbe, wenn ſtatt γ, β gegeben würde, da auch dieſes Stück, wenn man c um b verlängert, ein gleich bedingtes △ wie vorher beſtimmt.

638. Aufgabe. △ aus a, γ, (b — c). (Vergl. 134.)

Analysis. Verfährt man nach 133. 1, so bestimmt sich durch (b — c), a, γ ein $\triangle$, welchem ein $\triangle$ mit der Gegenseite von γ als Grundlinie hinzuzufügen ist, um $\triangle$ ABC zu erhalten.

639. Aufgabe. $\triangle$ aus (b — c), a, β.

Analysis. Verfährt man nach 133. 2, so bestimmt sich durch (b — c), a, (2R — β) ein $\triangle$ und ein $\triangle$, dessen Grundlinie die Gegenseite von (2R — β) ist. Schneidet man schließlich von dem letzteren $\triangle$ das erstgenannte ab, so ergiebt sich das gesuchte $\triangle$ ABC.

640. Aufgaben. $\triangle$ aus (b + c), a, h'.
$\triangle$ aus (b + c), γ, h'.
$\triangle$ aus (b + c), a, h''.
$\triangle$ aus (b + c), β, h''.

Analysis. Durch 114 kömmt man auf 637.

641. Aufgaben. $\triangle$ aus (b — c), a, h''.
$\triangle$ aus (b — c), γ, h'.
$\triangle$ aus (b — c), a, h''.
$\triangle$ aus (b — c), β, h''.

Analysis. Durch 114 kömmt man zu 638 oder 639.

642. Aufgabe. $\triangle$ aus (b + c), a, ω. (Siehe g. Betr. §. 15.)

643. Aufgabe. $\triangle$ aus (b — c), a, α. (Vergl. 135.)

Analysis. Konstruirt man nach 133. 1 das dort erwähnte $\triangle$, so bestimmt sich der gebildete Außen$\angle$ desselben $= R + \frac{\alpha}{2}$, weshalb das zugehörige $\triangle$, welches noch die bekannten Seiten a und (b — c) hat, gezeichnet werden kann, und nur das genannte $\triangle$ hinzuzufügen ist, um $\triangle$ ABC festzustellen.

644. Aufgaben. $\triangle$ aus (b + c), α, β.
$\triangle$ aus (b + c), α, γ.
$\triangle$ aus (b + c), β, γ.

Analysis. Verfährt man nach 130, so bestimmt sich mittelst des Satzes vom Außenwinkel durch $(b+c)$, $\frac{\alpha}{2}$, β oder γ ein $\triangle$, von dem schließlich das 130 erwähnte $\triangle$ abzunehmen ist, um das gesuchte zu erhalten.

645. **Aufgaben.** $\triangle$ aus $(b-c)$, α, γ.
$\triangle$ aus $(b-c)$, α, β.
$\triangle$ aus $(b-c)$, β, γ.

Analysis. Zeichnet man nach 133. 1) das dort erwähnte $\triangle$, so bestimmt sich der gebildete Außen$\angle$ desselben $= R + \frac{\alpha}{2}$, weshalb das zugehörige $\triangle$, welches noch die bekannten Stücke $(b-c)$ und γ hat, konstruirt werden kann, und nur das genannte $\triangle$ hinzuzufügen ist, um $\triangle$ ABC festzustellen.

646. **Aufgabe.** $\triangle$ aus $(a+b+c)$, γ, h'.

Analysis. γ und h' bestimmen a nach 114, durch a und $(a+b+c)$ ergiebt sich $(b+c)$, man hat also $\triangle$ aus a, $(b+c)$, γ (637) zu verzeichnen.

647. **Aufgabe.** $\triangle$ aus $(a+b+c)$, β, γ.

Analysis. Bildet man, sowohl durch Verlängerung von a um b nach einer Seite, als um c nach der anderen, zwei 130 erwähnte $\triangle\triangle$, so bestimmt sich mittelst des Satzes vom Außen$\angle$ durch $(b+a+c)$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ ein $\triangle$, von dem zum Schluß beide $\triangle\triangle$, welche die erhaltenen Seiten zu Grundlinien haben, abzunehmen sind, um das gesuchte $\triangle$ ABC zu erhalten.

648. **Aufgabe.** $\triangle$ aus $(b+c)$, α, t.

Analysis. Verlängert man nach 123 t um sich selbst, und berücksichtigt, daß in dem entstandenen $\square$ durch einen $\angle$ die übrigen gegeben sind, so zeigt sich ein $\triangle$ durch 2 t, den Gegen$\angle$ $2R - \alpha$, und die Summe der denselben einschließenden Seiten $= (b+c)$ bestimmt; siehe 642.

649. **Aufgabe.** $\triangle$ aus $(b-c)$, α, t.

Analysis. Die Aufgabe reduzirt sich ganz wie 648 auf 643.

650. Aufgabe. △ aus $(\beta - \gamma)$, b, $(p \mp q)$.

Analysis. Nach 139 ergiebt sich ein aus 2 Seiten und einem ∠ bestimmtes △.

651. Aufgabe. △ aus $(p \mp q)$, b, h.

Analysis. Die Aufgabe reduzirt sich durch 139 auf 86.

652. Fig. 137. Aufgabe. △ aus $(h + h')$, α, β.

Analysis. α und β bestimmen γ, $(h + h')$ und γ nach 149 $(a + b)$, womit die Aufgabe auf 644 reduzirt ist.

Auflösung. Zeichne das △ DAE mit $AE = (h + h')$ und ∠ $ADE = \gamma$, halbire ∠ ADE durch DB, setze ∠ $DAB = \alpha$ ab, und ziehe durch den Schneidungspunkt B, CB ∦ ED, so ist ABC das verlangte △.

Beweis. DCB ist nach der Konstruktion ein △, folglich △ CBF ≅ △ CDG, und deshalb $BF = CG = HE$, also $AH + BF$ oder die Summe der Höhen $= AE = (h + h')$, ∠ α und γ aber sind = A und C gezeichnet.

653. Fig. 138. Aufgabe. △ aus $(h - h')$, α, β.

Analysis. α und β bestimmen γ, $(h - h')$ und γ nach 152 $(b - a)$, womit die Aufgabe auf 645 reduzirt ist.

Auflösung. Zeichne das △ DAE mit $AE = (h - h')$ und ∠ $ADE = \gamma$, halbire den Neben∠ EDC von γ durch DB, setze ∠ $DAB = \alpha$ ab, und ziehe durch den Schneidungspunkt B, CB ∦ ED, so ist ABC das verlangte △.

Beweis. Der Beweis von 652 paßt, wenn man statt $(h + h')$, $(h - h')$, und statt $BF + AH$, $AH - BF$ ꝛc. setzt, wörtlich für diesen Fall auf die Fig. 138.

654. Aufgabe. △ aus $(b^2 + c^2)$, a, β.

Analysis. $(b^2 + c^2)$ und a bestimmen t nach 219 und 220, man hat also △ aus a, β, t, (69) zu konstruiren.

655. Aufgabe. △ aus $(b^2 - c^2)$, a, β.

Analysis. $(b^2 - c^2)$ und a bestimmen nach 210 und 211 p und q nebst der Lage von h, weshalb sich das verlangte △ ABC feststellt, sobald schließlich ∠ β gezeichnet wird.

2tes Kapitel.

Vierecks-Aufgaben aller Art.

656. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Analysis. a, ∠ A, ∠ B geben die Lagen von b und d, zwischen welche c mit der Neigung ∠ C nach 94 zu schieben ist.

657. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, e, ∠ (ae), ∠ (ae'), ∠ (ee).

Analysis. Die Aufgabe bildet nach g. Betr. §. 29. eine Analogie zu 656; es bestimmen sich hier die Lagen von e und e', zwischen welche e mit der Neigung ∠ (ee) nach 94 zu schieben ist.

658. Fig. XIV. Aufgaben.

□ aus a, b, e, e', ∠ (ee').
□ aus a, b, e, c, ∠ (ee').
□ aus a, b, e, ∠ (de), ∠ (ee').

Analysis. Durch a, b, e bestimmt sich ein △, weshalb mittelst des ∠ (ee') die Lage von e' nach 64, und durch das fünfte Stück schließlich D festgestellt werden kann.

659. Fig. XIV. Aufgaben.

□ aus a, b, e, c, ∠ D.
□ aus a, b, e, e', ∠ A.
□ aus a, e', ∠ A, e, c.
□ aus a, e, ∠ B, ∠ A, ∠ C.
□ aus a, e', ∠ A, ∠ B, ∠ C.
□ aus a, b, ∠ B, ∠ A, ∠ C.
□ aus a, d, ∠ A, c, ∠ B.
□ aus a, e', ∠ (ae'), e, ∠ (ae).
□ aus a, e, ∠ (ae), d, ∠ (ae').
□ aus a, ∠ (ae'), ∠ (de'), c, ∠ (ae).
□ aus a, ∠ (ae), ∠ (ae'), e, e'. ꝛc.

Analysis. In den vorstehenden Aufgaben bestimmen die drei vorangestellten Stücke mittelst eines △ drei ∠ Punkte des □, der vierte ergiebt sich durch die übrigen Stücke.

659. a. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, d, ∠ C, ∠ D.

Analysis. Denkt man sich ∠ C festliegend, so bestimmt sich durch b eine Kreislinie um B mit a als Ort für A, während sich durch ∠ D und d nach 94 ein zweiter Ort für A ergiebt. Folglich kann Punkt A, und hiedurch das □ ABCD gezeichnet werden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

660. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, c, e, ∠ (ae'), ∠ (ce').

Analysis. a und ∠ (ae') bestimmen die Lage von e'; e giebt eine Kreislinie um A als Ort für C, weshalb man nur c, gegen e' unter ∠ (ce') geneigt, nach 94 zwischen die Kreislinie und e' zu schieben hat.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

661. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ (ae), ∠ (ce), ∠ (ee').

Analysis. ∠ (ee'), a und ∠ (ae) bestimmen ∠ (ae'), womit die Aufgabe auf 657 reduzirt ist.

662. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, ∠ (ae'), ∠ (ce), ∠ (ce').

Analysis. a und ∠ (ae') bestimmen die Lage von e'; b giebt eine Kreislinie um B als Ort für C, ∠ (ce) und ∠ (ce') ergeben ∠ (ee'); stellt man also von A aus nach 64 durch ∠ (ee') den Punkt C fest, so läßt sich schließlich durch ∠ (ce) auch der vierte Punkt D zeichnen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

663. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, e, e', ∠ (ce), ∠ (ce').

Analysis. Legt man e und ∠ (ce) fest, so ergiebt sich durch a ein Kreisort für B um A, und ein zweiter Ort 93

mittelſt e′ und ∠ (ce′), weshalb alle 4 ∠ Punkte feſtgeſtellt werden können.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

664. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus e, e′, ∠ (ee′), ∠ (de), ∠ (be).

Analyſis. e, e′, ∠ (ee′) beſtimmen das 162 erwähnte ▱; die ∢ (be) und (de) ergeben den Punkt C in dieſem ▱; werden alſo Linien nach den ∠ ſpitzen deſſelben aus C gezogen, ſo müſſen ſich 2 Seiten des ▱ gerade zu beſtimmen, während ſich die übrigen ergeben, wenn man durch B und D ⫽ ⫽ zu FC und GC zieht.

665. Aufgabe. ▱ aus a, e, e′, ∠ (ee′), ∠ (be′).

Analyſis. 1). ∠ (be′) und ∠ (ee′) beſtimmen ∠ (be). Durch dieſen ∠, a und e iſt aber △ ABC bekannt, weshalb die Lage von e′ feſtgelegt werden kann, und durch Abſchneidung von e′ ſich D ergiebt.

Analyſis. 2) Fig. 52. Durch e, e′, ∠ (ee′) iſt das 162 erwähnte ▱ beſtimmt. Da nun ∠ (be′) die Lage von b giebt, und FC = a iſt, läßt ſich der Punkt C feſtſtellen, und hierauf mittelſt ⫽ ⫽ durch B und D auch der vierte Punkt A zeichnen.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

666. Fig. 52. Aehnliche Aufgaben ergeben ſich, wenn man in 665 e, e′, ∠ (ee′) beibehält, für a und ∠ (be′) aber andere Stücke, z. B. b, d, oder ∠ (be′), ∠ (de′) ꝛc. ſetzt, da ſich dann wie in Analyſis 2 von 665 das ▱ BG mit dem Punkte C beſtimmen läßt. Es ſind dieſe Aufgaben nur fortgelaſſen worden, um unnütze Wiederholungen zu vermeiden.

667. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, d, (∠ A + ∠ B), (∠ C − ∠ D).

Analyſis. (∠ A + ∠ B) giebt (∠ C + ∠ D), dieſe Summe und (∠ C − ∠ D) geben die ∢ C und D einzeln, weshalb man nur ▱ aus a, b, d, ∠ C, ∠ D (659. a.) zu löſen hat.

668. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, c, ∠ (ce), (∠ B + ∠ C).

Analyſis. Nach 164 findet man durch $(\angle B + \angle C)$ den $\angle$, welchen die Verlängerungen von a und c bilden, oder $\angle (ac)$. (Der Durchſchnitt kann jedoch 2 Lagen haben, je nachdem $(\angle B + \angle C) >$ oder $< 2R$). $\angle (ac)$ und $\angle (ce)$ beſtimmen ferner $\angle (ae)$; dieſer mit a und b aber ein $\triangle$, aus welchem ſich das verlangte $\square$ ableiten läßt.

Anmerkung. Wenn $(\angle B + \angle C) = 2R$ iſt, bildet ſich die Aufgabe: $\square$ aus a, b, c, $\angle (ce)$ oder $\angle (ae)$.

668. a. Fig. 52. Aufgabe. $\square$ aus a, c, e, e', $(\angle B + \angle C)$.

Analyſis. Zieht man $BF \fallingdotseq e$, und $CF \fallingdotseq a$, ſo beſtimmt ſich $\triangle$ DCF aus $CF = a$, $CD = c$, $\angle DCF = (\angle B + \angle C)$. Mittelſt der erhaltenen Seite DF, e' und $FB = e$ läßt ſich aber auch $\triangle$ DFB feſtſtellen; es muß ſich alſo ſchließlich das geſuchte $\square$ ABCD ergeben, wenn man durch B und C $\fallingdotseq$ zu FC und FB zieht.

669. Fig. XIV. Aufgaben.

$\square$ aus $(a + b)$, c, d, e', $\angle$ A.

$\square$ aus $(a - b)$, c, d, e', $\angle$ A.

Analyſis. d, e', $\angle$ A beſtimmen ein $\triangle$ und hiedurch e; $(a \pm b)$ und a aber nach 100 b u. ſ. w.

670. Fig. XIV. Aufgaben.

$\square$ aus $(a + b)$, c, d, e, $\angle$ A.

$\square$ aus $(a - b)$, c, d, e, $\angle$ A.

$\square$ aus $(a + b)$, c, d, e, $\angle (ae)$.

$\square$ aus $(a - b)$, c, d, e, $\angle (ae)$.

$\square$ aus $(a + b)$, c, d, e, $\angle (be)$.

$\square$ aus $(a - b)$, c, d, e, $\angle (be)$.

Analyſis. c, d, e beſtimmen $\triangle$ ADC; über der Seite AC deſſelben läßt ſich dann mittelſt der übrigen Stücke nach 637 oder 638 auch $\triangle$ ABC verzeichnen.

671. Fig. XIV. Aufgaben.

$\square$ aus $(a + b)$, c, e, e', $\angle$ B.

$\square$ aus $(a - b)$, c, e, e', $\angle$ B.

Analyſis. $(a \pm b)$, e, $\angle B$ beſtimmen nach 642 oder 643 ein $\triangle$, c und e' nebſt der erhaltenen Seite b das andere.

672. Fig. 139. Aufgaben.

$\square$ aus $(a+b)$, c, d, $\angle A$, $\angle B$.

$\square$ aus $(a-b)$, c, d, $\angle A$, $\angle B$.

$\square$ aus $(a+b)$, c, d, $(\angle C+\angle D)$, $\angle A$.

$\square$ aus $(a-b)$, c, d, $(\angle C+\angle D)$, $\angle A$.

Analyſis. Beſtimmt man $(a \pm b)$ nach 130 oder 133, ſo ergiebt ſich $\angle G = \frac{\angle B}{2}$, oder $\angle G' = R + \frac{\angle B}{2}$, und deshalb $\square$ AGCD oder $\square$ AG'CD aus AG oder AG', $\angle G$ oder $\angle G'$, $\angle A$, c, d. Mittelſt des Orts 72 kann alſo ſchließlich das verlangte $\square$ ABCD feſtgeſtellt werden.

673. Fig. 139. Aufgaben.

$\square$ aus $(a+b)$, c, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

$\square$ aus $(a-b)$, c, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Analyſis. Dieſe führt wie in 672 zu 656.

674. Fig. XIX. Aufgaben.

$\square$ aus a, b, d, $\angle A$.

$\square$ aus a, b, $\angle A$, $\angle B$.

$\square$ aus b, d, e, $\angle B$.

$\square$ aus b, d, $\angle B$, $\angle (ae)$. ꝛc.

675. Fig. XIX. Aufgabe.

$\square$ aus a, c, $\angle (ae)$, $\angle (de)$.

Analyſis. $\angle (ae) = \angle (ce)$ u. ſ. w.

676. Fig. XIX. Aufgabe.

$\square$ aus a, b, c, $\angle (ae')$.

Analyſis. $\angle (ae') = \angle (ce')$ u. ſ. w.

677. Fig. XIX. Aufgabe.

$\square$ aus a, c, e', $\angle B$.

Analyſis. Die g. Betr. §. 29. bemerkte Analogie zeigt dieſe Aufgabe mit 676, in ſofern nur e' ſtatt b gegeben iſt, übereinſtimmend.

678. Fig. 34. Aufgabe. $\square$ aus a, b, c, A.

Analysis 1). Zieht man in Rücksicht auf 169 BH = d, so bestimmt sich △ BCH aus b, (c—a), ∠ BHC = 2R — ∠ A, und ergiebt das verlangte □, wenn man, = (c—a), a bestimmt.

Analysis 2). Da ∠ A den ∠ D = 2R — ∠ A ergiebt, kann man ganz wie in 659. a, verfahren.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

679. Fig. XIX. Aufgaben. □ aus a, c, h, d.
□ aus a, c, e, h.

680. Fig. 34. Aufgaben. □ aus h, d, ∠ A, ∠ (be).
□ aus b, d, ∠ A, ∠ (be').

Analysis. Zieht man BH = d, so bestimmt sich △ BHC durch ∠ BHC = 2R — ∠ BHD = 2R — ∠ A und b und d; ∠ (be) und eine = zu HC durch B bestimmen ferner A, und die = durch A zu BH endlich den letzten fehlenden ∠ Punkt D.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

681. Fig. 34. Aufgabe. □ aus b, d, ∠ B, ∠ (ae').

Analysis. Durch ∠ B ist ∠ C bekannt, also das 169 erwähnte △ bestimmt, nach dessen Zeichnung das □ durch ∠ B und ∠ (ae') vollendet werden kann.

682. Fig. 34. Aufgabe. □ aus b, d, ∠ (be'), ∠ (de').

Analysis. Konstruirt man das 169 erwähnte △ BCH, so ergiebt sich ∠ HBC = ∠ (be') — ∠ DBH = ∠ (be') — ∠ (de'); weshalb das △ durch Hilfe von b und d gezeichnet, und mittelst desselben das verlangte □ abgeleitet werden kann.

682. a. Fig. 34. Aufgabe.
□ aus a, e, e', ∠ (ee').

Analysis. e, e, ∠ (ee') bestimmen nach 162 für jedes ▱ ein doppelt so großes □. Beim □ geht dieses ▱ nach 171 in ein △ mit den Stücken e, e' und dem eingeschlossenen ∠ (ee') über, welches sich ergiebt, wenn man

BF ∦ e zieht. Zeichnet man also dieses △ DBF, und bestimmt, ∦ DF, BA = a, und AC ∦ BF, so muß ABCD das geforderte □ bilden.

682. b. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus b, e, e′, ∠ (ee′).

Analysis. Durch e, e′, ∠ (ee′) ist das 171 angeführte △ BDF bestimmt; schneidet man daher von B aus b ab, und zieht CA ∦ FB ꝛc., so ergiebt sich das geforderte □.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

682. c. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus c, e, e′, ∠ (ee′).

Analysis. Durch e, e′, ∠ (ee′) läßt sich das 171 angeführte △ BFD zeichnen. Schneidet man in demselben DC = c ab, und zieht CA ∦ FB, BA ∦ DC u. s. w., so muß sich das geforderte □ bestimmen.

682. d. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus d, e, e′, ∠ (ee′).

Analysis. Durch e, e′, ∠ (ee′) läßt sich das 171 angeführte △ BFD zeichnen. Zieht man zu der Seite DF desselben eine ∦ durch B, schneidet d von D aus ab, und zieht AC ∦ der zweiten Seite BF jenes △ ꝛc., so muß sich das geforderte □ ABCD bestimmen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

682. e. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus e, e′, ∠ (ee′), ∠ A.

Analysis. Durch e, e′, ∠ (ee′) läßt sich das 171 angeführte △ BFD zeichnen. Zieht man BA ∦ DF, durch D nach 64. eine um ∠ A gegen die Lage a geneigte Linie DA, und AC ∦ BF, so muß sich das verlangte □ bestimmen.

682. f. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus e, e′, (ee′), ∠ (be).

Analysis. Durch e, e′, ∠ (ee′) läßt sich das 171 angeführte △ BFD zeichnen. Da nun ∠ (be) = ∠ CBF ist, läßt sich in demselben Punkt C bestimmen, und darauf

das verlangte □ ABCD ableiten, wenn man durch C und B ∦∦ zu FB und FD zieht.

682. g. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus e, e′, ∠ (eb), ∠ (e′b).

Analyſis. ∠ (eb) und ∠ (e′b) beſtimmen im △ BCE ∠ (ee′); man hat alſo die vorhergehende Aufgabe zu löſen.

682. h. Fig. 34. Aufgabe.

□ aus a, c, e, ∠ (ee′).

Analyſis. (a+c), e, ∠ (ee′) beſtimmen das 171 angeführte △ BDF, weshalb man nach der Konſtruktion deſſelben nur, ∦ DF, BA = a abzuſetzen, und AC ∦ BF zu legen hat, um das verlangte □ ABCD zu erhalten.

683. Fig. XIX. Aufgaben.

□ aus (a+b), c, d, e.
□ aus (a−b), c, d, e.
□ aus (a+b), c, d, ∠ A.
□ aus (a−b), c, d, ∠ A.
□ aus (a+b), c, e, ∠ A.
□ aus (a−b), c, e, ∠ A.

Analyſis. Verlängert man a um b, oder ſchneidet b von a ab, ſo ergiebt ſich ein leicht konſtruirbares □.

684. Fig. XIX. Aufgaben.

□ aus (a+b), c, d, ∠ B.
□ aus (a−b), c, d, ∠ B.
□ aus (a+b), c, e, ∠ B.
□ aus (a−b), c, e, ∠ B.

Analyſis. Verfährt man wie in 683, ſo beſtimmt ſich ein □, in welchem für (a+b) ein ∠ die Größe $\frac{\angle B}{2}$, und für (a − b) die Größe $R + \frac{\angle B}{2}$ erhält. Die Konſtruktion dieſes □ ergiebt ſich wie in 678 ꝛc.

685. Fig. XIX. Aufgaben.

□ aus (a+b), e, e′, ∠ B.
□ aus (a−b), e, e′, ∠ B.

Analysis. $(a \pm b)$, e und $\angle B$ bestimmen $\triangle ABC'$ nach 642 oder 643. e' bestimmt schließlich das $\square$.

686. Fig. 34. a. Aufgabe. $\square$ aus $(a+c)$, d, $\angle A$, $\angle B$.

Auflösung. An d $\angle A$ und $\angle D$ gelegt, und die Schenkel der $\measuredangle = \frac{a+c}{2}$ gemacht, giebt das nach 498 dem $\square$ gleiche $\square$ DF. Durch die Mitte I der Gegenseite von d ist dann nur eine Linie unter $\angle B$ geneigt zu legen, um a und c selbst zu bestimmen.

Anmerkung. Fig. 34. $\square$ aus $(a-c)$, d, $\angle A$, $\angle B$ ist unmöglich, denn im $\triangle BHC$ liegen nach 167 $(a-c)$, d, $2R - \angle A = \angle H$ und $2R - \angle B = \angle C$.

687. Fig. 34. a. Aufgabe. $\square$ aus $(a+c)$, h, $\angle A$, $\angle B$.

Analysis. h und $\angle A$ bestimmen d, man hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

688. Fig. 34. Aufgaben. $\square$ aus $(b-d)$, $(c-a)$, $(\angle C - \angle D)$ und einem $\angle$ oder einer Seite, ꝛc.

Analysis. Zeichnet man $\triangle BCH$ nach 169, so zeigt sich dieses $\triangle$ aus den drei genannten Stücken nach 142 konstruirbar, weshalb sich auch mittelst des vierten Stücks das $\square$ feststellen läßt.

689. Fig. 34. Aufgaben. $\square$ aus $(b+d+c-a)$, $\angle C$, $\angle D$, e oder statt e ein anderes Stück.

Analisis. Das 169 erwähnte $\triangle$ läßt sich aus dem Umfange und 2 $\measuredangle$ nach 647 zeichnen, und durch e hierauf das $\square$ ableiten.

690. Fig. 140. Aufgaben.

$\square$ aus $(a+b)$, e, e', $\angle (ee')$.

$\square$ aus $(a-b)$, e, e', $\angle (ee')$.

Analysis. e, e', $\angle (ee')$ bestimmen nach 162 für jedes $\square$ ein doppelt so großes $\square$. Beim $\square$ geht dieses $\square$ nach 171 in ein $\triangle$ mit den Stücken e, e' und dem eingeschlossenen $\angle (ee')$ über, welches sich ergiebt, wenn man $BF \pm e$

sicht. Die Zeichnung dieses △ bestimmt den ∠ F, und damit auch das △ BCF nach 637 und 638, da BF = e und FC ± BC = (e ± b) sein muß, aus welchem △ die Konstruktion des ▭ gefolgert werden kann.

Auflösung. Zeichne △ DBF aus BF = e, BD = e' und ∠ DBF = ∠ (e e'), schneide FI = (a + b), oder FI' = (a − b) ab, konstruire das △ BCI oder BCI' mittelst 72, ziehe durch C und B ∥ ∦ zu BF und FD, und verbinde A mit D, so bildet ABCD das geforderte ▭.

Beweis. Nach der Konstruktion ist IC oder I'C = CB, und AF ein ▭, folglich hat man AB ± BC = CF ± CI = (a ± b), AC = BF = e, ∠ DEC = ∠ DBF = ∠ (e e'), und BD ist = e' geradezu verzeichnet.

691. Fig. 140. Aufgaben. ▭ (a + c + e + e'), ∠ (ec'), ∠ (e'c), d, oder statt d ein anderes Stück.

Analysis. Die Aufgabe bildet eine Analogie zu 689. Es bestimmt sich nach 171 △ BDF aus dem Umfange und 2∠ (647). Mittelst des vierten Stücks läßt sich nach der Zeichnung des △ das ▭ ableiten.

692. Es können eine Menge solcher ▭ Aufgaben gebildet werden, welche Summen oder Differenzen von Seiten oder Diagonalen enthalten, wenn man dazu entweder das 169 oder das 171 erwähnte △ benutzt.

693. Fig. 141. Aufgabe. Fünfeck aus ∠ A, ∠ B, ∠ C, ∠ D, a, b, d.

Analysis. a, b und ∠ B bestimmen ein △, über dessen Seite AC das ⏢ ACDE nach 656 konstruirt werden kann.

694. Aufgabe. Fig. 141. Fünfeck aus a, b, c, d, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Analysis. a, b, ∠ B und c, d, ∠ D bestimmen 2 △△, welche man im ∠ C durch 94 zusammenzuschieben hat, um das verlangte Fünfeck zu erhalten.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

695. Aufgabe. △ aus f^a, a, β, (oder ▱ aus f^a, a, β, oder ◺ aus f^a, a, β; d. h. es soll eine Figur in ein △ mit der Grundlinie a und dem ∠ β verwandelt werden.

Auflösung. Verwandele die Fläche in ein △, gebe demselben a nach 178, und β nach 177.

696. Aufgabe. △ aus f^a, h, β.

Analysis. f^a und h bestimmen a nach 185; man hat also △ aus f^a, a, β zu verzeichnen; siehe 695.

697. Aufgabe. △ aus f^a, a, d. h. es soll eine Figur in ein △ mit der Grundlinie a verwandelt werden.

Analysis. f^a und a bestimmen h nach 185; man hat also ein △ aus a, h zu konstruiren.

698. Aufgabe. △ aus f^a, p, q.

Analysis. Aus f^a und $p + q = a$ ergiebt sich h nach 185; man hat also △ aus p, q, h zu bestimmen.

699. Aufgabe. △ aus f^a, h, t.

Analysis. f^a und h bestimmen a nach 185; man hat also △ aus a, h, t zu verzeichnen; siehe 91.

700. Aufgaben. △ aus f^a, $(a + b)$; h.

△ aus f^a, $(a - b)$; h.

Analysis. f^a und h bestimmen a nach 185, a und $(a \pm b)$ aber b; man hat also △ aus a, h, b zu verzeichnen; siehe 86.

701. Aufgabe. △ aus f^a, h, $(p - q)$.

Analysis. f^a und h bestimmen a nach 185, a und $(p - q)$ aber p und q nach 105; man hat also △ aus p, q, h zu verzeichnen.

702. Aufgaben. △ aus f^a, b.

▽ aus f^a, b.

Auflösung. Verwandele die Fläche in ein △, gebe demselben b nach 178, ziehe durch die Spitze des △ eine ∓ zu b, und beschreibe um einen Endpunkt von b mit b eine Kreislinie, so bestimmt der Schneidungspunkt mit der ∓ das verlangte △.

Zusatz. Es ergeben sich zwei △△, ein stumpfs. und ein spitz∠, deren ∠ an der Spitze von einander Supplemente sind.

703. Aufgabe. □ aus f^2, c, c'.

Analysis. Durch $\frac{f^2}{4}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{c'}{2}$ ist eins von den 4 durch die Diagonalen gebildeten △△ nach 194 konstruirbar.

704. Aufgabe. △ aus f^2, a, h'.

Auflösung. Verwandele die gegebene Fläche in ein △ mit der Seite a nach 178, und dies in ein △ mit unveränderter Grundlinie a und der Höhe h' nach 179.

Zusatz. Es finden sich zwei verschiedene Resultate.

705. Fig. 142. Aufgabe. △ aus f^2, h', h''.

Analysis. f^2 und h' bestimmen b nach 183; man hat also △ aus f^2, b, h'' zu konstruiren; siehe 704.

Auflösung. Verwandele die gegebene Fläche in ein △ CDH, ziehe durch D eine ∓ zu CH, beschreibe über CH einen Halbkreis, schneide HE = h' ab, verlängere CE bis A, konstruire ferner über AC einen Halbkreis, schneide CF = h'' ab, und verlängere AF bis B in einer durch H zu CA gezogenen ∓, so bildet ABC das verlangte △.

Beweis. △ABC = △AHC = △DCH = f^2, da BH ∓ CA, und DA ∓ CH ist. Das △ hat aber auch die verlangten Höhen, da CF = h'' abgeschnitten ist, und ⊥ BG = ⊥ HE = h' sein muß.

Zusatz. Es sind 4 verschiedene Resultate möglich, wenn man die zweiten Halbkreise benutzt, von denen aber je zwei ≅ sind.

Anmerkung. Bei den meisten Aufgaben dieses Kapitels ist es nothwendig, an einen vom Grunde gelegten Fläche

f^2 (in Form eines △ oder ▱) die Auflösungen und Beweise wirklich ausführen zu lassen, damit die Klarheit nicht verloren geht, welche hier besonders die Synthesis gewährt.

706. Aufgabe. △ aus f^2, t, ∠ (ta).

Analysis. Da t das △ in 2 gleiche Theile theilt, hat man ein △ aus $\frac{f^2}{2}$, t, ∠ (ta), siehe 695, zu konstruiren, und hierauf eine Seite desselben zu verdoppeln.

707. Fig. 143. Aufgabe. △ aus f^2, a, t'.

Analysis. Denkt man sich, in Rücksicht auf 123, t' um sich selbst verlängert, so ist das aus $2t'$, a und c gebildete △ = △ ABC, daher aus f^2, $2t'$, a nach 194 konstruirbar. Aus demselben kann man schließlich durch Halbirung von $2t'$ das geforderte △ ABC ableiten.

Auflösung. Verwandle f^2 in ein △ CFG, ziehe BG ∦ CF, bestimme CB = a, zeichne FA ∦ CB, schneide BE = $2t'$ ab, halbire diese Linie in D, und verlängere CD bis A, so bildet ABC das verlangte △.

Beweis. △ ABC = △ CFB = △ CFG, also = f^2, da FA ∦ CB, und BG ∦ CF gezeichnet ist. Da BE = $2t'$ abgeschnitten, und in D halbirt wurde, ergiebt sich auch BD = t', und CD = DA aus der Kongruenz der △△ EDA und CDB.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich, von denen aber je zwei ≅ sind.

708. Aufgabe. △ aus f^2, h, t'.

Analysis. f^2 und h bestimmen a nach 185; man hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

709. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, d.

Analysis. f^2 und (a+c) ergeben h nach 199; man hat also ▭ aus a, c, d, h zu verzeichnen.

710. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, e.

Analysis. Führt wie in 709 zu ▭ aus a, c, e, h^2.

711. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, ∠A.

Analysis. Führt wie in 709 zu ▭ aus a, c, ∠A, h.

712. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus f^2, a, d, ∠D.

Analysis. d und ∠D bestimmen h nach 114, f^2 und h aber (a + c) nach 199, (a + c) und a nach 100 c; man hat also ein □ aus a, c, d, ∠D zu verzeichnen.

713. Aufgabe. □ aus f^2, d, ∠A, ∠B.

Analysis. Fig. 34. a. Denkt man sich in Rücksicht auf 198 f^2 in ein ▱ mit d und ∠A verwandelt, so findet sich $\frac{a+c}{2}$, weshalb man schließlich die Aufgabe: □ aus (a + c), d, ∠A, ∠B zu lösen hat; siehe 686.

Auflösung. Fig. 144. An dem gegebenen ▱ DE = f^2 zeichne man ∠FDH = 2R − ∠A = ∠D, und vollende ▱ DG = ▱ DE; verlängere ferner FD um d bis A, ziehe FI ∦ AH, ergänze △ IAD zum ▱ QD, bestimme ∠SQA = ∠B, und ziehe durch N, die Mitte von QI, BC ∦ SQ, so ist ABCD das verlangte □.

Beweis. Das □ ABCD enthält durch die Konstruktion die Seite d, und die ∠A und B. Es ist aber auch = f^2, da das wegen der ≅ △ CNI und QNB ihm gleiche ▱ halb genommen, also △ IAD, nach der Konst. = △ FDH, der Hälfte des ▱ DG oder DE, d. h. = $\frac{f^2}{2}$ ist.

714. Fig. 34. Aufgabe. □ aus f^2, b, d, ∠A.

Analysis. Das 169 erwähnte △ BCH, also auch die Fläche desselben, ist durch b, d, ∠A bestimmt, weshalb man durch Wegnahme dieser Fläche von der gegebenen ein □ aus f^2, d, ∠A, siehe 695, zu konstruiren hat.

715. Fig. 34. a. Aufgabe.

□ aus f^2, ∠A, h, (a + b + c + d).

Analysis. f^2 und h bestimmen (a + c) nach 185, (a + c) u. (a + b + c + d) aber (b + d) nach 100; ∠(2R − A) = ∠D und h die Seite d nach 114, und (b + d) und d die Seite b. Durch (a + c), d und ∠A ist aber das ▱ AG bestimmt, man hat also schließlich nur durch I, die Mitte von FG, die Seite b zu legen, welches mittelst 95 und 22

ausgeführt werden kann, um das verlangte ▭ ABCD fest zustellen.

716. Fig. XIV. Aufgaben.

▱ aus f^2, a, b, ∠A, ∠B.

▱ aus f^2, a, b, ∠B, ∠C.

Analysis. a, b, ∠B bestimmen △ ABC, wodurch vom △ ACD die Fläche $= f^2 - \triangle ABC$, die Seite e, und der ∠ (de) $= \angle A - \angle$ (ae) bekannt werden, dasselbe also nach 695 gezeichnet werden kann.

717. Aufgabe: Ein △ in ein Viereck, Fünfeck ꝛc. zu verwandeln.

Die Aufgabe gestattet wegen ihrer Unbestimmtheit eine sehr willkührliche Auflösung.

Dergleichen Aufgaben können aber auch sehr mannichfaltig bedingt werden, z. B.

1ster Fall.

Fig. 145. △ AFE dergestalt in ein ▱ ABCD zu verwandeln, daß die festliegende von einer Seite und einer ∠spitze begrenzte Linie AC die eine Diagonale wird, und die andere Diagonale in eine der Lage nach gegebene Linie L fällt.

Analysis. Es ergiebt sich leicht, daß AC ∓ BF ∓ ED sein muß, also die Punkte B und D bestimmt sind.

2ter Fall.

Fig. 146. Die von zwei Seiten begrenzte festliegende Linie DB soll die eine Diagonale werden, und die andere Diagonale von A aus in L fallen.

Analysis. ▱ ABCD wäre $=$ △ AFE, wenn △ CDB $=$ ▱ EFBD wäre. Denkt man sich nun, um das ▱ mit dem △ vergleichen zu können, das erstere in ein △ DBH verwandelt, so müßte △ DCB $=$ △ DHB, also HC ∓ BD sein, weshalb es nur auf die Bestimmung von H ankommt, da B und D festliegen. H ist aber bestimmbar, da wegen der angenommenen Gleichheit des ▱

DBFE und des △ DBH, EH ∦ DF sein muß, und 3 Punkte D, F und E festliegen; folglich ist die Auflösung gefunden.

Auflösung. Ziehe EH ∦ DF, und HC ∦ BD, so ist ABCD das verlangte ▱.

Beweis. ▱ ADCB = △ ADH, da CH ∦ DB ist. △ ADH = △ AEF, da EH ∦ DF ist, folglich muß auch ▱ ABCD = △ AFE sein.

Anmerkung. Der zweite Fall bildet eigentlich die Aufgabe: ▱ aus f^2, a, d, e', ∠ (ee').

4tes Kapitel.

Theilungen.

718. Aufgabe. Ein △ so in 2 Theile zu theilen, daß die ⊥ Abstände der Theilungslinie von B und C gleich lang werden.

Ist die Theilung aus der ∠spitze A, nur anders eingekleidet.

719. Fig. 147. Aufgabe. Ein △ durch eine gebrochene Linie, welche von A nach a, dann nach b, wieder nach a u. s. f. führt, in n (7) gleiche △△ zu zerlegen. (Zickzacktheilung.)

Analysis. Da $\triangle ADB = \frac{1}{n} f^2$ sein muß, ist $BD = \frac{1}{n} (\frac{1}{7}) a$. Da $\triangle ADE = \frac{1}{n-1} (\frac{1}{6}) \triangle ADC$ sein muß, ist $AE = \frac{1}{n-1} (\frac{1}{6}) b$. Da $\triangle EFD = \frac{1}{n-2} (\frac{1}{5}) \triangle CDE$ sein muß, ist $DF = \frac{1}{n-2} (\frac{1}{5}) CD$ u. s. w.

720. Fig. 148. Aufgabe. Im △ ABC einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Linien AX, BX, CX das △ in 3 gleiche Theile zerlegen.

Analysis. Die $= \triangle\triangle$ ABX und ACX müssen wegen der gemeinschaftlichen Grundlinie AX gleiche Höhen haben, d. h. es ist AX von B und C = weit entfernt. Hieraus folgt aber nach 718, daß die Richtung von AX a halbirt, folglich $\triangle$ DXB = $\frac{1}{2}\triangle$ CXB = $\frac{1}{2}\triangle$ ABX, und deshalb DX = $\frac{1}{2}$AX sein muß, wonach der gesuchte Punkt bestimmt werden kann. (Der Anfang der Analysis in Beziehung auf AX konnte auch in Beziehung auf BX oder CX wiederholt werden; es hätte sich hiedurch X als der Schneidungspunkt zweier Transversalen ergeben.)

Zusatz. 1) Es giebt keinen zweiten Punkt X', welcher den gegebenen Bedingungen genügt, da ein solcher innerhalb eines der 3 = $\triangle\triangle$, z. B. in AXB, liegen müßte, sich folglich $\triangle$ AXB = $\triangle$ AX'B ergäbe, welches unmöglich ist.

Zusatz. 2) Da gleiche Schlüsse an jeder anderen Transversale gemacht werden konnten, es aber nur einen solchen Punkt X giebt, so schneiden sich die 3 Transversalen in einem Punkt (Schwerpunkt), welcher von jeder Transversale $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ abschneidet.

721. Fig. 149. **Aufgabe.** Ein $\triangle$ aus einem innerhalb gegebenen Punkte P durch gerade Linien so in n gleiche Theile zu theilen, daß PA eine Theilungslinie wird.

Analysis. Nach 235 kann man die Lage der Theilungslinien vor der Konstruktion beurtheilen. Nimmt man an, dieselben gingen nach X, X', X'' ꝛc., so findet sich $\triangle$ APX bestimmt durch $\frac{1}{n}\triangle$ ABC = f^2, $\angle$ PAX und Seite PA, siehe 695; eben so $\triangle$PAX'; ferner $\square$PABX'' nach 716 durch $f^2 = \frac{3}{n}\triangle$ ABC, PA, AB, $\angle$ PAB, $\angle$ ABX'' u. s. w. Werden dieselben Schlüsse für die andere Seite von PA gemacht, so ergiebt sich aus den einzelnen Konstruktionen eine zusammenhängende Auflösung für dasjenige Verfahren, bei welchem zuerst getheilt und dann verwandelt wird.

Auflösung. 1. Man theile das △ zunächst von A aus in n gleiche Theile und verwandle jeden Theil so, daß eine Spitze desselben in P fällt, welches erreicht wird, wenn man aus den auf eine Seite von AE fallenden Theilungs-Punkten T, T', T'' ∓ ∓ zu c, und aus den auf der anderen Seite von AE liegenden Theilungspunkten T''' u. s. w. ∓ ∓ zu b zieht, durch die zu T, T', T'' gehörenden Durchschnittspunkte mit AE D, D', D'' ∓ ∓ zu PB, und durch die zu T''' ꝛc. gehörenden Durchschnittspunkte D''' ꝛc. mit AE ∓ ∓ zu PC legt, so bilden die Linien PX, PX', PX'', PX''', ꝛc. die verlangten Theilungslinien.

Auflösung. 2. Man verwandle △ ABC in ein anderes dessen Grundlinie längs a fällt und die Spitze in P hat, theile dasselbe von P aus in n gleiche Theile, und schaffe nach 230 die herausgefallenen Theile in das △ ABC.

Beweis zur Auflösung 1. △ APX = △ ADB, da PB ∓ DX; △ ADB = △ ATB, da DT ∓ c; folglich ist △ APX = $\frac{1}{n}$ △ ABC.

△ APX' = △ AD'B, da PB ∓ D'X'; △ AD'B = △ AT'B, da D'T' ∓ c; folglich ist △ APX' = $\frac{2}{n}$ △ ABC, und deshalb △ PXX' = $\frac{1}{n}$ △ ABC.

▱ APX''B = △ AD''B, da PB ∓ D''X''; △ AD''B = △ AT''B, da D''T'' ∓ c; folglich ist ▱ APX''B = $\frac{3}{n}$ △ ABC, also auch, da △ APX' = $\frac{2}{n}$ △ ABC war, ▱ PX'BX'' = $\frac{1}{n}$ △ ABC.

Fünfeck APX'''CB = ▱ ABCD''', da PC ∓ D'''X'''; ▱ AD'''CB = △ AT'''B, da D'''T''' ∓ b; folglich ist Fünfeck APX'''CB = $\frac{4}{n}$ △ ABC, also auch, da ▱ APX''B = $\frac{3}{n}$ △ ABC war, ▱ PX''CX''' = $\frac{1}{n}$ △ ABC, u. s. w.

Anmerkung. Man kann durch diese Aufgabe überhaupt aus einem innerhalb eines △ liegenden Punkte P $\frac{m}{n}$ △ ABC durch 2 Linien PA und PX abschneiden.

722. Aufgabe. Im Umfange eines △ ABC sind (n — 1) Punkte gegeben, man soll durch gerade Linien, von denen jede einen dieser Punkte trifft, das △ in n gleiche Theile theilen.

Auflösung. Fig. 150. Aus P schneide man durch PX $\frac{1}{n}$ △ ABC, aus P″ durch P″X″ $\frac{2}{n}$ △ ABC, aus P‴ durch P‴X‴ $\frac{3}{n}$ △ ABC u. s. w. nach 695 und 716 (oder bloß nach 695, abwechselnd von den in c und b gelegenen Punkten aus) ab, so ergeben sich die gesuchten Theilungslinien.

Bei der Auflösung können zwei Schwierigkeiten eintreten:

1) Die Theilungslinie aus einem Punkt, z. B. P‴X‴, kann theilweise in schon vorher abgeschnittene Stücke des △ fallen, so daß sich hier ▱ AP‴X‴C = $\frac{3}{n}$ △ ABC ergiebt. Nun war aber △ P″X″C = $\frac{2}{n}$ △ ABC, folglich hat man ▱ AP‴GX″ um △ P″GX‴ > als $\frac{1}{n}$ △ ABC, d. h. die Theilungslinie P‴X‴ ist aus der noch zu theilenden Fläche ABP‴X″ herausgefallen, und muß deshalb nach 230 in die angegebene Fläche hineingeschaft werden, wodurch sich ▱ P‴Y‴X″A als $\frac{1}{n}$ △ ABC ergeben wird, und sonach die entstandene Schwierigkeit gehoben werden kann.

oder 2) Eine aus einem Punkte P gehende Theilungslinie PX fällt so, daß ein anderer Theilungspunkt P′ in den Umfang des abgeschnittenen Theils CPX zu liegen kömmt. In diesem Fall kann die Theilungslinie PX so verlegt werden, daß man nicht vom ∠ C, sondern vom ∠ A $\frac{1}{n}$ △ ABC ab-

schneidet, wodurch sich die Theilungslinie PY ergiebt. Findet sich nun aber in dem Umfange dieses Theils abermals ein Theilungspunkt P‴, so wird die Aufgabe unmöglich, d. h. es giebt für die Aufgabe überhaupt in Beziehung auf die Lage der Punkte P, P′ ꝛc. eine Determination.

723. Aufgabe. Ein □ aus einer ∠spitze in ungleiche Theile zu theilen.

Auflösung 1), wenn n gerade ist. Theile jede den Gegen ∠ einschließende Seite in $\frac{n}{2}$ gleiche Theile, und verbinde die Theilungspunkte mit der bestimmten ∠spitze.

Auflösung 2.), wenn n ungerade ist. Theile jede den Gegen ∠ einschließende Seite in n gleiche Theile, und verbinde (von den ungetheilten Seiten aus gerechnet) den 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. Theilungspunkt mit der bestimmten ∠ spitze.

724. Aufgabe. Ein ▱ oder ▭ aus einem Punkte in der einen oder anderen ≠ Seite in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man verfahre wie in 241.

725. Aufgabe. Ein ▭ oder ▱ so in n gleiche Theile zu theilen, daß jede Theilungslinie einen in der einen oder anderen ≠ Seite liegenden Punkt trifft.

Auflösung. Man theile wie in 241 die Mittellinie in n gleiche Theile, so erhält man n — 1 Punkte, welche mit den gegebenen n — 1 Punkten gehörig verbunden die Theile bestimmen.

Beweis. Folgt aus 238.

Anmerkung. Es werden hier ähnliche Schwierigkeiten wie in 722 eintreten können, die zweite fällt aber fort, wenn die gegebenen Punkte nur in einer ≠ Seite liegen.

726. Aufgabe. Ein ▭ so in n gleiche Theile zu theilen, daß sich alle Theilungslinien im Durchschnittspunkt der beiden nicht≠ Seiten vereinigen.

Auflösung. Theile die Mittellinie in n gleiche Theile, und verbinde den genannten Durchschnittspunkt mit den erhaltenen Theilungspunkten; siehe 238.

Anmerkung. Statt des Durchschnittspunkts beider nicht ∓ Seiten kann auch ein anderer Punkt gewählt werden, doch muß derselbe hier eine günstige Lage haben, da in diesem Fall 230 nicht immer anwendbar ist, (vergl. 230. Anm.) sondern die Aufgabe nach 736 oder 2187 aufgefaßt werden muß.

727. Bei einer günstigen Lage von n — 1 gegebenen Punkten läßt sich auch jedes ▭ oder ▱ so in n gleiche Theile theilen, daß jede Theilungslinie einen dieser Punkte trifft. Es bedarf dazu gleichfalls nur der Anwendung von 238. Es können dabei aber nicht bloß die Schwierigkeiten der Anmerkung 726, sondern auch die von 2) 722 eintreten. (Vergl. 2189).

728. Aufgabe. Ein ▭ oder ▱ so in n gleiche Theile zu theilen, daß jede Theilungslinie eine bestimmte ⇀ erhält.

Auflösung. Siehe 240.

729. Aufgabe. Ein ▱ oder ▭ so in n gleiche Theile zu theilen, daß jede Theilungslinie eine gegebene Länge erhält.

Analysis. Nach 95 ist die ⇀ der Theilungslinien (doppelt) durch die Länge gegeben, folglich hat man 728 anzuwenden.

730. Aufgabe. Ein ▱ oder ▭ durch eine gebrochene Linie, welche in einer Winkelspitze anfängt, und von einer ∓ Seite zur anderen geht, in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Ergiebt sich aus 238.

731. Aufgabe. Ein ▱ oder ▭ so in n gleiche Theile zu theilen, daß die Differenz der ∓ Gegenseiten jedes Theils eine bestimmte Größe erhält.

Analysis. Da nach 238 die Summe der ∓ Gegenseiten jedes Theils $= \frac{a + c}{n}$ ist, hat man nach 105 die Gegenseiten einzeln genommen.

732. Aufgabe. Ein ▱ oder ▭ so in n gleiche Theile zu theilen, daß jeder Theil mit Ausnahme des letzten einen bestimmten Umfang erhält.

Analysis. Vom ersten Theil ist die eine nicht ∓ Seite b und die Summe der ∓ Seiten $= \frac{a + c}{n}$ nach 238 bekannt, daher ergiebt sich durch Subtraktion von dem gegebenen Umfange die erste Theilungslinie, welche zugleich eine Seite des zweiten Theils ist. Setzt man diese Schlüsse fort, so reduzirt sich die Aufgabe auf 729.

733. Aufgabe. Ein ▭ so in eine ungerade Anzahl gleicher Theile zu theilen, daß alle Theile gleichen Umfang erhalten.

Auflösung. Man theile die Mittellinie nach 238, lege (von b aus gerechnet) durch den ersten Theilungspunkt die Seite d, durch den zweiten die Seite b, und so abwechselnd fort; hiedurch ergeben sich die geforderten Theile.

Beweis. Nach der Konstruktion und 238 ist der Umfang jedes Theils $= b + d + \frac{a + c}{n}$

734. Aufgabe. Ein ⏢ durch eine gebrochene Linie, welche in A beginnt, und abwechselnd von b nach d geht, in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Schneide das erste △ $= \frac{1}{n}$ ⏢ nach 695 ab, vom Rest das nächste △ oder ⏢ $= \frac{1}{n - 1}$ dieses Rests, von dem neuen Rest abermals ein △ oder ⏢ $= \frac{1}{n - 2}$ dieses neuen Rests nach 696 oder 716 u. s. w., so wird man die verlangte gebrochene Linie erhalten.

735. Aufgabe. Ein ▱ aus einem in einer Seite liegenden Punkte P durch gerade Linien in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Fig. 151. In Rücksicht auf 232 kann man entweder

1) das Viereck in ein anderes verwandeln, das eine ∠spitze in P hat, und dies nach 233 theilen, dann aber die Theilungslinien dieses ▱ nach 230 so legen, daß sie innerhalb des gegebenen ▱ fallen. Oder

2) man theile das ▱ nach 233 aus der einen ∠spitze, und verwandle die Theile so, daß sie mit einer Spitze nach P fallen, wobei theilweis gleichfalls 230 anzuwenden sein wird.

3) Man theile △ ABD aus P nach 234 in n, z. B. 3, gleiche Theile durch PG und FP. Dann theile man △ BCD nach 722 so in n (3) gleiche Theile, daß eine Theilungslinie in F, die zweite in G u. s. w. endigt, und verwandele zuletzt die erhaltenen von P auslaufenden gebrochenen Theilungslinien in gerade nach 231, so ist die Aufgabe gelöst.

Anmerkung. In derselben Art kann auch ein ▭ aus einem Punkt in der nicht ∓ Seite getheilt werden.

736. Fig. 151. a. Aufgabe. Ein ▱ aus einem innerhalb gegebenen Punkte P durch gerade Linien so in n gleiche Theile zu theilen, daß BA eine Theilungslinie wird.

Auflösung. ▱ PABC in △ PEC, ▱ PADC in △ PFC verwandelt, hierauf ▱ PECF nach 233 von P aus in n gleiche Theile getheilt, und die außerhalb der Fläche ABCD gefallenen Theilungslinien nach 230 in dieselbe hineingeschafft, bestimmt die geforderten Theile.

738. Aufgabe. Ein ▱ so in n gleiche Theile zu theilen, daß jede Theilungslinie (gerade) einen im Umfange gegebenen Punkt trifft.

Auflösung. Ergiebt sich mit denselben Schwierigkeiten wie in 722.

739. Fig. 152. Aufgabe. Ein Fünfeck durch gerade Linien, welche in einer ∠spitze enden, in n gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Wenn man das Fünfeck durch die beiden in B zusammentreffenden Diagonalen in 3 △△ zerlegt, das △ ABE von A aus in n gleiche Theile theilt, ferner mit dem △ BED, von den in EB liegenden Endpunkten der erhaltenen Theilungslinien aus, nach 722 dasselbe vornimmt, und dieses auch bei dem △ BDC wiederholt, so ergeben sich die Theilungslinien z. B. AGFH gebrochen, welche deshalb nur schließlich nach 231 in gerade zu verwandeln sind, um die Aufgabe gelöst zu haben.

Anmerkung. Fallen die Endpunkte der Theilungslinien des zweiten △ nicht alle in die Diagonale BD, welche Seite des folgenden △ ist, sondern fällt z. B. der Endpunkt F' einer Theilungslinie in die Seite ED, so kann man leicht aus F' eine Linie F'H' so ziehen, daß $F'DH' = \frac{1}{n} \triangle BDC$ wird, indem man entweder △ BDC vorher so verwandelt, daß DC die Lage der Grundlinie bleibt, die Spitze aber in F' fällt (siehe 195), oder indem man 695 anwendet.

740. Aufgabe. Ein Fünfeck aus einem in einer Seite liegenden Punkte P durch gerade Linien in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Diese ergiebt sich ähnlich wie in 735, am besten nach Auflösung 3.

5tes Kapitel.

Gemischte Aufgaben.

741. Fig. 90. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L' und P''; man soll durch P'' eine Linie legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt $XY = a$ ergiebt.

Analysis. Nach 95 ist die $\rightarrow$, und durch P'' folglich auch die Lage von XY (doppelt) bestimmt.

Determination. a muß $\geq$ der $\perp$ Entfernung zwischen beiden $\neq$ sein, damit die Aufgabe möglich ist.

742. Aufgabe. Fig. 90. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und P''; man soll durch P'' eine Linie legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß $XY + PP' = s$ ist.

Analysis. Durch s und PP' ist XY nach 100 gegeben; man hat also 741 zu lösen.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn $s - PP' <$ ist als der Perpendikel zwischen L und L'.

743. Fig. 90. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und P''; man soll durch P'' eine Linie legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß entweder $XY - PP' = d$, oder $P'P - XY = d'$ wird.

Analysis. Siehe 742 und 100.

744. Fig. 90. a. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und P''; man soll durch P'' eine PP' schneidende Linie P''XY legen, welche $PY + P'X = s$ abschneidet.

Analysis. Zieht man $P'K \neq XY$, so ergiebt sich $PK = s$, also durch die $\rightarrow$ von P'K die Lage für XY.

Determination. Die Lage von P'' gegen P'P bestimmt die Wahl der $\rightarrow$ von PK. Die Linien P''P und P''P' bilden, jene einen Punkt $\mathfrak{P}$ in L', und diese einen zweiten $\mathfrak{P}$ in L. Man erhält $P\mathfrak{P}$ und $P'\mathfrak{P}'$ als die beiden Grenzen für s.

Zusatz. Liegt P zwischen L und L', so sind 2 Resultate möglich.

745. Aufgabe. Fig. 90. (Dem Schüler später mitzutheilen.) Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und P''; man soll durch P'' eine PP' nicht schneidende Linie P''XY ziehen, welche $PY + P'X = s$ abschneidet.

Analysis 1). Setzt man PN = s ab, so ergäbe sich PY + P'X = s, wenn P'X = YN wäre. Da nun zugleich PX ∥ YN ist, so fände jenes statt, wenn man △ P'HX ≅ △ YHN, also auch P'H = HN hätte. Punkt H ist aber gegeben, folglich läßt sich die Lage von P''Y bestimmen.

Analysis 2). Da ▱ PYXP' ein ▭ ist, muß nach 172. a. die Mittellinie $GH = \frac{P'X + PY}{2} = \frac{s}{2}$ sein, wonach sich H als zweiter Punkt der verlangten Linie ergiebt.

Determination. Liegt P'' zwischen L und L', so ergeben sich dieselben zwei Grenzen wie in 744. Liegt aber P'' außerhalb L und L', so bestimmt sich, wenn P und P' auf dieselbe Art wie in der Anmerkung zu 744 festgestellt werden, nur die kleinere von den beiden Linien PP und P'P' als Grenze für s.

Zusatz. Wenn P'' außerhalb L und L' liegt, sind 2 Resultate möglich.

746. Fig. 90. Aufgabe. Gegeben L ∥ L', P in L, P' in L', und P''; man soll durch P'' eine nicht PP' treffende Linie P''XY ziehen, welche PY — P'X = d abschneidet.

Analysis. Zieht man P'K ∥ XY, so bestimmt sich PK = d, folglich mittelst der → P'K auch die Lage von P''XY.

Determination. Es bestimmt sich keine Grenze, wenn P'' außer L u. L' liegt. P'' innerhalb L und L' giebt, sobald man P und P' wie in der Anmerkung zu 744 feststellt, die größere von den beiden Linien PP und P'P' als Grenze für d.

Zusatz. Es sind bei jeder Lage von P'' zwei Resultate möglich.

747. Fig. 90. a. Aufgabe. (Dem Schüler später mitzutheilen.) Gegeben L ∥ L', P in L, P' in L', und P''; man soll durch P'' eine PP' treffende Linie P''XY ziehen, welche PY — P'X = d abschneidet.

Analysis 1). Setzt man PH = d ch, so ergäbe sich PY — P'X = d, wenn P'X = YN wäre. Da nun zugleich P'X ≠ YN ist, so fände jenes statt, wenn man △ P'HX ≅ △ YHN, also P'H = HN hätte. Punkt H ist aber gegeben, folglich läßt sich auch die Lage von P''X bestimmen.

Analysis 2). Da ▱ PYP'X ein ▭ ist, muß nach 172. b. die Verbindungslinie GH der Mitten beider Diagonalen PP' und XY $= \frac{PY - P'X}{2} = \frac{d}{2}$ sein, wonach sich H als zweiter Punkt der gesuchten Linie ergiebt.

Determination. Die Lage von P'' zwischen L u. L' bestimmt ebenfalls keine Grenzen wie in 746. Liegt aber P'' außerhalb L und L', so bildet nur die größere von den beiden Linien PP und P'P eine Grenze.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

748. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY durch P legen, deren ⊥ Abstände von P' und P'' einander ⇌ werden. (P'D = P''E)

Analysis, Lage 1. Fig. 153. XY schneidet die Verbindungslinie von P' und P''.

Die entstehenden △△ sind ≅, es bestimmt also die Mitte von P'P'' einen zweiten Punkt der gesuchten Linie.

Lage 2. XY schneidet nicht die Verbindungslinie von P' und P''.

Aus der Bedingung der gleichen Entfernung folgt, daß XY ∦ P'P'' fallen muß.

749. Fig. 153. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine P'P'' treffende Linie XY so durch P ziehen, daß sich die Summe der aus P' und P'' auf XY gefällten ⊥⊥ = s ergiebt. (P'D + P''E = s)

Analysis. Verlängert man den aus P' auf XY gefällten ⊥, und zieht durch P'' zu XY eine ∥, so bestimmt sich ein △, dessen Hypotenuse P'P'', und eine Kathete s ist u. s. w.

Anmerkung. Die Grenzen für s und t in diesen und den folgenden analogen Aufgaben bestimmen sich durch die Stücke des △ PP'P", nämlich entweder durch P'P", oder die beiden P' und P" treffenden Höhen, oder die P durchschneidende Transversale. Die Determination kann verschieden ausfallen, wenn man denselben ∠ bei P' oder P" stumpf oder spitz annimmt.

750. Fig. 154. Aufgabe. (Dem Schüler später mitzutheilen.) Gegeben P, P', P"; man soll eine P'P" nicht treffende Linie XY so durch P ziehen, daß sich die Summe der aus P' und P" auf XY gefällten ⊥⊥ = s ergiebt. (P'X + P"Y = s)

Analysis. XY bildet mit den beiden ⊥⊥ ein ▭, man kennt also die Mittellinie HI nach 172. a. $= \frac{s}{2}$, wodurch sich ein △ HPI mit dieser Kathete bildet, dessen Hypotenuse die von P ausgehende Transversale PH des △ PP'P" ist. Die Konstruktion dieses △ bestimmt die Lage von XY.

751. Fig. 153. a. Aufgabe. Gegeben P, P', P"; man soll eine P'P" nicht treffende Linie XY so durch P ziehen, daß sich die Differenz der aus P' und P" auf XY gefällten ⊥⊥ = d ergiebt. (P"E — P'D = d)

Analysis. Zieht man durch P' (oder P") eine ∥ zu XY, so bestimmt sich ein △, dessen eine Kathete d und die Hypotenuse P'P" ist.

Anmerkung. Die Aufgabe ist eine Analogie zu 749, insofern durch dieselbe Auflösung sich zu einander ⊥ stehende Lagen für XY ergeben.

752. Fig. 154. a. Aufgabe. (Dem Schüler später mitzutheilen.) Gegeben P, P', P"; man soll eine P'P" treffende Linie XY so durch P ziehen, daß sich die Differenz der aus P' und P" auf XY gefällten ⊥⊥ = d ergiebt. (P"Y — P'X = d)

Analysis. XY bildet mit den beiden ⊥⊥ ein ▭, dessen Diagonale P'P" ist; man kennt also nach 172. b. den

auf XY aus der Mitte von P'P'' gefällten ⊥ HI = $\frac{d}{2}$.

Nun ist aber auch die Verbindungslinie dieser Mitte H von P'P'' mit P gegeben, folglich läßt sich durch die Konstruktion eines △ HPI die Lage von XY feststellen.

Anmerkung. Die Aufgabe ist eine Analogie zu 750.

753. Fig. 153. a) Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß die Summe der ⊥ Abstände dieses Punkts von den auf XY aus P' und P'' gefällten ⊥⊥ als eine einzige gerade Linie genommen, die Länge s erhält. (PD + PE = s).

Analysis. Ergiebt sich in derselben Art wie in 751.

Anmerkung 1). XY kann sich PP' schneidend oder nicht schneidend, oder durch zwei Resultate beides zugleich ergeben.

Anmerkung 2). Die Aufgabe bildet eine Analogie zu 749.

754. Fig. 155. Aufgabe. (Dem Schüler später mitzutheilen.) Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß die Summe der ⊥ Abstände dieses Punkts von den auf XY aus P' und P'' gefällten ⊥⊥, zwischen welche P nicht fallen soll, die Länge s erhält.

Analysis. PX + PY soll = s sein. Errichtet man auf XY in P einen ⊥, und fällt auf denselben aus P' und P'' die ⊥⊥ P'S und P''N, so ergiebt sich deren Summe = PX + PY = s, womit die Aufgabe auf 750 reducirt ist, und deshalb nach vollendeter Konstruktion von 750 ein in P auf die erhaltene Lage errichteter ⊥ die gesuchte Linie XY bestimmen muß.

Anmerkung 1). Es gilt auch hier die Anmerkung 1) 753.

Anmerkung 2). Die Aufgabe ist eine Analogie zu 750.

755. Fig. 153. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß die Differenz der ⊥ Abstände dieses Punkts von den auf XY aus P' und P'' gefällten ⊥⊥, zwischen welche P nicht fallen soll, sich = d ergiebt. (PE — PD = d).

Analysis. Zieht man zu XY durch P'' (oder P') eine ∥, so bestimmt sich ein △, dessen eine Kathete d, und die Hypotenuse P'P'' ist.

Anmerkung 1). Es gilt auch hier die Anmerkung 1) 753.

Anmerkung 2). Die Aufgabe ist eine Analogie zu 753, und deshalb auch zu 749.

756. Fig. 155. a. Aufgabe. (Dem Schüler später mitzutheilen.) Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß die Differenz der ⊥ Abstände dieses Punkts von den auf XY aus P' und P'' gefällten ⊥⊥, zwischen welche P fallen soll, die Länge d erhält.

Analysis. PX — PY soll = d sein. Errichtet man auf XY in P einen ⊥, und fällt auf denselben aus P' und P'' die ⊥⊥ P'S und P''N, so ergiebt sich deren Differenz = PX — PY = d, womit die Aufgabe auf 752 reducirt ist, und deshalb nach vollendeter Konstruktion von 752 ein in P auf die erhaltene Lage errichteter ⊥ die gesuchte Linie XY bestimmen muß.

Anmerkung 1). Es gilt auch hier die Anmerkung 1) 753.

Anmerkung 2). Die Aufgabe ist eine Analogie zu 754, und deshalb auch zu 750.

757. Fig. 156. u. 156. a. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die ⊥ Abstände dieses Punkts von den aus P' und P'' auf XY gefällten ⊥⊥ gleich groß ergeben. (PX = PY).

Analysis 1). Verlängert man P'X und P''P bis zu ihrem Durchschnittspunkt G, so wäre PX = PY, wenn man △ XPG ≅ △ YPP'' hätte. Dazu müßte aber P''P = PG sein. Bestimmt man folglich G nebst P'G, so muß sich auch die Lage von XY als ⊥ auf GP' ergeben.

Analysis 2). Legt man durch P eine ∓ PH zu den ⊥⊥, und durch P' und H ∓∓ zu XY, so hätte man PX = PY, wenn P'I = HN wäre; und dies fände statt, wenn sich △ P'IH ≅ △ HNP'', also auch P'H = P''H bestimmte. Nun ist aber H und PH gegeben, folglich auch die Lage von XY ⊥ PH bestimmbar. (Einfacher ergiebt sich diese Analysis durch Hilfe der Proportionen. Vergl. 436.)

Anmerkung. Die zur Analysis 2) gehörende Auflösung stimmt ganz mit 756 überein, da hier nur d = 0 ist, folglich Fig. 455. a, O in Q fällt.

758. Aufgabe. Es ist ein festliegendes △ gegeben; man soll in demselben eine ∓ XY zu einer Seite a ziehen, welche dem in C anfangenden Abschnitt CX gleich wird.

Analysis. Da XY = CX, und XY ∓ BC sein soll, ergiebt sich, wenn man CY zieht, durch Vergleichung der entstehenden ∠, daß Y in der Halbirungslinie des ∠γ liegen muß.

Anmerkung. Warum kann XY nicht dem andern Abschnitt von b gleich werden?

759. Aufgabe. Gegeben L, L' und P in L; man soll eine Linie XY = XP mit gegebener → zwischen L und L' legen.

Analysis. Stimmt mit 758 überein.

760. Fig. 157. Aufgabe. Es ist ein festliegendes △ gegeben; man soll in demselben eine ∓ XY zu einer Seite a ziehen, welche = CX + BY wird.

Analysis. Es wird ein Theil von XY, z. B. XU = XC, der andere YU = YB sein müssen; schließt man

daher wie in 758, so ergiebt sich U als Durchschnittspunkt von den Halbirungslinien des $\measuredangle \beta$ und γ.

Anmerkung. U ist also der Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$.

761. Fig. 157. Aufgabe. Es ist ein festliegendes $\triangle$ gegeben; man soll $X'Y' \fallingdotseq$ zu a so zwischen die Verlängerungen von b und c legen, daß $BY' + CX' = X'Y'$ wird.

Analysis. Verfährt man analog 760, so bestimmt sich ein Punkt U' von $X'Y'$ als Durchschnittspunkt von den Halbirungslinien der Neben$\measuredangle$ zu β und γ.

Anmerkung. U' ist der Mittelpunkt des $\odot$ am $\triangle$, welcher a nebst den Verlängerungen von b und c berührt.

762. Fig. 157. a. Aufgabe. Es ist ein festliegendes $\triangle$ gegeben; man soll in demselben eine $\fallingdotseq XY$ zu a ziehen, welche sich $= CX - BY$ ergiebt.

Analysis. Den Bedingungen gemäß wird es analog 760 und 761 in der Verlängerung von XY einen solchen Punkt U geben müssen, daß $XU = XC$, $YU = YB$ sein wird; schließt man nun in Beziehung auf beide $\triangle\triangle$ wie in 758, so ergiebt sich U als Durchschnittspunkt der Halbirungslinien des $\measuredangle \gamma$ und des Neben$\measuredangle$ von β.

Anmerkung. U ist der Mittelpunkt des $\odot$ am $\triangle$, welcher c nebst den Verlängerungen von a und b berührt. Benutzt man in derselben Art den Mittelpunkt des $\odot$ am $\triangle$, welcher b nebst den Verlängerungen von a und c berührt, so ergiebt sich ebenfalls eine der Aufgabe genügende Linie $X'Y'$, welche aber in den Scheitel$\measuredangle$ von α fällt.

763. Aufgabe. Gegeben L und L'; man soll die Lage der Halbirungslinie des $\measuredangle$ (LL') bestimmen, ohne den Scheitel desselben zu benutzen.

Analysis. Die $\rightarrow$ der verlangten Linie wäre gefunden, wenn man den $\measuredangle$ (LL') in derselben Lage wie am Durchschnittspunkt von L u. L' zeichnen könnte, da man diesen $\measuredangle$ nur zu halbiren hätte. Dieser $\measuredangle$ kann aber durch jede

[illegible] L schneidende ⧺ zu L' bestimmt werden, folglich ist nur noch die Lage der gesuchten Halbirungslinie festzustellen. Diese ergiebt sich nun schließlich durch die Mitte irgend einer von L und L' begrenzten Linie, welche ⊥ auf der gefundenen → steht.

764. Aufgabe. Gegeben L, L' und P; es soll ohne den Scheitel des ∠ (LL') zu benutzen die Verbindungslinie desselben mit P gezeichnet werden. (Vergl. 541.)

Analysis. Fig. 158. Fall 1) P liegt zwischen L und L'. Durch P, L und L' sind die ⧺⧺ PA zu L', und PB zu L, also auch die Diagonale AB des ▱ AB mitgegeben; nun bildet aber die gesuchte Linie PX die zweite Diagonale, folglich ist ein zweiter Punkt C von PX als Mitte von AB, und damit auch die geforderte Lage von PX bestimmbar.

Fall 2.) P liegt außerhalb L und L'. Es bildet sich eine Analogie zu Fall 1). Die Analysis desselben paßt wörtlich, wenn man L' über X hinaus verlängert.

765. Aufgabe. P und P' sind auf derselben Seite einer Linie L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß PX und P'X mit dieser Linie = ∠ bilden.

Analysis. Siehe g. Betr. §. 13. Dort ergab sich, daß der ⊥ aus P auf L um sich selbst verlängert, und der Endpunkt der Verlängerung mit P' verbunden werden muß. (Vergl. 475.)

766. Fig. 94. Aufgabe. P und P' sind auf verschiedenen Seiten einer Linie L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß PX und P'X mit L = ∠ bilden.

Auflösung. Die Verbindungslinie von P und P' bestimmt den gesuchten Punkt X' so in L, daß sich die gleichen ∠ als Scheitel ∠ ergeben. Es ergiebt sich aber auch ein zweiter Punkt X so in L, daß die gleichen ∠ L zum gemeinschaftlichen Schenkel erhalten, wenn man analog 765 den ⊥

P'D auf L bis E um sich selbst verlängert, und EP bis L auszieht. (Vergl. 476.)

Determination. Die Angabe eines zweiten Punktes X außer X' wird unmöglich, wenn P'D = PC ist. Fiele P' in E, so wäre die Aufgabe unbeschränkt unbestimmt.

767. Fig. 95. Aufgabe. Gegeben L, L' (z. B. L ⊥ L' oder ≠), und P und P' zwischen beiden Linien; man soll X in L und X' in L' so bestimmen, daß die gebrochene Linie PXX'P' an L und L' in X und X' gleiche ∠ bildet. (Vergl. 477).

Analysis. Verlängert man XX' nach beiden Seiten, und die auf L und L' aus P und P' gefällten ⊥⊥, so ergeben sich nach 765 die Punkte G und E, bezüglich von L' und L eben so weit entfernt als die Punkte P' und P, wonach sich also EG, und damit die gesuchten beiden Punkte bestimmen lassen.

768. Aufgabe. Gegeben L, L', P zwischen, und P' außerhalb L und L'; man soll X in L, und X' in L' so bestimmen, daß die gebrochene Linie PXX'P' mit L und L' in X und X' gleiche ∠ bildet.

Analysis. Folgt wie in 767 aus 766 und 765.

769. Aufgabe. Gegeben L, L', P und P' beide im erhabenen ∠ (LL'); man soll X in L, und X' in L' so bestimmen, daß die gebrochene Linie PXX'P' sowohl in X als in X' mit jeder der gegebenen Linien zwei = ∠ bildet, welche diese Linien zum gemeinschaftlichen Schenkel erhalten.

Analysis. Folgt wie in 767 aus 766.

Auflösung. Es paßt die Auflösung von 767 wörtlich auch für diese Aufgabe.

770. Fig. 159. Aufgabe. Gegeben L, L', L'' (z. B. L ⊥ L' ⊥ L''), P und P' beide zwischen diesen Linien; man soll X in L, X' in L', X'' in L''

so bestimmen, daß die gebrochene Linie PXX'X''P' an L, L', L'' in X, X', X'' = ∠ bildet.

Analysis. Verlängert man X''X' über X', X'X über X, so bestimmen sich die Punkte A, B, C, bezüglich von L, L', L'' eben so weit entfernt, als die Punkte P, A, B, von denselben Linien, wodurch die Auflösung abgeleitet werden kann.

Auflösung. Fälle aus P einen ⊥ auf L, und verlängere denselben um sich selbst, so ergiebt sich A; fälle einen zweiten ⊥ aus A auf die folgende Linie L', und verfahre wie vorher, so bestimmt sich B; fälle einen dritten ⊥ aus B auf die folgende Linie L'', und verfahre abermals wie vorher, so bestimmt sich C. CP' bestimmt hierauf X'', X''B den Punkt X', und X'A endlich den letzten Punkt X.

Anmerkung. Fig. 159. a zeigt die Anwendbarkeit derselben Auflösung, wenn L ∦ L' ∦ L'' ist.

771. Aufgabe. Es sind vier ein Rechteck bildende Linien L, L', L'', L''' (Billard) und innerhalb desselben zwei Punkte P und P' gegeben; man soll X in L, X' in L', X'' in L'', X''' in L''' so bestimmen, daß die gebrochene Linie PXX'X''X'''P' an L, L', L'', L''' gleiche ∠ bildet.

Auflösung. Zunächst ergiebt sich dieselbe ganz wie in 770, aus C muß aber noch ferner ein ⊥ auf die folgende Linie L''' gefällt, und um sich selbst verlängert werden, dann bestimmt sich ein neuer Punkt D, welcher mit P' verbunden X''' ergiebt; X'''C bestimmt ferner X'', X''B den Punkt X', und X'A endlich den letzten Punkt X.

772. Aufgabe. Es sind 2 Punkte P, P' und eine beliebige Menge von Linien L, L', L'', L''', L^{IV} . . . . gegeben; man soll X in L, X' in L', X'' in L'' u. s. w. so bestimmen, daß die gebrochene Linie PXX'X''X'''X^{IV} . . . . P' mit L, L', L'' . . . . gleiche ∠ bildet.

Auflösung. Diese ergiebt sich ganz wie in 770 und 771; wenn man die Auflösung für die übrigen Linien fortsetzt.

Da aber die Lage von P und P' beliebig vorausgesetzt ist, kann sich die Auflösung noch 766 zum Theil ändern.

773. Fig. 31. Lehrsatz. Wenn aus zwei auf einer Seite einer Linie L liegenden Punkten A und B, in L zusammentreffende Linien gezogen werden, so erhält man an der Summe derjenigen beiden Linien, welche mit L = ∠ bilden ein Minimum.

Voraussetzung. ∠ AXC = ∠ BXD.

Behauptung. AX + BX ist ein Minimum.

Beweis. Verlängert man BX bis zum Schnitt E mit einem aus A auf L gefällten ⊥, und zieht nach X', X'' &c. andere Paare von Linien, so muß, da sich AC = CE bestimmt, AX = XE, AX' = X'E, AX'' = X''E u. s. w. sein. Nun ist aber BX' + X'E sowohl, als BX'' + X''E u. s. w. > BE, folglich hat man auch BX' + X'A und BX'' + X''A u. s. w. > BX + XA, w. z. b. w.

774. Fig. 94. Lehrsatz. Wenn aus zwei, auf verschiedenen Seiten einer Linie L liegenden Punkten P und P', in L zusammentreffende Linien gezogen werden, so erhält man an der Differenz derjenigen beiden Linien, welche mit L 2 und ∠ bilden, deren gemeinschaftlicher Schenkel dieselbe Linie ist, ein Maximum.

Voraussetzung. ∠ PXC = ∠ P'XC.

Behauptung. P'X − PX ist ein Maximum.

Beweis. Verlängert man PX bis zum Schnitt E mit einem aus P' auf L gefällten ⊥, und zieht nach X', X'' &c. andere Paare von Linien, so muß, da sich P'D = DE bestimmt, P'X = XE, P'X' = X'E, P'X'' = X''E u. s. w. sein. Nun ist aber EX' − PX' sowohl, als PX'' − EX'' u. s. w. < EP oder EX − PX, folglich hat man auch P'X' − PX', PX'' − P'X'' u. s. w. < als P'X − PX.

774. a. Aufgabe. Gegeben P, und P' auf der andern Seite von L; man soll das Maximum der

Differenz zweier aus P und P′ nach einem Punkte in L führenden Linien bestimmen.

Auflösung. Verlängert man PP′ bis L so bestimmt der Durchschnittspunkt D mit L das gesuchte Maximum, da sich DP — DP′ = PP′ ergiebt, jeder andere Punkt X in L aber XP — XP′ < PP′ bestimmt.

773. Lehrsatz. Von den Umfängen aller ≡ △△, welche über derselben Grundlinie konstruirt werden können, ist der Umfang des △ ein Minimum.

Beweis. Da die Seiten des △ mit der zur Grundlinie gezogenen ⫩, in welche die Spitzen aller ≡ △△ fallen, zwei gleiche ∠ bilden, muß der Umfang desselben nach 773 ein Minimum sein.

776. Lehrsatz. Wenn (b + c) oder (b — c), a, β in einem △ dieselbe Größe haben wie in einem anderen, so müssen beide △△ ≅ sein.

Beweis. Benutze 130 oder 138.

777. Lehrsatz. Wenn der Umfang und die ∠ eines △ einzeln genommen dieselbe Größe haben wie in einem andern, so müssen beide △△ ≅ sein.

Beweis. Benutze die Konstruktion für 647.

778. Lehrsatz. Von den Flächen aller △△ mit denselben Seiten a und b ist die Fläche des ◺, dessen Katheten jene Seiten bilden, ein Maximum.

Beweis. Beim ◺ ist, a als Grundlinie angesehen, h = b, bei jedem anderen △ aber h < b, folglich hat das erstere die größte Fläche.

779. Aufgabe. Eine Linie 2a so in zwei Stücke zu theilen, daß ein aus denselben gezeichnetes ▭ das Maximum der Flächen aller ▭▭ ist, welche aus zwei Stücken derselben Linie gebildet werden können.

Analysis. Entweder sind die Stücke, in welche 2a zu theilen ist, gleich oder ungleich. Im ersteren Fall ist das

□ ein ⧈ über a; im zweiten wird die eine Seite sowie über a halten, als die andere unter a, d. h. die eine $(a + x)$, die andere $(a - x)$ sein. Nach 205 ist aber das □ aus $(a + x)$ und $(a - x) = a^2 - x^2$, also $< a^2$. Hieraus folgt, daß ein über der Hälfte der gegebenen Linie gebildetes ⧈ das größte aller □□ mit demselben Umfange $4a$ ist.

II. B. Zweiter Abschnitt.

Aufgaben, welche durch die Lehre vom Kreise ohne Proportionen lösbar sind.

1stes Kapitel.

Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben.

780. Aufgabe. △ aus t, h, r.

Analysis. t und h bestimmen ein ◺, durch welches sich die Lage und die Mitte von a ergiebt. Hiemit hat man aber zunächst den Ort 72, und ferner die Kreislinie um A mit r zur Feststellung des zu r gehörigen Mittelpunkts.

781. Aufgabe. △ aus einer festliegenden Seite a, dem ∠ α, und einem Ort L für die Spitze A.

Auflösung. Folgt aus 320.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

782. Aufgaben. △ aus a, r, b.
△ aus a, r, β.

Zusatz. Es sind bei der ersten Aufgabe sowohl, als bei der zweiten 2 verschiedene Resultate möglich.

783. Aufgaben. △ aus a, r, t.
△ aus a, α, t.

Analysis. Folgt aus 320 und 321.

Zusatz. Es sind bei △ aus a, r, t vier Resultate möglich, von denen je zwei ≅ sein müssen. △ aus a, α, t kann zwei ≅ Resultate geben.

784. Aufgaben. △ aus b, r, $(\beta - \gamma)$.

△ aus c, r, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Nach 321 erhält man β oder γ, und deshalb nach 100 β und γ u. s. w.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich. Siehe Zusatz 324.

785. Aufgabe. △ aus a, ϱ.

Analysis. Die von A zum ⊙ führenden Berührungslinien sind gleich. Da nun die Seiten ebenfalls gleich sind, müssen dieses auch die Reste sein, weshalb also der Berührungspunkt a halbirt, und durch Hilfe von ϱ der Mittelpunkt festgestellt werden kann. Zum Schluß muß 272 angewendet werden.

786. Aufgabe. △ aus α, β, r.

Analysis. Folgt aus 321.

787. Aufgabe. △ aus a, r, h.

Analysis. Folgt aus 79.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich, von denen je 2 ≅ sein müssen.

788. Aufgaben. △ aus a, α, h.

△ aus c, h″.

Analysis. a und α bestimmen nach 320 mittelst r einen Ort für A, a und h aber nach 79 den zweiten. Hienach läßt sich das verlangte △ ABC feststellen.

Zusatz. Es sind 2 ≅ Resultate möglich.

789. Aufgabe. △ aus α, h, r.

Analysis. Führt mittelst 321 zu 788.

790. Aufgabe. △ aus p, q, α.

Analysis. (p + q) und α geben einen Ort für A nach 320, durch p und q läßt sich aber auch die Lage von b, also ein zweiter Ort für A, und hiedurch das verlangte △ ABC feststellen.

791. Aufgabe. △ aus a, c, ∠ (tb).

Analysis. $\frac{a}{2}$ und ∠ (tb) bestimmen nach 320 einen, c den anderen Ort für A.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

792. Aufgabe. △ aus a, h, ∠ (tb).

Analysis. $\frac{a}{2}$ und ∠ (tb) bestimmen nach 320 einen, a und h nach 79 den anderen Ort für A.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

793. Aufgaben. △ aus a, h', r.
△ aus α, h', r.

Analysis. Führt durch 114 zu 782.

794. Aufgaben. △ aus γ, r, (b + c).
△ aus γ, r, (b − c).

Analysis. γ und r bestimmen c nach 321, c und (b ± c) aber nach 100 b und c.

795. Aufgaben. △ aus α, r, (b + c).
△ aus α, r, (b − c).

Analysis. α und r bestimmen a nach 321; man hat also △ aus α, a, (b + c), oder α, a, (b − c) zu konstruiren; siehe 642 und 643.

796. Aufgaben. △ aus a, r, (b + c).
△ aus a, r, (b − c).

Analysis. a und r bestimmen nach 321 α oder 2R − α; man hat also 642 oder 643 zu konstruiren.

Zusatz. Da der Gegen∠ von a doppelt bestimmt werden kann, sind bei der ersten Aufgabe vier Resultate möglich, von denen je 2 ≅ sein müssen; bei der zweiten Aufgabe sind 2 verschiedene Resultate möglich.

797. Aufgabe. △ aus α, m, ϱ.

Analysis. α und ϱ bestimmen mittelst eines ◺, dessen eine Kathete ϱ und ein ∠ $\frac{\alpha}{2}$ ist, die Lage von A. Hierdurch ergiebt sich aber auch der zweite Endpunkt und die Lage von m, weshalb man nur schließlich durch den letztgenannten

Endpunkt eine Tangente an den mit ϱ beschriebenen $\odot$ zu legen hat, um $\triangle ABC$ festzustellen.

Zusatz. Es sind zwei $\leqq 2$ Resultate möglich.

798. Aufgabe. $\triangle$ aus a, β, ϱ.

Analysis. Durch $\frac{\beta}{2}$ und ϱ bestimmt sich wie in 797 ein Endpunkt B und die Lage von a, woraus sich das $\triangle ABC$ ableiten läßt.

799. Aufgabe. $\triangle$ aus a, h', ϱ.

Analysis. a und h' bestimmen γ, siehe 114; man hat also $\triangle$ aus a, γ, ϱ (798) zu verzeichnen.

800. Aufgabe. $\triangle$ aus α, h'', ϱ.

Analysis. α und h'' bestimmen b nach 114; man hat also 799 zu verzeichnen.

801. Fig. 47. Aufgabe. $\triangle$ aus α, a, $\rightarrow a$ in $\triangle NOQ$.

Analysis. B und C bestimmen sich durch a und $\rightarrow a$ nach 94. A ergiebt sich schließlich doppelt durch BC und α nach 320.

802. Fig. 166. Aufgabe. $\triangle$ aus α, h, $\rightarrow a$ um $\triangle NOQ$.

Analysis. N, O und α geben nach 320 einen Ort für A, h und die Lage von a aber, welche durch Q mit $\rightarrow a$ bestimmt ist, nach 79 den zweiten Ort, weshalb A und hierdurch $\triangle ABC$ festgestellt werden kann.

Determination. h muß $>$ sein als der kürzere von den aus N und O auf a gefällten $\perp\perp$.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

803. Fig. 160. Aufgabe. $\triangle$ aus β, γ, um $\triangle NOQ$, daß h durch P läuft.

Analysis. Durch β und γ sind als Komplemente die $\measuredangle PAO$ und PAN gegeben. Mittelst dieser $\measuredangle$ und ihren Gegenseiten PO und PN lassen sich aber über diesen Linien nach 320 zwei A bestimmende Kreisörter zeichnen; folglich sind die Lagen von b, h, c bestimmt, und man hat schließlich

zur Vollendung des gesuchten △ ABC nur aus Q einen ⊥ auf die Lage h zu fällen.

803. Aufgabe. △ aus α, a, (b^2+c^2).

Analysis. A bestimmt sich durch die beiden Oerter 220 und 320.

Zusatz. Es ergeben sich $2 \cong \triangle\triangle$.

804. Aufgabe. △ aus a, α, (b^2-c^2).

Analysis. A bestimmt sich durch die beiden Oerter 211 und 320.

805. Aufgabe. △ aus α, r, $(a+b+c)$.

Analysis. α und r bestimmen a nach 321, a und $(a+b+c)$ aber $(b+c)$; man hat also △ aus a, α, $(b+c)$ (g. Betr. §. 15.) zu konstruiren.

806. Aufgabe. △ aus a, r, t'.

Analysis. 1) Durch a und r ergiebt sich nach 321 α, t' und α bestimmen nach 320 einen Ort für A. Da sich nun zugleich um B eine Kreislinie mit a beschreiben läßt, hat man wie in der Aufgabe 337. a. zur Feststellung von b zu verfahren, um diese Seite durch den Endpunkt von t' halbirt zu erhalten.

Analysis 2.) Fig. 161. Verlängert man t' um sich selbst $=$ ED, und vollendet das ▱, so hat man ∠ ECD $=\alpha$, welcher ∠ sich nach 321 durch a und r ergiebt; folglich ist nach 320 ein Ort für C gegeben; ein zweiter Ort bestimmt sich aber durch die um B mit a beschriebene Kreislinie; es lassen sich also die Punkte C, D, E feststellen, und deshalb auch das △ ABC konstruiren.

Analysis 3.) Durch den Ort 331, siehe in dem g Betr. §. 10., ergiebt sich die beste Auflösung.

Determination ꝛc. Siehe g. Betr. §. 10.

807. Aufgaben. △ aus a, α, t'.

△ aus c, t'.

Analysis. Siehe Analysis 2) 806.

808. Aufgabe. △ aus α, r, t'.

Analyſis. Durch α und r beſtimmt ſich a; man hat alſo Aufgabe 806 zu löſen.

809. Fig. 162. Aufgabe. △ aus c, h″, ∠ (tb).

Analyſis. Bildet man nach 123 das zum △ gehörende ▱, ſo iſt ∠ ADB = ∠ (tb); folglich △ ADB aus AB = c, CG = h″ und ∠ ADB, ſiehe 788, zu zeichnen.

810. Fig. X. Aufgabe. ▱ aus α, c′, h.

Analyſis. Durch c′ und DF oder h iſt das △ CDF bekannt, welches feſtgelegt werden kann. In der Kathete CF liegt der Scheitel B des ∠ ABD = α = ∠ CAB, deſſen Schenkel durch D und die Mitte E von c′ laufen: alſo reduzirt ſich die Aufgabe auf 781.

810. a. Fig. X. Aufgabe. ▱ aus a, h, ∠ (cc′).

Analyſis. Legt man h ⊥ a durch E, ſo ergiebt ſich die Höhe des △ CEB = $\frac{h}{2}$; die Grundlinie a und deren Gegen∠ (cc′) ſind aber gegeben; man hat alſo 788 zu konſtruiren.

811. Aufgabe. △ aus α und den beiden Abſchnitten g und i, welche ſich durch m in a beſtimmen.

Analyſis. m halbirt den Gegen∠ α von g + i, beſchreibt man alſo über i den Ort für A, welchen $\frac{\alpha}{2}$ nach 320 beſtimmt, und wiederholt daſſelbe über g, ſo ergiebt ſich A, und hiedurch △ ABC.

812. Aufgabe. △ aus r und den beiden Abſchnitten g und i, welche ſich durch m in a beſtimmen.

Analyſis 1.) Die Kreislinie mit r, und a = g + i liegen feſt, es kömmt alſo nur darauf an: durch den Punkt in a, wo g und i zuſammenſtoßen, eine Linie zu legen, welche den Gegen∠ α von a halbirt. Dieſe Hilfsaufgabe iſt aber leicht gelöſt, wenn man bedenkt, daß ſich alle Halbirungslinien der Peripherie ∠ α in der Mitte des zu a gehörenden Bogens vereinigen.

Analysis 2.) Folgt aus 811.

813. Aufgabe. △ aus h, m, ϱ.

Analysis. h und m bestimmen ein ◺. Hat man dasselbe gezeichnet, so kömmt es nur darauf an: zwischen m und die gefundene Kathete, ⊥ zu der letzteren, ϱ zu schieben, welches nach 79 geschehen kann. Zum Schluß hat man noch zur Feststellung des △ ABC, aus A an den mit ϱ beschriebenen ⊙ zwei Berührungslinien zu ziehen.

814. Aufgabe. △ aus h, ϱ, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Durch h und $\frac{(\beta-\gamma)}{2}$ bestimmt sich m nach 146; man hat also 813 zu verzeichnen.

815. Aufgabe. △ aus m, ϱ, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Durch m und $\frac{(\beta-\gamma)}{2}$ bestimmt sich h nach 146; man hat also 813 zu verzeichnen.

816. Aufgabe. ◺ aus ϱ, (a+b+c).

Analysis. Durch ϱ und (a+b+c) ist c, also auch (a+b) nach 347 bekannt; man hat also ◺ aus c, (a+b), siehe 132, zu konstruiren.

817. Aufgabe. ◺ aus r, ϱ.

Analysis. Nach 347 hat man durch r und ϱ auch (a+b+c), es ist also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

818. Aufgabe. ◺ aus (a+b), ϱ.

Analysis. Nach 345 ist $2c+2\varrho = a+b+c$, also $c = (a+b) - 2\varrho$; man hat folglich ◺ aus c, (a+b), siehe 132, zu konstruiren.

819. Fig. VIII. Aufgabe. △ aus α, t'.

Analysis. Vollendet man das zum △ ABC gehörende ▱ nach 123, so hat man einen Ort für A nach 320 durch t' und α, derselbe Ort ergiebt sich aber noch durch die Verlängerung von $t' = t'$ und den Gegen∠ $\frac{2R-\alpha}{2}$; es läßt sich also A, und damit auch das verlangte △ ABC feststellen.

820. Aufgabe. △ aus β, γ, t.

Analysis. Siehe g. Betr. §. 23.

821. Aufgabe. △ aus α, h, ϱ.

Analysis. Schiebt man den ⊙ mit ϱ zwischen die Schenkel des ∠ α nach 306, so bestimmt sich die Lage von A, und die Kreislinie um A mit h; es ist also nur die Hilfsaufgabe 318 anzuwenden, um schließlich die Lage der Seite a festzustellen.

822. Aufgabe. △ aus a, α, ϱ.

Analysis. Schiebt man den ⊙ mit ϱ zwischen die Schenkel des ∠ α nach 306, so hat man noch die Hilfsaufgabe 375 anzuwenden, um a, und damit △ ABC festzustellen. (Vergl. U. d. A. §. 22.)

823. Aufgabe. △ aus α, r, ϱ.

Analysis. α und r bestimmen a nach 321; man hat also △ aus a, α, ϱ (822) zu verzeichnen.

824. Fig. 163. Aufgabe. △ aus a, r, ϱ.

Analysis durch Oerter. Trägt man a in den mit r beschriebenen ⊙ als Sehne ein, so bestimmt sich durch a und r ein Ort für den Mittelpunkt des ⊙ im △ nach 325; ein zweiter Ort für denselben Punkt ergiebt sich aber durch a und ϱ nach 79, weshalb dieser Punkt nebst dem ⊙ mit ϱ festgestellt werden kann, und sich die Lage vom m durch den Mittelpunkt des konstruirten Orts, also auch der dritte Punkt A des △ ABC ergiebt.

Auflösung. Trage BC = a als Sehne in den mit r beschriebenen ⊙, zeichne BD = DC, beschreibe um D mit DC eine Kreislinie, ziehe eine um ϱ entfernte ∦ QN zu a, verbinde D mit dem Durchschnittspunkt M der ∦ und des Kreisorts, und verlängere diese Linie bis A, so bildet ABC das geforderte △.

Beweis. △ ABC enthält r und a; es ist daher nun zu zeigen, daß der ⊙ mit ϱ, außer BC oder a, auch AB und AC berührt. Nun ist ∠ BAC durch DA halbirt, da BD =

DC ist. Ferner hat man $\angle BCM = \angle DCM - \angle DCB$,
und $\angle ACM = \angle DMC - \angle DAC$,

folglich muß $\angle BCM = \angle ACM$, also
$\angle BCA$ durch MC halbirt sein, da sowohl
$\angle DCM = \angle DMC$, als
auch $\angle DCB = \angle DAC$ ist.

Da aber die $\measuredangle$ α und γ durch MA und MC halbirt sind, berührt auch der BC tangirende $\odot$ um M mit ϱ die Seiten AC und AB, w. z. b. w.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich, insofern D sowohl auf der einen als der anderen Seite von BC bestimmt werden kann, und die $\doteq$ QN den um D beschriebenen $\odot$ zweimal schneidet. Je zwei dieser Resultate, welche durch die $\doteq$ entstehen, sind aber $\cong$.

2tes Kapitel.

Vierecks-Aufgaben aller Art.

825. Fig. 164. Aufgabe. $\square$ aus a, b, e, $\angle$ (ce'), $\angle$ (de').

Analysis 1.) a, b und e bestimmen ein $\triangle$; der vierte Punkt D ergiebt sich, da a und $\angle$ (de') den einen, b und $\angle$ (ce') aber den zweiten Ort für D nach 320 bestimmen.

Analysis 2.) e und $\angle$ (ce') $+$ $\angle$ (de') bestimmen nach 320 den $\odot$ ums $\triangle$ ADC, also einen Ort für B. $\triangle$ AHC ist aber durch AC $=$ e, $\angle$ ACH $=$ $\angle$ (de'), u. $\angle$ CAH $=$ $\angle$ (ce') konstruirbar, folglich ergiebt sich mittelst des Punktes H die Lage von BH als zweiter Ort für D, und damit auch das $\square$ ABCD.

Anmerkung 1.) Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn H in B fällt, d. h. $\angle$ (de') $=$ $\angle$ (eb), und $\angle$ (ce') $=$ $\angle$ (ae) wird, da in diesem Fall die Aufgabe ist: $\square$ im $\odot$ aus a, b, e übergeht.

Anmerkung 2.) Auf die zur Analysis 2) gehörende Auflösung gründet sich eine Art des Rückwärtseinschneidens beim Anfnehmen.

826. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, e, e′, ∠ D.

Analysis. a, b und e bestimmen ein △, der 4te Punkt D ergiebt sich mittelst des Orts um B mit e′, und des nach 320 durch e und ∠ D gegebenen Orts.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

827. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, e′, ∠ B, ∠ D.

Analysis. Ergiebt sich wie in 826.

828. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, e′, (∠ A + ∠ C), ∠ D.

Analysis. Da (∠ A + ∠ C) + ∠ D den ∠ B giebt, hat man 827 zu verzeichnen.

829. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, c, e, ∠ B, ∠ D.

Analysis. Durch a, e, ∠ B lassen sich die Punkte A, B, C feststellen; der Ort um C mit c, und der nach 320 durch e und ∠ D gegebene Ort bestimmen schließlich D.

Zusatz. Es sind 4 verschiedene Resultate möglich, da △ ABC zwiefach festgestellt werden kann, und die beiden Oerter sich doppelt schneiden.

830. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, e, ∠ (de), ∠ (ee′).

Analysis. a, b und e bestimmen die Punkte A, B, C, den vierten Punkt D bestimmt der nach 320 durch b und ∠ (ee′) gegebene Ort mit der Lage des unbestimmten Schenkels vom ∠ (de).

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

831. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, b, e, ∠ (ee′), ∠ (ce′).

Analysis. Durch a, b, e bestimmen sich die Punkte A, B, C. b und ∠ (ce′) geben nach 320 einen Ort für D, man hat also nun zur Feststellung dieses Punkts von B aus eine um ∠ (ee′) gegen e geneigte Linie zu ziehen.

832. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ (ae), ∠ (ce), ∠ (de′).

Analysis. Legt man a und ∠ (ae) fest, so bestimmt sich durch a und ∠ (de′) ein Ort für D; man hat also nur zwischen denselben und die Lage von e die Länge e, unter dem ∠ (ce) gegen e geneigt, nach 94 zu schieben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

833. Fig. XIV. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ B, ∠ C, ∠ (de′).

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 832.

834. Fig. XIV. Aufgaben.

□ aus c, d, (a + b), ∠ D, ∠ B.

□ aus c, d, (a — b), ∠ D, ∠ B.

Analysis. c, d, ∠ D bestimmen ein △, und dadurch e. Benutzt man (a + b) oder (a — b) nach 130 oder 133, so bestimmt sich ein ∠ des entstehenden △ $= \frac{\angle B}{2}$ oder $= R + \frac{\angle B}{2}$, weshalb man durch Hilfe von e nach 320 einen Ort für den Scheitel desselben erhält; den zweiten giebt die Kreislinie um A mit (a ± b); man hat also nach der Feststellung dieses Scheitelpunkts nur ein △ abzuschneiden, um den fehlenden Punkt B des □ ABCD zu erhalten.

835. Fig. 52. Aufgabe. □ aus a, e, e′, ∠ (ee′), ∠ C.

Analysis. e, e′, ∠ (ee′) bestimmen das 162 angeführte ▱ DF, in welchem sich FC = a ergiebt; man hat also nun den nach 320 mittelst e′ und ∠ C gegebenen Ort für C durch die um F mit a beschriebene Kreislinie zu schneiden, um C festzustellen. Das verlangte □ muß sich dann schließlich ergeben, wenn durch B und D ∓ ∥ zu CF und GC bezüglich gezogen werden.

Zusatz. Da sich C doppelt feststellen kann, sind 2 verschiedene Resultate möglich.

836. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus a, e, e′, ∠ (ee′), ∠ D.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 835; nur bestimmt sich hier im ▱ DF ∠ DCG = ∠ D, also der Ort 320 über DG.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

837. Fig 52. Aufgabe. ▱ aus e, e′, ∠ (ee′), ∠ C, ∠ D.

Analysis. e, e′, ∠ (ee′) bestimmen das 162 angeführte ▱ DF, in welchem sich ∠ DCG = ∠ D, und ∠ BCD = ∠ C ergiebt. Man hat also nur nach 320 über DG oder e mittelst ∠ D einen, und über BD oder e′ durch ∠ C einen anderen gleichartigen Ort zu beschreiben, um C und hiedurch auch A festzustellen.

838. Aufgabe. Fig. 52. ▱ aus e, e′, ∠ (ee′), ∠ A ∠ C.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 837; nur bestimmt sich hier im ▱ DF ∠ GCF = ∠ A, weshalb die beiden Oerter über FG und BD zu verzeichnen sind.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

839. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus a, e, e′, ∠ (ee′), (∠ B + ∠ C).

Analysis. e, e′, ∠ (ee′) bestimmen das 162 angeführte ▱ DF, in welchem sich ∠ BCF = ∠ B, und ∠ DCF = ∠ C, also ∠ DCF = (∠ B + ∠ C), und das Supplement ergiebt. Beschreibt man demnach über der durch das ▱ erhaltenen Diagonale DF den mittelst ∠ DCF nach 320 konstruirbaren Ort, so ist derselbe nur durch die mit a um F beschriebene Kreislinie zu schneiden, um C und hiedurch auch A festzustellen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

840. Aufgabe. ▱ aus e, e′, ∠ (ee), (∠ B + ∠ A), (∠ C — ∠ D).

Analysis. Durch (∠ A + ∠ B) erhält man (∠ C + ∠ D); nimmt man noch (∠ C — ∠ D) zu

Hülfe, so ergeben sich auch die ∠ C und D eindeutig; man hat also 837 zu konstruiren.

841. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus a, b, ∠ (be), ∠ (de′).

Analysis. a, b und ∠ (be) bestimmen △ ABC, und die Lage von c, mithin einen Ort für D; den zweiten giebt aber a und ∠ (de′) nach 320, u. s. w.

Zusatz. Es sind 4 verschiedene Resultate möglich, wenn a < b.

842. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ (be), ∠ (ae′).

Analysis. Legt man a mit ∠ (ae′) fest, und beschreibt über a den mittelst ∠ (be) nach 320 bestimmten Ort, so hat man nur nach 94 c mit der Neigung ∠ (ae′) = ∠ (e′c) zwischen diesen Ort und die Lage e′ zu schieben, um die fehlenden Punkte C und D des verlangten □ festzustellen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

843. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ (be), ∠ A.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 842, da mittelst ∠ A die Neigung von c gegen d gegeben ist.

844. Fig. 34. Aufgabe. □ aus a, b, c, ∠ (de′).

Analysis. Zieht man BH ∦ d, so ergiebt sich DH = a und ∠ DBH = ∠ (de′), also über DH nach 320 ein Ort für B, welchen man nur, da HC = c − a gegeben ist, von C aus mit b zu schneiden hat, um B festzustellen, und zuletzt den vierten Punkt A des verlangten □ abzuleiten.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

845. Fig. 34. Aufgabe. □ aus a, b, c, ∠ (de).

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie 844, nur muß hier durch A eine ∦ zu b gezogen werden.

845. a. Fig. 34. Aufgabe. □ aus a, b, c, ∠ (ee′).

Analysis. Zieht man BF ∦ e, so bestimmt sich DF = a + e und ∠ DBF = ∠ (ee′), also nach 320 über

DF ein Ort für B, welchen man nur von C aus mit b zur Feststellung von B zu schneiden hat. Zieht man hierauf durch C und B ∥ ∥ zu FB und CD, so ergiebt sich schließlich mittelst A das verlangte □ ABCD.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

846. Fig. XXI. Aufgaben.

□ im ⊙ aus a, b, c, r.
□ im ⊙ aus a, b, r, ∠ (dd).
□ im ⊙ aus a, b, r, ∠ A.
□ im ⊙ aus a, c, e, r.
□ im ⊙ aus a, c, r, ∠ A. ꝛc.

847. Fig. XXI. Aufgaben.

□ im ⊙ aus a, b, c, ∠ (eb).
□ im ⊙ aus a, e, e′, ∠ A. ꝛc.

Analysis. a und ∠ (eb) bestimmen r nach 321; man hat also □ im ⊙ aus a, b, c, r zu verzeichnen. ꝛc.

848. Fig. XXI. Aufgaben.

□ im ⊙ aus a, b, e, ∠ (ee′).
□ im ⊙ aus a, b, ∠ A, ∠ B.
□ im ⊙ aus a, b, ∠ (be), ∠ (ee′).
□ im ⊙ aus a, e, e′, ∠ (de′). ꝛc.

Analysis. a, b, e bestimmen ein △, und mittelst desselben r, zieht man also durch B e′ mit der Neigung ∠ (ee′) nach e, so muß sich auch der 4te Punkt D ergeben. ꝛc.

849. Fig. XXI. Aufgaben.

□ im ⊙ aus a, b, c, ∠ A.
□ im ⊙ aus a, b, e′, ∠ D. ꝛc.

Analysis. ∠ A giebt ∠ C = 2R — ∠ A; ∠ C, b und c bestimmen aber ein △, und mittelst desselben r, folglich läßt sich durch einen zweiten ⊙ um B mit a das geforderte □ feststellen. ꝛc.

Anmerkung. □ aus b, c, e′, ∠ A, sind unmögliche □ aus a, b, e, ∠ D } Aufgaben

850. Fig. XXI. Aufgabe. □ im ⊙ aus a, c, ∠ (ae), ∠ (ce).

Analysis. Legt man a mit ∠ (ae) fest, so ergiebt sich die Lage von e; nun ist aber ∠ (ec) = ∠ (ae'), folglich hat man auch die Lage von e', und es ist nur c mit der Neigung ∠ (ce) gegen die Lage e zwischen diese und die von e' (nach 94) zu schieben, um die fehlenden Punkte D und C des verlangten ▱ zu erhalten.

851. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e', ∠ (ae), ∠ (de').

Analysis. Da ∠ (de') = ∠ (be) ist, läßt sich △ ABC konstruiren, um dasselbe ein ⊙ beschreiben, und durch e' schließlich der 4te Punkt D feststellen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

852. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e', r, ∠ (ee').

Analysis. 1) Die Aufgabe fordert eigentlich zwei der Länge nach bestimmte Sehnen e und e' unter einer vorgeschriebenen Neigung ∠ (ee') in einen ⊙ mit r zu tragen. Diese Aufgabe ist durch 317 gelöst, wenn man e oder e' zunächst beliebig in den ⊙ mit r trägt.

Analysis. 2) e' und r bestimmen nach 321 ∠ A und ∠ C; man hat also ▱ aus e, e', ∠ (ee'), ∠ A, ∠ C, siehe 838, zu verzeichnen.

852. a. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus a, c, r, (∠ B + ∠ C).

Analysis. 1) Ergiebt sich ganz wie in 852, da mittelst (∠ B + ∠ C) der ∠ (ac) gegeben ist.

Analysis. 2) Durch r, a und c ergeben sich die ∠ (be) und (be'), also auch durch Subtraktion von (∠ B + ∠ C), ∠ (ae') + ∠ (ce), oder, da beide ∠ gleich sind, 2 ∠ (ae'). Mittelst ∠ (ae') ergiebt sich aber schließlich d; man hat also nur ▱ im ⊙ aus a, c, d, r zu konstruiren.

853. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, r, ∠ A, ∠ (ee').

Analysis. Nach 321 bestimmen r und ∠ A auch e'; man hat also die Aufgabe 852 zu lösen.

854. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e′, ∠ (ee′), ∠ A.

Analysis. ∠ A giebt ∠ C = 2R — ∠ A; man hat also 838 zu konstruiren.

855. Fig. XX. Aufgabe. Es soll in einen mit r beschriebenen ⊙ ein ▭ aus ∠ A und ∠ (ee′) gezeichnet werden.

Analysis. ∠ A und r bestimmen e = e′ nach 321; man hat also 852 zu konstruiren.

856. Fig. 52. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e′, ∠ (ee′), ∠ (be).

Analysis. Aus e, e′, ∠ (ee′) folgt das 162 erwähnte ▱. Nun ist ∠ (be) = ∠ (de′) = ∠ FGC, also die Lage von GC bekannt, während die Lage von BC durch ∠ (be) = ∠ FBC an sich gegeben ist. Beide Lagen bestimmen den Punkt C, und hiedurch das geforderte ▱ ABCD.

857. Fig XXI. Aufgaben.

▱ im ⊙ aus c, d, e, (a + b).

▱ im ⊙ aus c, d, e, (a — b).

Analysis. c, d, e bestimmen △ ADC und r; man hat also zur Feststellung des vierten Punkts B △ ABC aus e, r, (a ± b), siehe 796, zu verzeichnen.

858. Fig. XXI. Aufgaben.

▱ im ⊙ aus c, d, r, (a + b).

▱ im ⊙ aus c, d, r, (a — b).

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 857.

859. Fig. XXI. Aufgaben.

▱ im ⊙ aus e, e′, r, (a + b).

▱ im ⊙ aus e, e′, r, (a — b).

Analysis. e, r, (a ± b) bestimmen △ ABC nach 796; man hat also nur von B aus mit e′ die Kreislinie zur Feststellung von D zu schneiden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

860. Fig. XXII. Aufgaben.

□ um ⊙ aus a, b, c, e.
□ um ⊙ aus a, b, c, e'.
□ um ⊙ aus a, b, c, ∠ E. ꝛc.

Analysis. Durch a, b, c bestimmt sich d nach 295. Hiedurch ist man im Stande mittelst Zusammensetzung zweier konstruirbaren △△ die geforderten □□ festzustellen.

861. Fig. XXII. Aufgaben.

□ um ⊙ aus a, b, ϱ, ∠ A.
□ um ⊙ aus a, b, ϱ, ∠ B.
□ um ⊙ aus a, e, ϱ, ∠ A. ꝛc.

Auflösung. Zeichne den gegebenen ∠ und den ⊙ mit ϱ nach 336, und erfülle die übrigen Bedingungen der Aufgabe durch Hilfe von 272.

862. Fig. XXII. Aufgabe. □ um ⊙ aus a, ϱ, ∠ A, ∠ C.

Auflösung. Schiebe den ⊙ mit ϱ in ∠ A nach 306, bestimme a, und durch 272 die Lage von b, wende schließlich 282 für ∠ C an, so ergiebt sich das gesuchte □.

863. Fig. XXII. Aufgabe. □ um ⊙ aus e, ϱ, ∠ A, ∠ B.

Auflösung. Wende 336 sowohl in Beziehung auf ∠ A als ∠ B an, so bestimmen sich die Punkte A und B. Schneidet man nun von A aus e ab, so ergiebt sich C, und durch 272 endlich auch D.

864. Fig. XXII. Aufgabe. □ um ⊙ aus ϱ, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Auflösung. Trage die Supplemente der ∠ A, B, C als Centri∠ im ⊙ mit ϱ aneinander, und errichte in den Endpunkten der bestimmten Radien ⊥⊥, so ergiebt sich das gesuchte □.

865. Fig. XXII. Aufgabe. □ um ⊙ aus a, b, e, ∠ A.

Analysis. a, b, e bestimmen △ ABC mit ∠ A, also durch 276 einen Ort für das Centrum des ⊙ im □

Legt man nun ∠ A an a, so bestimmt die Halbirungslinie desselben das Centrum selbst, und dadurch ϱ, weshalb 272 zur Vollendung des □ führen muß.

866. Fig. XXII. Aufgabe. □ um ⊙ aus a, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Analysis. a, ∠ A, ∠ B bestimmen ϱ durch Halbirung der ∢ A und B; folglich hat man für ∠ C nur schließlich 282 anzuwenden.

867. Fig. XXII. Nach den Daten 295 und 296 kann man allen □ Aufgaben um ⊙ statt zweier Gegenseiten a und c auch a und (b + d), oder (a — c) und (b + d); statt zweier Nebenseiten a und b aber, a und (d — c), oder (a + b) und (d — c) geben.

868. Fig. XXX. Aufgabe. □ um ⊙ aus a, b, ϱ.

Analysis. Zieht man an den ⊙ mit ϱ zwei ∓ Berührungslinien, so erhält man durch die Länge von b nach 95 mittelst der beiden ∓∓ auch die →, hat also für b 282 anzuwenden, hierauf a abzuschneiden, und durch 272 das □ zu vollenden.

869. Fig. XXX. Aufgabe. □ um ⊙ aus b, d, ϱ.

Auflösung. Ziehe an den ⊙ mit ϱ 2 ∓ Berührungslinien, bestimme zwischen denselben die →→ von b und d, und lege Tangenten mit diesen →→ nach 282 an den ⊙.

870. Aufgaben. □ im und um ⊙ aus b, ∠ B.
□ im und um ⊙ aus a, ∠ B.

Analysis. Nach 285 hat man alle 4 ∢ des □, also 866 zu konstruiren.

871. Fig. XXX. Aufgabe. Um einen ⊙ mit ϱ ein gleichschenkliches □, welches die Seite a hat, zu beschreiben.

Analysis. Der Berührungspunkt muß in der Mitte von a

liegen, damit das ▭ gleichschenklig wird. Hieraus ergiebt sich die Zeichnung des ▭ durch 272.

872. Fig. XXX. Aufgabe. ▭ im und um ⊙ aus ϱ, ∠ B.

Analysis. Konstruirt man ∠ B an den ⊙ mit ϱ nach 336, so ergiebt sich $\frac{a}{2}$, folglich läßt sich das ▭ durch 272 und 282 vollenden.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

873. Aufgaben. △ aus f^a, a, α.
△ aus f^2, c.

Analysis. Aus f^a und a ergiebt sich h nach 185, man hat also △ aus a, h, α (788) zu konstruiren.

874. Aufgabe. △ aus f^2, h, α.

Analysis. Durch 185 erhält man △ aus a, h, α (788) zu konstruiren.

875. Aufgaben. △ aus f^a, a, r.
△ aus f^2, α, r.

Analysis. Führt durch 185 zu △ aus a, h, r; siehe 787.

876. Aufgabe. △ aus f^2, h, r.

Analysis. Führt durch 185 zu △ aus a, h, r; siehe 787.

Anmerkung. Es ist zweckmäßig, diese Aufgaben zuweilen dem Schüler anders eingekleidet mitzutheilen, z. B. statt △ aus f^2, h, r: eine gegebene Fläche in ein △ mit einer vorgeschriebenen Höhe zu verwandeln, um welches sich ein bestimmter ⊙ zeichnen läßt.

877. Aufgabe. △ aus f^2, a, ∠ (t h).

Analysis. $\frac{a}{2}$, $\angle$ (tb) und $\frac{f^2}{2}$ bestimmen ein $\triangle$; siehe 873.

878. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, b, $\angle$ (ta).

Analysis. $\frac{f^2}{2}$, b, $\angle$ (ta) bestimmen ein $\triangle$; siehe 873.

879. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, α, t'.

$\square$ aus f^2, c', $\angle$ (ac).

Analysis. $\frac{f^2}{2}$, α und t' bestimmen ein $\triangle$; siehe 873.

880. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, c, $\angle$ (tb).

Analysis. Verlängert man t um sich selbst, so bestimmt sich ein $\triangle$ aus f^2, c und dem Wechsel$\angle$ von (tb); siehe 873.

881. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, α, t.

Analysis. Verlängert man t um sich selbst, so ergiebt sich ein $\triangle$ aus f^2, 2t, und $2R - \alpha$; siehe 873.

882. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, $(a+b+c)$.

Analysis. Durch f^2 und $(a+b+c)$ erhält man ϱ nach 342. Nun ist aber $2c = (a+b+c) - 2\varrho$ nach 346; man hat also $\triangle$ aus f^2, c zu konstruiren; siehe 873.

883. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, ϱ.

Analysis. Durch f^2 und ϱ erhält man nach 342 $(a+b+c)$, hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

884. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus f^2, a, b, $\angle$ B, $\angle$ D.

Analysis. a, b und $\angle$ B geben $\triangle$ ABC, daher erhält man die Fläche des $\triangle$ ACD $= f^2 - \triangle$ ABC und c. Nun ist aber auch $\angle$ D bekannt, folglich hat man schließlich 873 zu verzeichnen.

885. Aufgabe. In einen $\odot$ ein $\square$ mit der Fläche f^2 einzuschreiben.

Analysis. Das halbe $\square$ ist ein $\triangle$ mit der Hypotenuse 2r; man hat also 873 zu konstruiren.

886. Fig. 165. Aufgabe. In einen ⊙ ein □ von bestimmter Fläche mit einem vorgeschriebenen ∠ einzuschreiben.

Analysis. r und ein ∠, z. B. ∠ A, bestimmen DB; fällt man aus B einen ⊥ BG, so ergiebt sich △ DBG $= \frac{f^2}{2}$; man hat also 873 zu konstruiren.

887. Aufgabe. Um einen ⊙ einen ▽ von bestimmter Fläche zu beschreiben.

Analysis. 2ϱ ist die Höhe, aus f^2 und 2ϱ ergiebt sich aber die Seite nach 185; man hat also zur Konstruktion des geforderten ▽ ähnlich mit 868 zu verfahren.

888. Fig. 166. Aufgabe. Es soll um einen ⊙ ein □ aus f^2 und ∠ A gezeichnet werden.

Analysis. Legt man ∠ A am ⊙ nach 336 fest, so erhält man durch 282 die Figur AFGD, also AF + DG. Nun ist durch 2ϱ und f^2 des geforderten □ nach 199 (a+c) gegeben, folglich erhält man (a+c) — (AF + DG) = FB + GC = BC, nebst der ↠ dieser Linie (mittelst der beiden ⫫), und es ist schließlich 282 zur Vollendung des gesuchten □ anzuwenden.

889. Fig. 166. Aufgabe. Es soll um einen ⊙ ein □ aus f^2 und b gezeichnet werden.

Analysis. Werden 2 ⫫ Berührungslinien an den ⊙ gezogen, so ergiebt sich zwischen denselben die ↠ von b, also ∠ B, und damit die vorhergehende Aufgabe.

890. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus f^2, a, b_1 c

Analysis. f^2 und (a + c) bestimmen h nach 199 es läßt sich also △ BCD aus b, c, h zeichnen, und daraus das □ ableiten.

891. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus f^2, a, c, ∠ A

Analysis. f^2 und (a + c) bestimmen h nach 199, e läßt sich also △ ABD aus a, ∠ A und h zeichnen, au daraus das geforderte □ ableiten.

892. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus f^2, a, c, e.

Analysis. f^a und $(a+c)$ bestimmen h nach 199, es läßt sich also $\triangle$ ABC aus a, c, h zeichnen, und daraus das gesuchte $\square$ ableiten.

283. Fig. XX. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus f^a, a, c.

Analysis. f^a und $(a+c)$ bestimmen h nach 199, setzt man daher in dem einen Endpunkt von h einen $\perp = \frac{a}{2}$, und in dem anderen Endpunkt einen zweiten $\perp = \frac{c}{2}$, aber in entgegengesetzter $\rightarrow$ ab, so muß sich nach 284 das verlangte $\square$ ergeben.

4tes Kapitel.

Kreis-Aufgaben.

284. Aufgabe. $\odot$ aus $K = K' = K''$.

Analysis. Ber. v. A. oder Ber. v. J.; gleichartige Berührung. Reduzirt sich durch 313 auf $\odot$ aus P, P', P''.

Ber. v. A. und Ber. v. J., oder ungleichartige Berührung, ist hier für den Schüler nicht lösbar, siehe 1204.

Anmerkung. Die verschiedenen Fälle, welche durch die Möglichkeit der Berührung von Außen oder von Innen entstehen, sollen im Folgenden nur erwähnt werden, sobald ein Fall gegen den anderen auffallende Unterschiede darbietet.

285. Aufgabe. $\odot$ aus L, L', P in der Halbirungslinie des $\angle$ (LL').

Analysis. 1) Fig. 167. Der in P auf die Halbirungslinie errichtete $\perp$ bildet eine Berührungslinie für den gesuchten $\odot$, welche man also nur vom Durchschnittspunkt mit L auf L abzutragen hat, um einen Berührungspunkt zu erhalten, durch welchen sich μ (der Mittelpunkt des gesuchten $\odot$) nach 275 ergiebt.

Analysis 2.) Fig. 167. μ, P und der Berührungs-

punkt in L bilden ein bestimmbares △, wodurch sich der zuletzt genannte Punkt angeben läßt.

Analysis 3.) Fällt man aus μ und P auf L ⊥ ⊥, so ergiebt sich der erstere dieser beiden ⊥ ⊥ = P μ, weshalb sich die Aufgabe auf 758 reducirt.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

896. Aufgabe. ⊙ aus P, P, L, wenn PP′ ∦ L ist.

Analysis. 72 giebt einen Ort für μ, und den Berührungspunkt in L. Verbindet man diesen mit P, so zeigt sich μ in einem zweiten Ort, kann also festgestellt werden.

897. Aufgabe. ⊙ aus L, P, P′ in L.

Analysis. μ ergiebt sich durch die Oerter 72 u. 275.

Determination. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn P auch in L liegt.

898. Aufgabe. ⊙ aus L, L′ und der Sehne s zwischen beiden Berührungspunkten.

Analysis. $\frac{1}{2}$ s und $\frac{1}{2}$ ∠ (LL′) bestimmen ein △, und dadurch den Berührungspunkt, ϱ und μ.

899. Aufgabe. ⊙ aus P, P′ und der Länge des ⊥, welcher aus P auf den P′ schneidenden Durchmesser gefällt werden kann.

Analysis. PP′ und der ⊥ bestimmen ein △, und dadurch einen Ort für μ; 72 giebt den zweiten erforderlichen Ort.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der ⊥ > PP′ ist.

Zusatz. Es bestimmen sich 2 = ⊙⊙.

900. Aufgabe. L ∦ L′, K zwischen L und L′.

Analysis. 278 giebt einen, und der Radius r von K + der halben Entfernung beider ∦ ∦ den zweiten Ort für μ.

Zusatz. Es ergeben sich zwei = ⊙⊙.

901. Aufgabe. ⊙ aus L, K, P in K.

Analysis 1.) Die Lage MP giebt einen Ort für μ nach 304; L und die durch P gezogene Berührungslinie bestimmen nach 276 den zweiten Ort.

Analysis 2.) Fällt man aus P einen ⊥ auf L, und verlängert MP bis L, so zeigt sich die Aufgabe 758 zur Bestimmung des Berührungspunkts zu lösen.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate, eins für die Ber. v. A., das andere für die Ber. v. J.

902. Aufgabe. ⊙ aus K, L, P in L.

Analysis ꝛc. Siehe U. d. A. §. 26. und g. Betr. §. 19.

903. Aufgabe. ⊙ aus K, K_1, P in K'. (Siehe g. Betr. §. 17.)

Analysis. Sowohl bei der gleichartigen Berührung v. A. oder v. J., als bei der ungleichartigen Berühr. ergiebt sich, wenn man um μ eine M durchlaufende Kreislinie nach 313 beschreibt, ein Punkt in der Lage von M' P, welcher durch Verlängerung oder Verkürzung von M'P um r bestimmt werden kann. Die Verbindungslinie dieses Punkts mit M' bildet aber die Grundlinie eines △, dessen Spitze μ in die Lage von M'P fällt; also hat man nur schließlich 72 zur Bestimmung des Mittelpunktes μ anzuwenden.

904. Aufgabe. ⊙ aus P, ϱ, K_d. (K_d bedeutet: K soll halbirt oder im Durchmesser geschnitten werden).

Analysis. 2r und ϱ bestimmen ein △, und mittelst desselben die Centrallinie (Höhe) μM, welche einen Ort für μ giebt. Aus P und ϱ folgt der zweite erforderliche Ort.

Zusatz. Es sind zwei ⊙⊙ mit verschiedener Lage konstruirbar.

905. Aufgaben. ⊙ aus L, ϱ, K_d

⊙ aus L_μ, ϱ, K_d.

Analysis. Ergiebt sich wie in 904; nur daß ein Ort durch 79 gebildet wird.

906. Aufgaben. ⊙ aus K, ϱ, K'_d.

⊙ aus K_μ, ϱ, K'_d.

Analysis. Ergiebt sich wie in 904; nur daß ein Ort durch $r + \varrho$ oder $r - \varrho$ oder $\varrho - r$ gebildet wird.

Zusatz. (zu Aufg. 1.) Ein Paar verschieden gelegene Resul-

ente können sich für die Ber. v. A., und ein anderes Paar Resultate in derselben Art für die Ber. v. J. ergeben.

907. Aufgabe. ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, ρ.

Analysis. d und ρ bestimmen ein △, und mittelst desselben die Centrallinie (Höhe) μM; d' und ρ ergeben in derselben Art die Centrallinie $M'\mu$, es ist also das △ $M\mu M'$, und mittelst desselben μ konstruirbar.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

908. Aufgabe. ⊙ aus P, ρ, L_s (L_s heißt: der gesuchte ⊙ soll von L eine gegebene Sehne s abschneiden).

Analysis. ρ und s bestimmen ein △, also die Entfernung des Mittelpunkts μ von L. Diese giebt einen Ort $\mp$ L nach 79; der zweite folgt aus 274.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn $\rho \leqq \frac{s}{2}$. Bezeichnet man den aus P auf L gefällten Perpendikel mit ⊥, so ergiebt sich außerdem als Maximum für $\rho^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 (\perp + \rho)^2$, und als Minimum $(\perp - \rho)^2$.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

909. Aufgabe. ⊙ aus L_s, L', ρ.

Analysis. s und ρ geben einen Ort wie in 908, der andere folgt aus ρ und L' nach 79.

910. Aufgabe. ⊙ aus L_s, K, ρ.

Analysis. s und ρ geben einen Ort wie in 908, der andere folgt durch K und ρ nach 307.

Zusatz. Es sind 4 Resultate für jede Ber.-Art möglich.

911. Aufgabe. ⊙ aus P, K_s, ρ.

Analysis. s und r geben den Abstand des Punktes M, und s und ρ den des Punktes μ von s; die Kreislinie um M mit der Summe oder Differenz dieser Abstände bildet einen (doppelt), 274 den anderen Ort für μ.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

912. Aufgabe. ⊙ aus L, K_s, ρ.

Analysis. K_s und ρ bestimmen wie in 911 einen Ort für μ; L und ρ geben nach 79 den anderen.

Zusatz. Es sind 8 Resultate möglich. Siehe 911.

913. Aufgabe. ⊙ aus K, K′, ϱ.

Analysis. K′, und ϱ bestimmen wie in 911 einen Ort für μ, K und ϱ geben nach 307 den anderen.

Zusatz. Es sind 2 Paar Resultate für die Ber. v. A., und zwei andere Paar in derselben Art für die Ber. v. J. möglich.

914. Aufgabe. ⊙ aus L_s, L'_s, ϱ.

Analysis. Die wiederholte Anwendung des 908 entwickelten Orts bestimmt μ (vierfach).

915. Aufgabe. ⊙ aus K_s, K'_s, ϱ.

Analysis. Die wiederholte Anwendung des 911 entwickelten Orts bestimmt μ.

Zusatz. Es sind 8 Resultate möglich.

916. Aufgabe. ⊙ aus L_s, K_s, ϱ.

Analysis. Die beiden in 908 und 911 entwickelten Oerter bestimmen μ.

Zusatz. Es sind 8 Resultate möglich. Siehe Fig. 167. a.

917. Aufgabe. ⊙ aus L_s, L'_s, P in L.

Analysis. Wird s in L von P aus abgetragen, so bildet der in der Mitte von s errichtete ⊥ den einen Ort für μ; der andere ergiebt sich nach 276, da die Sehnen = sind.

918. Aufgabe. ⊙ aus L_s, L'_s, L''_s.

Analysis. Da die Sehnen gleich sind, müssen auch ihre Abstände von μ gleich sein, woher sich die Aufgabe auf ⊙ aus L, L′, L″ (281) reduzirt.

919. Aufgabe. ⊙ aus $L_s \fallingdotseq L'_s$, K_s zwischen L und L′.

Analysis. s in K giebt den in 316 erwähnten ⊙; in Beziehung auf denselben reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus $L \fallingdotseq L'$, K; siehe 900.

920. Aufgabe. ⊙ aus $L_s \fallingdotseq L'_s$, P.

Analysis. Wegen des gleichen Abstandes von s muß die Mitte zwischen beiden $\fallingdotseq$ L und L′ diesen Abstand selbst bestimmen. Hiedurch hat man aber, da $\frac{1}{2}$s bekannt ist,

die Hypotenuse des entstehenden △ als ϱ, und es folgt daraus die Lage von μ in der Mittellinie zwischen L und L' nach 274.

921. Aufgaben. ⊙ aus P, P', L_μ. (L_μ heißt, ⊙ aus P, P', K_μ. der Mittelpunkt μ soll in L fallen.)

Auflösung. Folgt aus 72.

Zusatz. Bei der letzten Aufgabe sind 2 verschiedene Resultate möglich.

922. Aufgaben. ⊙ aus L, L', L''_μ.
⊙ aus L, L', K_μ.

Auflösung. Folgt aus 276.

Zusatz. Bei der letzten Aufgabe sind 2 verschiedene Resultate möglich.

923. Aufgabe. ⊙ aus L, L'_μ, P in L'.

Analysis. Errichtet man in P auf L' einen ⊥, so ergiebt sich ein zweiter Ort durch 276.

924. Aufgabe. ⊙ aus L_α, L'_α, K_μ.

Analysis. μ bestimmt sich durch 276, da gleiche Sehnen gleiche Abstände von μ haben.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

925. Aufgaben. ⊙ aus L_α, L'_μ, ϱ.
⊙ aus L_α, K_μ, ϱ.

Analysis. α und ϱ bestimmen wie in 908 den erforderlichen Ort für μ.

Zusatz. Aufg. 1) giebt 2, Aufg. 2) 4 Resultate.

926. Aufgaben. ⊙ aus K_α, K'_μ, ϱ.
⊙ aus K_α, L_μ, ϱ.

Analysis. K_α und ϱ bestimmen nach 911 den zweiten erforderlichen Ort für μ.

Zusatz. Für beide Aufgaben können sich 4 Resultate ergeben.

927. Aufgabe. ⊙ aus P, L_α, ϱ. (L_α heißt: der gesuchte ⊙ soll von L in zwei Abschnitte getheilt werden, deren einer den ∠ α faßt.)

Analyſis. α giebt den Centri∠. Der eben beſſer Ergänzung zu 4R; da nun ϱ bekannt iſt, kennt man hiedurch das △, deſſen Spitze μ iſt, alſo auch nach 79 einen Ort für dieſen Punkt. Der zweite Ort folgt ſchließlich nach 274.

Zuſatz. Es ſind 4 Reſultate möglich.

928. Aufgabe, ⊙ aus P, K_α, ϱ. (K_α heißt: der geſuchte ⊙ ſoll K ſo durchſchneiden, daß ſich in jenem ein den ∠ α faſſender Abſchnitt bildet.)

Analyſis. α beſtimmt den Centri∠ bei μ, dieſer und ϱ die Sehne s; man hat alſo ⊙ aus P, K_s, ϱ (911) zu konſtruiren.

929. Aufgaben. ⊙ aus L, L_α, ϱ.
⊙ aus L_μ, L'_α, ϱ.

Analyſis. α und ϱ beſtimmen einen Ort für μ, wie in 927, L und ϱ geben für die erſte Aufgabe nach 79 den anderen.

930. Aufgabe. ⊙ aus L_α, L_β, ϱ.

Analyſis. Durch wiederholte Anwendung des in 927 entwickelten Orts beſtimmt ſich μ.

931. Aufgabe. ⊙ aus L_s, L_α, ϱ.

Analyſis. Die in 908 und 927 entwickelten Oerter beſtimmen μ.

932. Aufgaben. ⊙ aus L, K_α, ϱ. } (Bezeichnung 928).
⊙ aus L_μ, K_α, ϱ. }

Analyſis. Wie in 928 reduziren ſich dieſe Aufgaben auf 912 und 926.

933. Aufgaben. ⊙ aus L_s, K_μ, ϱ. } (Bezeichnung 928).
⊙ aus L_α, K_β, ϱ. }

Analyſis. Beide Aufgaben reduziren ſich nach 927 und 928 auf 916.

934. Aufgaben. ⊙ aus K, L_α, ϱ.
⊙ aus K_μ, L_α, ϱ.
⊙ aus K_s, L_α, ϱ.

Analyſis. Dieſe Aufgaben reduziren ſich nach der Ana-

lysis 927, durch welche sich s mittelst α, L und ϱ ergab, auf 910, 925 und 916.

935. Aufgaben. ⊙ aus K, K'_α, ϱ. } (Bezeich-
⊙ aus K_μ, K'_α, ϱ. } nung 928).

Analysis. Nach 928 reduziren sich diese Aufgaben auf 913 und 926.

936. Aufgaben. ⊙ aus K_α, K'_β, ϱ. } (Bezeich-
⊙ aus K_ε, K'_α, ϱ. } nung 928).

Analysis. Nach 928 reduziren sich diese Aufgaben auf 915.

937. Aufgabe. ⊙ aus $L_\mu \neq L'$, K_α. (Bezeichnung 928.)

Analysis. Da $L \neq L'$ ist, bildet ihre Entfernung den gesuchten Radius ϱ, folglich hat man 932 zu lösen.

938. Aufgabe. ⊙ aus P, $K_{\alpha\mu}$. ($K_{\alpha\mu}$ heißt: K soll den gesuchten ⊙ in 2 Abschnitte theilen, von denen einer α faßt, und μ soll in K fallen.)

Analysis. Durch α ergiebt sich der Centri∠ bei μ, welcher Peripherie∠ für K ist, und die auf der gemeinschaftlichen Sehne stehenden △△ bestimmt. Von diesen giebt eines das gesuchte ϱ; man hat also 274 in Bezug auf P anzuwenden, um μ zu bestimmen.

939. Aufgabe. ⊙ aus L, $K_{\alpha\mu}$. (Bezeichnung 938.)

Analysis. Auf demselben Wege wie in 938 ergiebt sich ϱ, und dies bestimmt mit L nach 79 μ.

Zusatz. Es sind 4 = Resultate möglich.

Anmerkung. ⊙ aus L', $L_{\alpha\mu}$ ist eine unmögliche Aufgabe: denn L_μ setzt α = R voraus.

940. Aufgabe. ⊙ aus K, $K'_{\alpha\mu}$. (Bezeichnung 938.)

Analysis. Wie in 938 ergiebt sich ϱ, und dies bestimmt mit K nach 307 μ.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich, 2 für die Ber. v. A., und 2 für die Ber. v. J.

941. Aufgabe. ⊙ aus P, P'_b, ϱ. (P'_b heißt: die aus P' nach dem gesuchten ⊙ gezogene Berührungslinie

soll die Länge b erhalten, oder der gesuchte ⊙ soll den um P' mit b beschriebenen ⊙ rechtℓ. schneiden; siehe 359.)

Analysis. b und ϱ bestimmen ein △, dessen Hypotenuse einen Ort für μ um P' bildet, der Kreis mit ϱ um P giebt den zweiten.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

942. Aufgaben. ⊙ aus L, P_b, ϱ. } (359).
⊙ aus L_μ, P_b, ϱ. }

Analysis. Ein Ort für μ ergiebt sich wie in 941, der andere folgt aus L und ϱ nach 79, oder ist gegeben.

Zusatz. Es sind 4 und 2 Resultate möglich.

943. Aufgaben. ⊙ aus P_b, L_ε, ϱ. } (359).
⊙ aus P_b, L_α, ϱ. }

Analysis. Ein Ort für μ ergiebt sich wie in 941 aus P und ϱ; den anderen erhält man durch ε und ϱ nach 908, oder durch α und ϱ nach 927.

944. Aufgaben. ⊙ aus P_b, K, ϱ. } (359).
⊙ aus P_b, K_μ, ϱ. }

Analysis. Ein Ort für μ ergiebt sich durch P_b und ϱ wie in 941, der andere durch K und ϱ nach 307, oder für K_μ geradezu durch K.

Zusatz. Es sind für K_μ zwei Resultate möglich, für K aber 4 (B. v. A. und B. v. J.).

945. Aufgaben. ⊙ aus P_b, K_ε, ϱ. } (359).
⊙ aus P_b, K_α, ϱ. }

Analysis. Ein Ort für μ ergiebt sich wie in 941 durch P_b und ϱ, den anderen erhält man aus K_ε und ϱ nach 914, oder aus K_α und ϱ nach 928.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

946. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, ϱ. (359).

Analysis. P und b bestimmen nach 941 einen, K_d und ϱ nach 904 den anderen Ort für μ.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

947. Aufgabe. ⊙ aus P_b, P'_b, ϱ. (359)

Analysis. P_b und ϱ bestimmen nach 948 den Ort für μ, P'_b und ϱ in derselben Art den anderen.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

948. Fig. 168. a. Fig. 168. a. Aufgabe ⊙ aus P, K_b, ϱ. (K_b bedeutet, daß der gesuchte ⊙ und der gegebene eine gemeinschaftliche Berührungslinie von der Länge b erhalten sollen, welche die Centrale selbst oder ihre Verlängerung zu schneiden hat, je nachdem dies verlangt ist. K_b giebt aber auch einen ⊙, dessen Radius die Hypotenuse eines durch r und b bestimmten △ ist, und es kann in dieser Rücksicht K_b ferner bedeuten, daß die gesuchte Kreislinie nach 360 einem gegebene unter einem vorgeschriebenen ∠ schneiden soll.)

Analysis 1). Verbindet man M und μ mit den Berührungspunkten von b, und zieht aus M eine ⊥ zu b, so ergiebt sich ein ▱ und ein △. Das letztere ist durch beide Katheten b und $r-\varrho$ oder $\varrho-r$, Fig. 168., oder durch b und $r+\varrho$, Fig. 168. a., bestimmt, weshalb man die Centrale als Hypotenuse, also einen Ort für μ um M zeichnen kann. P und ϱ bestimmen schließlich nach 274 den zweiten Ort.

Analysis 2). Aus dem mittelst b und ϱ bestimmten △ $BB'\mu$ ergiebt sich $B\mu$ und ∠ $\mu BB'$, also auch ∠ $MB\mu = R +$ oder $-$ ∠ $B'B\mu$. Hiernach ist aber ebenfalls △ $MB\mu$, folglich auch die Centrale $M\mu$, und durch die letztere ein Ort für μ bestimmt, während der zweite Ort durch P und ϱ nach 274 gezeichnet werden kann.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich. Bei M schneiden b $M\mu$, bei den anderen nicht.

949. Aufgaben. ⊙ aus L, K_b, ϱ.
⊙ aus L_μ, K_b, ϱ. } (360).

Analysis. K_b und ϱ geben wie in 948 einen Ort für μ, L und ϱ den anderen nach 79, oder es ist derselbe schon durch L bestimmt.

Zusatz. Die erste Aufgabe kann 8, die 2te 4 Resultate geben.

950. Aufgaben. ⊙ aus K_b, L_a, ϱ. } (360).
⊙ aus K_b, L_a, ϱ. }

Analysis. K_b und ϱ geben wie in 948 einen Ort für μ, L_a und ϱ nach 908, oder L_a und ϱ nach 927 den anderen.

Zusatz. Es sind 8 Resultate möglich.

951. Aufgaben. ⊙ aus K_b, K', ϱ. } (360).
⊙ aus K_b, K'_μ, ϱ. }

Analysis. K_b und ϱ bestimmen nach 948 einen Ort für μ, der andere ist gegeben, oder folgt aus K' und ϱ nach 307.

Zusatz. Bei der ersten Aufgabe sind 8 Resultate möglich, (4 f. d. B. v. A., 4 f. d. B. v. J.), bei der zweiten in derselben Art 4 Resultate.

952. Aufgaben. ⊙ aus K_b, K'_a, ϱ. } (Bezeichnung 360)
⊙ aus K_b, K'_a, ϱ. }

und 928.)

Analysis. K_b und ϱ bestimmen nach 948 den einen, K'_a und ϱ nach 911, oder K'_a und ϱ nach 928 den zweiten Ort für μ.

Zusatz. Wie in 950. Siehe 926.

953. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $K'_{b'}$, ϱ. (359 u. 360.)

Analysis. P_b und ϱ bestimmen nach 941 den einen, K_b und ϱ nach 948 den anderen Ort für μ.

Zusatz. Wie in 948.

954. Aufgabe. ⊙ aus K_b, K_d, ϱ. (360).

Analysis. K_b und ϱ bestimmen nach 948 den einen, K_d und ϱ nach 904 den zweiten Ort für μ.

Zusatz. Wie in 948.

955. Aufgabe. ⊙ aus K_b, $K'_{b'}$, ϱ. (360).

Analysis. K_b und ϱ bestimmen nach 948 den einen, $K'_{b'}$ und ϱ in derselben Art den zweiten Ort für μ.

Zusatz. Es sind 8 Resultate möglich, da jeder Ort 2 Durchschnittspunkte giebt, und sich doppelt bestimmen läßt.

955. a. Aufgaben. ⊙ aus K^d, P, ϱ.

⊙ aus K^d, L_λ, ϱ.
⊙ aus K^d, K', ϱ.
⊙ aus K^d, P_b, ϱ.
⊙ aus K^d, K'_{ϱ}, ϱ.
⊙ aus K^d, $K'^{d'}$, ϱ.
⊙ aus K^d, K'_b, ϱ.

(K^d bedeutet: daß K die gesuchte Kreislinie halbiren soll, während K_d wie früher bezeichnet, daß K von der gesuchten Kreislinie halbirt werden soll.)

Analysis. Ergiebt sich wie in 904, 905, 906, 946, 907, 954.

Anmerkung. Diese Aufgaben sind unausgeführt, und stehen nicht an ihrem Platz, da das Element K^d erst nach der Bearbeitung der übrigen Kreis-Aufgaben in das System derselben aufgenommen worden ist.

956. Aufgabe. ⊙ aus $L_\alpha \neq L'_\mu$, P_b. (359).

Analysis. Die Entfernung der $\neq$ L und L' giebt eine Kathete, $\frac{1}{2}\alpha$ die andere eines $\triangle$, dessen Hypotenuse ϱ durch dasselbe gegeben ist. Aus P_b und ϱ folgt schließlich nach 941 der zweite Ort für μ, durch welchen sich dieser Punkt in L' feststellen läßt.

Zusatz. Es sind zwei gleiche Resultate möglich.

957. Aufgabe. ⊙ aus $L_\alpha \neq L'_\mu$, P_b. (359).

Analysis. α bestimmt den Centri$\angle$, die Entfernung zwischen L und L' die Höhe des $\triangle$, welches α zum $\angle$ an der Spitze hat, weshalb dessen Seite ϱ gezeichnet werden kann, und sich die Lage von μ in L' durch P_b und ϱ nach 941 ergiebt.

Zusatz. Wie in 956.

958. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $L_{\alpha\alpha}$. (359).

Analysis. α bestimmt den Centri$\angle$, dieser und s ein $\triangle$, dessen Seite ϱ ist, und dessen Höhe nach 79 einen Ort für μ giebt; aus P_b und ϱ folgt schließlich der zweite erforderliche Ort für μ nach 941.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

959. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_{sa} (359) (Bezeichnung 928 ꝛc.)

Analysis. Durch das aus s und a bestimmte △ ergiebt sich ϱ und der Abstand zwischen μ und s. K und s bestimmen in ähnlicher Art den Abstand zwischen M und s; es läßt sich also die Centrale, und mittelst derselben ein Ort für μ durch die Summe oder die Differenz jener Abstände zeichnen. Der zweite erforderliche Ort für μ ergiebt sich aus P_b und dem mittelst s und α gefundenen ϱ nach 941.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

5tes Kapitel.

Gemischte Aufgaben.

960. Aufgabe. Gegeben K und L; man soll von L nach K eine Berührungslinie = a ziehen.

Analysis. a und r bestimmen ein △; die Hypotenuse c desselben giebt die Entfernung des in L gesuchten Punktes von M.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn a^2 < als das Quadrat des aus M auf L gefällten ⊥ weniger r^2 gegeben ist.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich, da man zwei Punkte in L findet, und jeder 2 Tangenten giebt.

961. Aufgabe. Gegeben P und K; es soll die kürzeste von P nach K führende Linie bestimmt werden, welche also ein Maximum bildet. (P kann doppelt liegen.)

962. Aufgabe. Gegeben P und K; es soll die kürzeste von P nach K führende Linie bestimmt werden, welche also ein Minimum bildet. (P kann doppelt liegen).

963. Aufgabe. Gegeben P und K; es soll eine Linie durch P gelegt werden, von der K die Sehne s abschneidet.

Auflösung. Man ziehe an den Ort 316 in beiden Fällen, wenn P innerhalb oder außerhalb K liegt, eine Berührungslinie; vergl. g. Betr. §. 8.

Zusatz. Es ergeben sich 2 Resultate.

964. Aufgabe. Gegeben K und K'; es soll eine Tangente an K' gelegt werden, von der K die Sehne s abschneidet.

Analysis. Durch s in K ist für die verlangte Tangente nach 316 ein zweiter Berührungskreis gegeben; man hat also zur Bestimmung derselben nur schließlich 318 anzuwenden.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

965. Aufgabe. Gegeben L und K; man soll von L nach K eine Sekante so ziehen, daß die entstehende Sehne = s, und der äußere Abschnitt = b wird.

Analysis. Durch K und s ergiebt sich nach 316 ein Ort für die gesuchte Linie, und die von L nach demselben führende Tangente bestimmt sich $= \frac{s}{2} + b$; man hat also 960 zu konstruiren.

966. Aufgabe. Gegeben L ≠ L', und K; man soll an K eine Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY = a ergiebt.

Analysis. Siehe 741 und 282.

Anmerkung. Für diese und die folgenden ähnlichen Aufgaben paßt Fig. 90. oder Fig. 90 a., wenn man statt P'' eine die Lage XY berührende Kreislinie [illegible] und [illegible]

967. Aufgabe. Gegeben L ≠ L', [illegible] in L, P in L', und K; man soll an K eine Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß XY + PP' = s ist.

Analysis. Siehe 742 und 282.

968. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und K; man soll an K eine Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß entweder $XY - PP' = d$, oder $PP' - XY = d'$ wird.

Analysis. Siehe 743 und 282.

969. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und K; man soll an K eine PP' schneidende Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß sich $PY + P'X = s$ ergiebt.

Analysis. Siehe 744 und 282.

970. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und K; man soll an K eine PP' nicht schneidende Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß $PY + P'X = s$ wird.

Analysis. Siehe 745 und 282 oder 272.

971. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und K; man soll an K eine PP' nicht schneidende Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß $PY - P'X = d$ wird.

Analysis. Siehe 746 und 282 oder 272.

972. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', u. K; man soll an K eine PP' schneidende Tangente legen, welche einen von L und L' begrenzten Abschnitt XY so bestimmt, daß $PY - P'X = d$ wird.

Analysis. Siehe 747 und 282 oder 272.

973. Fig. 169. Aufgabe. Gegeben K, L und $\rightarrow$ L, man soll eine der $\rightarrow$ nach bestimmte Linie $\rightarrow$ von L nach K ziehen, daß sich $PX = XY$ verhält.

Analysis. Legt man die gegebene $\rightarrow$ durch P, und

zieht PY, so zeigt die Vergleichung der entstehenden $\measuredangle$, daß sich Y in K durch die Halbirungslinie des $\angle$ ergiebt, dessen Schenkel L und die P durchlaufende gegebene $\rightarrow$ bilden.

974. Fig. 182. Aufgabe. In einem festliegenden $\triangle$ eine von b und c begrenzte $\neq$ XY mit a so zu legen, daß sich $BX + CY = XY + BC$ ergiebt.

Analysis. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt nach 297, daß ein $\odot$ die 4 Seiten des $\square$ berühren muß. Dieser $\odot$ ist aber durch das $\triangle$ gegeben, man hat also nur 281 und 282 anzuwenden, um XY zu bestimmen.

Anmerkung. XY könnte auch unter ähnlichen Bedingungen außerhalb des $\triangle$ gefordert werden.

975. Aufgabe. Gegeben K, P und P' in K; man soll einen Durchmesser ziehen, in welchem sich der Abstand der aus P und P' auf denselben gefällten Perpendikel = a bestimmt.

Die Aufgabe ist nur eine andere Einkleidung für 753.

976. Fig. 170. Aufgabe. Ein festliegendes $\triangle$ ABC ist durch Drehung um einen Punkt X in die Lage A'B'C' gekommen; man soll X bestimmen.

Analysis. Da XA = XA' sein muß, so hat A einen Kreisbogen beschrieben, von welchem AA' die Sehne ist, und es ergiebt sich deshalb nach 72 ein Ort für X; in derselben Art bestimmt sich durch BB' ein zweiter Ort für X, folglich auch der Punkt X selbst.

977. Aufgabe. In ein festliegendes $\square$ ein anderes mit der Seite a einzuschreiben.

Analysis. Es ergiebt sich leicht, daß die Mittelpunkte beider $\square$ in einander fallen müssen. Denkt man sich also das gesuchte $\square$ um jenen Punkt in eine $\neq$ Lage mit dem gegebenen gedreht, so fällt a zwischen die Diagonalen des letzteren, und kann deshalb nach 94 festgestellt werden, wodurch sich schließlich auch die gesuchte Lage ableiten läßt.

Auflösung. Ziehe beide Diagonalen in dem gegebenen $\square$, schiebe zwischen dieselben a $\neq$ zu einer Seite nach 96,

beſchreibe um den Mittelpunkt mit dem auf den Diagonalen erhaltenen Abſtande von a eine Kreislinie, und verbinde 4 nicht aufeinanderfolgende, in den Seiten entſtandene Durchſchnittspunkte, ſo iſt das geforderte ⊡ gezeichnet.

Determination. Die halbe Diagonale des gegebenen ⊡ iſt das Minimum für a, und außerdem muß a < ſein als die Seite des gegebenen ⊡, damit die Aufgabe möglich iſt.

Zuſatz. Es ſind zwei Reſultate möglich.

978. Aufgabe. In einem nicht vollendeten Kreisbogen iſt P gegeben; man ſoll durch P ohne Benutzung des Mittelpunkts eine Berührungslinie ziehen.

Auflöſung. Schneide von P aus zwei gleiche Sehnen ab, und lege zu der Verbindungslinie der entſtandenen beiden Durchſchnittspunkte eine ∓ durch P.

979. Fig. 171. Aufgabe. Durch den Schneidungspunkt A zweier feſtliegenden Kreislinien ſoll eine von denſelben begrenzte Linie XY gelegt werden, die in jedem ⊙ einen Abſchnitt beſtimmt, deſſen zugehöriger Peripherie ∠ in dem einen dieſelbe Größe erhält wie in dem andern.

Analyſis. Verbindet man M und M′ mit X, A und Y, ſo wäre die Aufgabe gelöſt, wenn ∠ XMA = ∠ AM′Y, alſo auch ∠ XAM = ∠ AYM′, folglich MA ∓ M′Y wäre. Durch MA und M′ iſt aber die Lage von M′Y und Y, alſo auch mittelſt A die Lage von XY beſtimmt.

Zuſatz. Es ergeben ſich zwei Reſultate XY und X′Y′.

980. Fig. 43. Aufgabe. Durch den Schneidungspunkt P zweier feſtliegenden Kreislinien ſoll eine Linie PX′Y′ ſo gelegt werden, daß ſich PX′ = X′Y′ ergiebt.

Analyſis. Von der Höhe werden in der Grundlinie eines △ zwei gleiche Abſchnitte gebildet. Verſucht man nun in Beziehung hierauf PX′ und X′Y′ als ſolche zu betrachten,

errichtet also in X' den ⊥ X'D, so zeigt sich DY' gleich dem Durchmesser DMP, weshalb die Punkte D und Y' bestimmbar sind, folglich auch die Lage von PX'Y' gefunden ist.

981. Fig. 171. **Aufgabe.** (Analogie zu 372.) **Durch den Schneidungspunkt A zweier festliegenden Kreislinien soll eine Linie AY'X' so gelegt werden, daß sich AX' — AY' = d ergiebt.**

Analysis. Fällt man aus M und M' die ⊥⊥ MF und M'G auf die geforderte Linie, so ergiebt sich AF — AG oder $FG = \frac{AX'}{2} - \frac{AY'}{2}$, also $= \frac{d}{2}$, weshalb man in Beziehung auf die drei Punkte M, M', A 755 zu lösen hat.

982. **Aufgabe. In einen ⊙ zwei Sehnen mit den Längen a und b unter bestimmten →→ einzutragen.**

Analysis. Die Sehnen a und b bestimmen nach 316 zwei Kreisörter; man hat also nur 282 doppelt anzuwenden, um die Lagen von a und b festzustellen.

Zusatz. Es ergeben sich 4 Resultate.

983. Fig. 172. **Aufgabe. Gegeben P und zwei konzentrische ⊙⊙ K und K'; man soll durch P eine Linie ziehen, deren zwischen K und K' fallender Abschnitt XY = a wird.**

Analysis. XY, r und r' bestimmen das △ MXY und mittelst desselben die Höhe MD; hiedurch ergiebt sich aber die Lage von PXYD.

Auflösung. Schneide zwischen K und K', CG = a an einer beliebigen Stelle ab, fälle aus M den ⊥ MF, beschreibe mit demselben um M einen ⊙, und ziehe zu diesem aus P eine Berührungslinie.

Beweis. △ MGF ≅ MYD, hieraus folgt △ MCG ≅ △ MXY, also XY = a.

Determination. Ein Maximum für XY bildet der zwischen K und K' fallende Abschnitt, welcher sich durch eine aus P an K' gezogene Berührungslinie ergiebt; ein Minimum

der der gleichfalls von K und K' begrenzte und von der Lage PM bestimmte Abschnitt.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

984. Fig. 173. Aufgabe. Gegeben K, und P außerhalb K; man soll durch P eine Sekante PXY so legen, daß sich der äußere Abschnitt PX gleich der Sehne XY bestimmt.

Analysis. 1) Betrachtet man in Rücksicht auf 123 X als den Mittelpunkt eines $\square$, dessen Spitzen in P und M fallen, so ergiebt sich $PN = MY = r$, und $NX = XM$, also $MN = 2r$, weshalb Punkt N, folglich auch X, und die Lage von PXY gegeben ist.

Analysis. 2) Von der Höhe werden in der Grundlinie eines $\triangle$ zwei gleiche Abschnitte gebildet. Versucht man nun in Beziehung hierauf PX und XY als solche zu betrachten, errichtet also in X den $\perp$ XO, so zeigt sich OP = dem Durchmesser OY, weshalb die Punkte O und Y bestimmbar sind, folglich auch die Lage von PY gefunden ist.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der äußere Abschnitt einer von P durch M gezogenen Sekante $> 2r$ ist.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

985. Fig. 174. Aufgabe. In einen Quadranten einen beide Radien und den Bogen berührenden $\odot$ zu beschreiben.

Analysis 1). Nach 276 ꝛc. muß S in der Halbirungslinie des $\angle$ M liegen, ist also gegeben, und es käme nur darauf an den $\perp$ $\mu E = \mu S$ zu bestimmen. Da aber der $\perp$ aus S auf MB gegeben ist, hat man hiefür 758 zu verzeichnen.

Analysis 2). Da S nach Analysis 1) gegeben ist, kann man auch die S durchlaufende Tangente AB, welche ebenfalls von dem gesuchten $\odot$ berührt werden muß. Hieraus folgt, daß man zur Feststellung von μ nur $\angle$ A zu halbiren hat.

986. Aufgabe. Um die 3 Winkelspitzen eines festliegend gegebenen △ 3 sich v. A. berührende ⊙⊙ zu konstruiren.

Analysis. Nach 301. 1) müssen die Berührungspunkte in die Seiten fallen, weshalb die in denselben errichteten ⊥⊥ gemeinschaftliche Berührungslinien bilden. Verbindet man nun den Durchschnittspunkt zweier von diesen ⊥⊥ mit der Spitze eines ∠, so ist dieser, wie sich leicht ergiebt, halbirt. Dasselbe zeigt sich durch Wiederholung bei einer zweiten ∠spitze, also treffen die 3 Berührungslinien in einem gegebenen Punkte, nämlich dem Mittelpunkte des ⊙ im △, zusammen. Aus diesem lassen sich nun die Berührungspunkte in den Seiten, und mittelst derselben die geforderten ⊙⊙ ableiten. (Vergl. 1581.)

987. Aufgabe. Drei sich gegenseitig v. A. berührende gleiche ⊙⊙ sollen in einen festliegend gegebenen ⊙ so gezeichnet werden, daß der letztere gleichfalls von jedem der ersteren berührt wird.

Analysis. Verbindet man die 3 gesuchten Mittelpunkte, so ergiebt sich ein △. Hieraus folgt, wenn man von dem gegebenen Mittelpunkte Radien nach den Berührungspunkten zieht, daß das zwischen denselben liegende △ ebenfalls gleichseitig sein muß. Da sich aber dies △ konstruiren läßt, so hat man ⫩ zu einer Seite zwischen 2 Radien eine Linie zu ziehen, welche so groß ist als die zwischen beide ⫩⫩ fallenden Abschnitte der Radien; siehe 760. Mittelst dieser Linie müssen sich die gesuchten Mittelpunkte in den vorhergenannten 3 Radien bestimmen.

988. Aufgabe. In ein festliegendes △ drei gleiche ⊙⊙ zu beschreiben, von denen jeder die beiden übrigen und 2 Seiten des △ berührt.

Analysis. Verbindet man die Mittelpunkte zweier ⊙⊙, und legt durch dieselben Punkte und die ∠spitzen, deren Schenkel jene ⊙⊙ berühren, gerade sich durchschneidende Linien, so entstehen 2 △△, deren gemeinschaftliche Spitze der

Mittelpunkt des △ ist. In dem kleineren △ halbirt der Berührungspunkt die Grundlinie, folglich trifft die gemeinschaftliche Tangente den Mittelpunkt des △, und es ergiebt sich daraus, daß man aus diesem Punkt ⊥ ⊥ auf die Seiten zu fällen hat, und schließlich in die drei entstandenen ≅ ▱▱ nach 261 Berührungskreise zeichnen muß.

989. Fig. 175. Aufgabe. Ein Viereck so zu konstruiren, daß sich die beiden ⊙⊙, welche sich in die von einer Diagonale gebildeten zwei △△ zeichnen lassen, in dieser Diagonale berühren.

Analysis. Um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen, müßte B′C — B′A sowohl = HC — AI als auch = GC — AF, folglich HC — AI = CG — AF sein. Dies fände aber statt (= zugelegt und abgenommen), wenn DC — AD = BC — AB, oder DC + AB = BC + AD wäre. Hieraus folgt nach 297, daß jedes ▱ um einen ⊙ das geforderte ▱ bildet.

990. Fig. 176. Lehrsatz. Wenn man außerhalb einer Kreislinie K zwei Punkte P und P′ so annimmt, daß weder ihre Verbindungslinie noch deren Verlängerung K begegnet, so bestimmt unter allen Punkten von K derjenige B das Minimum der Summe zweier von P und P′ nach einem beliebigen Punkte in K führenden Linien, in welchem diese Linien PB und P′B mit dem nicht zwischen dieselben fallenden Radius MB gleiche ∢ MBP und MBP′ bilden.

Beweis. Zieht man durch B die Berührungslinie L, so ergeben sich die ∢, welche PB und P′B mit L bilden, von gleicher Größe, weshalb nach 773 PB + P′B in Beziehung auf L ein Minimum ist. Nimmt man in K einen beliebigen Punkt D an, so fällt derselbe nach der Voraussetzung nicht zwischen L und P oder P′, folglich ist PD + P′D > PI + P′I, also ferner > PB + P′B, und deshalb PB + P′B auch in Beziehung auf K ein Minimum.

Anmerkung. Das Maximum der Summe zweier aus P und P′ nach einem Punkte in K führenden Linien ergiebt sich mittelst der Ellipse durch folgende Analysis. Wäre das Maximum dieser Summe bekannt, so müßte auch eine Ellipse gegeben sein, welche P und P′ als Brennpunkte und das Maximum zur Summe der Leitstrahlen hätte. Es kömmt also zur Bestimmung des in K gesuchten Punktes nur darauf an: eine K begegnende Ellipse für die Brennpunkte P und P′ mit der möglich größten Summe zweier Leitstrahlen zu konstruiren. Die Ellipse, welche diese Bedingungen erfüllt, wird aber K von Innen berühren, es ergiebt sich also die Feststellung des gesuchten Maximums und des entsprechenden Punktes in K durch Konstruktion einer vollständig bestimmten Ellipse. Uebrigens zeigt sich analog dem Minimum, daß die Linien des Maximums gleichfalls mit dem Radius r, welcher aber hier zwischen dieselben fällt, gleiche $\measuredangle$ bilden, da sich das Minimum auch durch eine K (aber von Außen) berührende Ellipse feststellt, und beidemal die beiden krummen Linien gemeinschaftliche Tangente mit den Leitstrahlen gleiche $\measuredangle$ bilden muß.

Durch eine ähnliche Analysis bestimmt sich das Minimum und Maximum der Differenz zweier aus P und P′ nach einem Punkte in K führenden Linien mittelst der Konstruktion einer K von Außen oder von Innen berührenden Hyperbel, deren Brennpunkte P und P′ sind.

991. Fig. 148. Aufgabe. In einem festliegend gegebenen $\triangle$ einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Summe der Abstände desselben von den $\measuredangle$spitzen, also $AX + BX + CX$ ein Minimum ist.

Analysis. Denkt man sich einen Abstand AX unveränderlich, so müßte nach 990 $\angle AXB = \angle AXC$ sein, damit $BX + CX$ ein Minimum wäre. Nimmt man ferner BX unveränderlich an, so ergäbe sich $AX + CX$ als Minimum, wenn auch $\angle AXB = \angle BXC$ wäre. Ue-

behauptet muß also $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = \frac{2}{3}R$ sein, damit sich $AX + BX + CX$ als Minimum ergiebt. Hiedurch sind aber durch 2 Seiten des $\triangle$ und $\frac{2}{3}R$ zwei Oerter für X nach 320 konstruirbar, und es bestimmt sich X selbst mittelst dieser Oerter.

992. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Berührungslinie XY an K legen, deren $\perp$ Abstände von P und P' einander = werden.

Analysis. Lage 1). XY schneidet die Verbindungslinie von P und P'.

Die entstandenen $\triangle\triangle$ sind $\sim$, es bestimmt also die Mitte von P'P einen Punkt der gesuchten Linie, welcher mittelst 272 die Lage von XY ergiebt.

Lage 2). XY schneidet nicht die Verbindungslinie von P und P'.

Aus der Bedingung der gleichen Entfernung folgt, daß XY $\nparallel$ PP' fallen muß, also 282 anzuwenden ist.

Zusatz. In jeder Lage sind 2 Resultate möglich.

Anmerkung. Die nachfolgenden Aufgaben dieses Kapitels bilden sämmtlich Analogieen zu den von 748 bis 758 hingestellten Aufgaben, da in jenen nur ein oder mehrere Kreise statt der in den letzteren gegebenen Punkte unter die Bedingungen aufgenommen sind.

993. Fig. 177. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß der $\perp$ Abstand derselben von P' mit der $\perp$ XY an K gezogenen Berührungslinie gleich wird.

Analysis. Zieht man durch M eine $\nparallel$ zu der Berührungslinie, so ergiebt sich in beiden Lagen 748 zu lösen.

994. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Berührungslinie XY an K legen, deren $\perp$ Abstand von P mit der $\perp$ XY an K' gezogenen Berührungslinie gleich wird.

Analysis. Führt ähnlich wie in 993 zu 992.

995. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll

eine Linie XY so durch P legen, daß zwei ⊥ XY an K und K' gezogene Berührungslinien einander gleich werden.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 993.

996. Fig. 178. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß zwei ⊥ XY an K' und K'' gezogene Tangenten einander gleich werden.

Analysis. Zieht man durch M' und M'' ∓ ∓ zu den ⊥ XY stehenden Berührungslinien, so erhält man 992 zu konstruiren.

997. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine PP' treffende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe der aus P und P' auf XY gefällten ⊥⊥ = s ergiebt.

Analysis. Verfährt man ganz wie in 749, so ergiebt sich die → von XY, und damit auch die Lage nach 282.

998. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll durch P eine P'M treffende Linie XY so legen, daß sich die Summe der ⊥ XY an K gezogenen Berührungslinie mit dem aus P' auf XY gefällten ⊥ = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Berührungslinie, so reduzirt sich die Aufgabe auf 749.

999. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine PM' treffende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe der ⊥ XY an K' gezogenen Tangente mit dem aus P auf XY gefällten ⊥ = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M' eine ∓ zu der ⊥ XY stehenden Tangente, so erhält man 997 zu konstruiren.

1000. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine MM' treffende Linie XY so durch P legen, daß sich die Summe der ⊥ XY an K und K' gezogenen Berührungslinien = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M und M' ∓ zu den ⊥ XY stehenden Tangenten, so reduzirt sich die Aufgabe auf 749.

1001. Fig. 179. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine M'M'' treffende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe der ⊥ XY an K' und K'' gezogenen Berührungslinien = s ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1000 zu 998.

1002. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 997, nur soll XY PP' selbst nicht treffen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so ergiebt sich die Summe der auf dieselbe aus P und P' gefällten ⊥ ⊥ = s ± 2r, und die Aufgabe reduzirt sich hiedurch auf 750.

1003. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 998, nur soll XY MP' selbst nicht treffen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Tangente, so reduzirt sich die Aufgabe auf 750.

1004. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 999, nur soll XY M'P selbst nicht treffen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der ⊥ XY stehenden Berührungslinie, so erhält man 1002 zu verzeichnen.

1005. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1000, nur soll XY MM' selbst nicht treffen.

Analysis. Zieht man durch M und M' ∓∓ zu den ⊥ XY stehenden Berührungslinien, so erhält man 750 zu konstruiren.

1006. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1001, nur soll XY M'M'' selbst nicht treffen.

Analysis. Zieht man durch M' und M'' ∓∓ zu den ⊥ XY stehenden Tangenten, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1002.

1007. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine PP' selbst nicht treffende Berührungslinie

XY so an K legen, daß sich die Differenz der aus P und P′ auf XY gefällten ⊥ ⊥ = d ergiebt.

Analysis. Verfährt man ganz wie in 751, so ergiebt sich die → von XY, und damit auch die Lage nach 282.

1008. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll durch P eine P′M selbst nicht treffende Linie XY so legen, daß sich die Differenz zwischen der ⊥ XY an K gezogenen Berührungslinie und dem aus P′ auf XY gefällten ⊥ = d ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Berührungslinie, so ergiebt sich 751 zu konstruiren.

1009. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine PM′ selbst nicht treffende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Differenz zwischen der ⊥ XY an K′ gezogenen Tangente und dem aus P auf XY gefällten ⊥ = d ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M′ eine ∓ zu der ⊥ XY stehenden Tangente, so erhält man 1007 zu konstruiren.

1010. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine MM′ selbst nicht treffende Linie XY so durch P legen, daß sich die Differenz zwischen den ⊥ XY an K und K′ gezogenen Berührungslinien = d ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M und M′ ∓∓ zu den ⊥ XY stehenden Tangenten, so reduzirt sich die Aufgabe auf 751.

1011. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll eine M′M″ selbst nicht treffende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Differenz zwischen den ⊥ XY an K′ und K″ gezogenen Berührungslinien = d ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1010 zu 1007.

1012. Aufgabe., Uebereinstimmend mit 1007, nur soll XY PP′ durchschneiden.

Analysis. XY bildet mit den beiden ⊥ ⊥ ein ▭, dessen Diagonale PP′ ist; man kennt also nach 172. b. den Radius eines um die Mitte von PP′ beschriebenen Berührungskreises zu XY, welcher $= \frac{d}{2}$ sein muß. Hiedurch reduzirt sich die Aufgabe auf 318.

1013. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1008, nur soll XY MP′ durchschneiden.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Berührungslinie, so ergiebt sich 752 zu konstruiren.

1014. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1009, nur soll XY PM′ durchschneiden.

Analysis. Zieht man durch M′ eine ∓ zu der ⊥ XY stehenden Tangente, so erhält man 1012 zu konstruiren.

1015. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1010, nur soll XY MM′ durchschneiden.

Analysis. Zieht man durch M und M′ ∓∓ zu den ⊥ XY stehenden Tangenten, so ergiebt sich 752 zu verzeichnen.

1016. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1011, nur soll XY M′M″ durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1015 zu 1012.

1017. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß die Summe der ⊥ Abstände des Berührungspunkts von den auf XY aus P und P′ gefällten ⊥ ⊥, als eine einzige gerade Linie genommen, die Länge s erhält.

Analysis. Zieht man durch P oder P′ eine ∓ zu XY, so bestimmen s und PP′ mittelst eines △ die ⇀↽ von XY; 282 giebt schließlich die geforderte Lage.

1018. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die Summe der ⊥ Abstände des auf XY aus P′ gefällten ⊥ und der ⊥ XY an K gezogenen Berührungs-

linie, als eine einzige gerade Linie genommen, = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M eine ⫩ zu der Berührungslinie, so erhält man 753 für die Länge s ± r zu konstruiren.

1019. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe der ⊥ Abstände des Berührungspunkts von dem aus P auf XY gefällten ⊥, und der ⊥ XY an K' gezogenen Tangente, als eine einzige gerade Linie genommen, = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M' eine ⫩ zu der ⊥ XY stehenden Tangente, so reduzirt sich die Aufgabe für die Länge s ± r' auf 1017.

1020. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die Summe der ⊥ Abstände dieses Punkts von den ⊥ XY an K und K' gezogenen Tangenten, als eine einzige gerade Linie genommen, = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M und M' ⫩⫩ zu den Tangenten, so reduzirt sich die Aufgabe nach den verschiedenen denkbaren Lagen derselben für die Längen s ± (r ± r') auf 753.

1021. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß sich die Summe der ⊥ Abstände des Berührungspunkts von den ⊥ XY an K' und K'' gezogenen Tangenten, als eine einzige gerade Linie genommen, = s bestimmt.

Analysis. Zieht man durch M' und M'' ⫩⫩ zu den ⊥ XY stehenden Tangenten, so ergiebt sich die Entfernung derselben, nach den verschiedenen denkbaren Lagen, = s ± (r' ± r'') und es reduzirt sich die Aufgabe hiemit auf 1017. (16 Resultate.)

1022. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1017, nur soll der Berührungspunkt nicht zwischen die ⊥⊥ fallen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so erhält man 754 zu lösen.

1023. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1018, nur soll P nicht zwischen den ⊥ und die Tangente fallen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Tangente, so bestimmt sich die Summe der Entfernungen des Punktes P von der ∓ und dem aus P′ gefällten ⊥ = s ± r, und es ist danach 754 zu konstruiren.

1024. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1019, nur soll der Berührungspunkt nicht zwischen den ⊥ und die Tangente fallen.

Analysis. Führt in derselben Art wie 1023 zu 1022.

1025. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1020, nur soll P nicht zwischen die beiden Tangenten fallen.

Analysis. Zieht man durch M und M′ ∓∓ zu den ⊥ XY stehenden Tangenten, so ergiebt sich die Summe der Entfernungen des Punktes P von den beiden ∓ ∓, nach den verschiedenen denkbaren Lagen der Tangenten, = s ± (r ± r′), und es reduzirt sich die Aufgabe hiemit auf 754.

1026. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1021, nur soll der Berührungspunkt nicht zwischen die beiden ⊥ XY stehenden Tangenten fallen.

Analysis. Führt ganz wie in 1025 zu 1022.

1027. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß die Differenz der ⊥ Abstände des Berührungspunkts von den auf XY aus P′ und P″ gefällten ⊥⊥, zwischen welche der Berührungspunkt nicht fallen soll, sich = d ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe auf 755, und es ist schließlich 282 bei der Konstruktion anzuwenden.

1028. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die Differenz der ⊥ Abstände des Punktes P von dem auf XY aus P' gefällten ⊥ und der ⊥ XY an K gezogenen Berührungslinie, zwischen welche beiden ⊥⊥ P nicht fallen soll, sich = d bestimmt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Tangente, so erhält man die Differenz der Entfernungen des Punktes P von dem ⊥ und der ∓ = d ± r, und hat daher nur 755 zu lösen.

1029. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß die Differenz der ⊥ Abstände des B.-Punktes B von dem auf XY aus P gefällten, und der ⊥ XY an K' gezogenen Berührungslinie, zwischen welche beiden ⊥⊥ B nicht fallen soll, sich = d bestimmt.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1028 zu 1027.

1030. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die Differenz der ⊥ Abstände des Punktes P von den ⊥ XY an K und K' gezogenen Tangenten, zwischen welche P nicht fallen soll, sich = d bestimmt.

Analysis. Zieht man durch M und M' ∓ ∓ zu den beiden Tangenten, so ergiebt sich die Differenz der Entfernungen des Punktes P von den beiden ∓ ∓, nach den verschiedenen Lagen der Tangenten, = d ± (r ± r'), und es reduzirt sich die Aufgabe hiemit auf 755.

1031. Aufgabe. Gegeben K, K, K''; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß die Differenz der Entfernungen des Berührungspunktes von den ⊥ XY an K' und K'' gezogenen Tangen-

len, zwischen welche derselbe nicht fallen soll, sich = d bestimmt.

Analysis. Führt in derselben Art wie 1030 zu 1027.

1032. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1027, nur soll der Berührungspunkt zwischen beide ⊥⊥ fallen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓, so reduzirt sich die Aufgabe auf 756, und es ist bei der Konstruktion schließlich 282 anzuwenden.

1033. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1028, nur soll P zwischen den ⊥ und die Tangente fallen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu der Tangente, so bestimmt sich die Differenz der Abstände des Punktes P von dem ⊥ und der ∓ = d ± r, und es reduzirt sich die Aufgabe hiemit auf 756.

1034. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1029, nur soll der Berührungspunkt zwischen den ⊥ und die Tangente fallen.

Analysis. Führt in derselben Art wie 1033 zu 1032.

1035. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1030, nur soll P zwischen beide Tangenten fallen.

Analysis. Zieht man durch M und M' ∓ ∓ zu den beiden Tangenten, so ergiebt sich die Differenz der ⊥ Abstände des Punktes P von den beiden ∓ ∓, nach den verschiedenen möglichen Lagen der Tangenten, = d ± (r ± r'), und es reduzirt sich die Aufgabe hiemit auf 756.

1036. Aufgabe. Uebereinstimmend mit 1031, nur soll der Berührungspunkt zwischen beide Tangenten fallen.

Analysis. Führt in derselben Art wie 1035 zu 1032.

1037. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die ⊥ Abstände des Berührungspunkts von den

aus P und P′ auf XY gefällten ⊥⊥ in derselben Größe bestimmen.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe auf 757, und es ist schließlich 282 anzuwenden.

1038. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß dieser Punkt die Entfernung zwischen dem aus P′ auf XY gefällten ⊥ und der ⊥ XY an K gezogenen Tangente halbirt.

Analysis 1). Zieht man durch M eine ∓ zu der Tangente, so bestimmt sich die Differenz zwischen den Abständen des Punktes P von dem ⊥ und der ∓ = r; man hat also 756 zu verzeichnen.

Analysis 2). Fig. 180. Verlängert man BX und P′P bis zu ihrem Durchschnittspunkt G, so wäre PX = PY, wenn man △ XPG ≅ △ YP′P hätte. Dazu müßte aber P′P = PG sein. Bestimmt man folglich G nebst der von G nach K führenden Tangente GB, so muß sich die Lage von XY ⊥ GB ergeben.

1039. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß der entstehende Berührungspunkt die Entfernung zwischen dem aus P auf XY gefällten ⊥ und der ⊥ XY an K′ gezogenen Tangente halbirt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1038, u. s. w.

1040. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß dieser Punkt die Entfernung zweier ⊥ XY an K und K′ gezogenen Tangenten halbirt.

Analysis. 1). Zieht man durch M und M′ ∓ ∓ zu den Tangenten, so bestimmt sich die Differenz der ⊥ Abstände des Punktes P von den beiden ∓∓ = r ± r′, weshalb die Aufgabe sich auf 756 reduzirt.

Analyſis 2). Fig. 181. In Rückſicht auf die zu der Aufgabe 1038 angeführte zweite Analyſis, wird man durch Analogie darauf geleitet, ſo wie dort, Fig. 180., P′ nach G verlegt wurde, hier, Fig. 181., die Kreislinie K in die Verlängerung von PM, in gleichem Abſtande von P um O, zu verzeichnen, und dann zu den ⊙⊙ um O und M′ eine gemeinſchaftliche Tangente, ſtatt der in jener Aufgabe von G nach K führenden Berührungslinie, zu ziehen. Die nähere Unterſuchung dieſer Konſtruktion zeigt, daß ſich wirklich hiedurch die Lage von XY ergiebt.

Auflöſung zu Analyſis 2). Verlängere PM um ſich ſelbſt bis O, beſchreibe K um O, ziehe zu den ⊙⊙ um O und M′ nach 318 eine gemeinſchaftliche Tangente, fälle PX ⊥ B′T, und ziehe die Tangente BY an K ∓ B′T nach 282, ſo erhält man PX = PY.

Beweis. Fällt man aus O und M die ⊥⊥ ON und MQ auf XY, ſo ergiebt ſich PN = PQ, da △ ONP ≅ △ PMQ iſt. Nun iſt aber nach der Konſtruktion OT = MB, alſo auch NX = QY, und deshalb PX = PY.

1041. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man ſoll eine Tangente XY ſo an K legen, daß der Berührungspunkt die Entfernung zweier ⊥ XY an K″ und K′ gezogenen Tangenten halbirt.

Analyſis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, ſo reduzirt ſich die Aufgabe auf 1040, ſo daß man nur ſchließlich bei der Konſtruktion 282 anzuwenden hat.

II. C. Dritter Abschnitt.

Aufgaben, welche durch die Lehre von der Aehnlichkeit lösbar sind.

1stes Kapitel.

Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben.

In Hinsicht der ▱ Aufgaben siehe Anmerk. 118.

1042. Aufgabe. △ aus α, (b : h).

Analysis. Folgt aus 430 und 498.

Anmerkung. Die vorstehende Aufgabe mit vielen anderen dieses Kapitels sind absichtlich unbestimmt gestellt, da, wenn man auch eine dritte Bedingung hinzunimmt, es doch hauptsächlich auf die aus den anderen beiden Bedingungen hervorgehende Gestalt des △ bei der Auflösung ankömmt, also der Schüler in der Bestimmung derselben vorläufig besonders eingeübt werden muß.

1043. Aufgabe. △ aus α, (p : q).

Analysis. Ergiebt sich durch 320 und 501.

1044. Aufgabe. △ aus α, (a : h).

Analysis. Folgt aus 320, 79 und 501.

1045. Aufgabe. △ aus β, (a : r).

Analysis. Folgt aus 491 ꝛc.

1046. Aufgabe. △ aus h, h'.

Analysis 1). Zieht man durch den Endpunkt von h in a eine ∓ zu h', so bestimmt sich, da h im △ zugleich t ist, ein △ mit der Hypotenuse h und der Kathete $\frac{h'}{2}$.

Analysis 2). Da h : h' = b : a nach 480 ist, ergiebt sich mittelst 507 die Gestalt des △, aus welcher durch h die Größe wie in 440 abgeleitet werden kann.

1047. Aufgabe. △ aus h, t'.

Analysis. Wie in der Analysis 1) von 1046 bestimmt sich ein △ mit der Hypotenuse t' und einer Kathete $\frac{h}{2}$.

1048. Aufgabe. △ aus h', ϱ.

Analysis. Der Berührungspunkt in a halbirt diese Seite. Zieht man also durch denselben eine ∓ zu h', so bestimmt sich diese $= \frac{h'}{2}$, welche Länge den Berührungspunkt selbst durch 79 ergiebt, sobald man eine beliebige Tangente an den ⊙ mit ϱ legt. Hiedurch läßt sich schließlich das △ ABC durch die Ziehung einer zweiten und dritten Tangente feststellen.

1049. Aufgabe. △ aus a, α, $t_{(m:n)}$.

Analysis. a und α bestimmen nach 320 einen Ort für A, theilt man also a nach dem Verhältniß m : n, so ergiebt sich der Punkt, von dem aus t abzuschneiden ist.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1050. Aufgabe. △ aus a, h, $t_{(m:n)}$.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1049, aber mittelst des Orts 79.

1051. Fig. 101. a. **Aufgabe.** △ aus a, t, t''.

Analysis 1). Zieht man HG ∓ t, so bestimmt sich FG $= \frac{1}{2}$a, HG $= \frac{1}{2}$t, also △ CHG aus CG $= \frac{1}{4}$a, CH $=$ t'', HG $= \frac{t}{2}$, u. s. w.

Analysis 2). Da sich die Transversalen nach dem Verhältniß 1 : 2 schneiden, bestimmt sich △ EFC aus drei Seiten $\frac{1}{2}$a, $\frac{1}{2}$t, $\frac{2}{3}$t''.

Auflösung. Zeichne △ ECF aus FC $= \frac{1}{2}$a, EF $= \frac{1}{2}$t, und EC $= \frac{2}{3}$t'', verlängere EF um 2EF bis A, EC um $\frac{1}{2}$EC bis H, ziehe AC, und verlängere AH bis B, so ist ABC das geforderte △.

Beweis. △ AEC ∼ △ HEF, also ist FH ∓ AC, und deshalb CB : BF $=$ AC : HF $=$ EC : EH $=$ 2 : 1,

woher sowohl AF oder t als CH oder t″ die zugehörigen Seiten halbiren.

Anmerkung. Bei diesen und ähnlichen Aufgaben ist es nothwendig, den Anfänger Auflösung und Beweis vollständig machen zu lassen, da sich demselben in der Regel bei diesen Theilen der Aufgabe mehr Schwierigkeiten als bei der Analysis ergeben, welches auch daraus erklärlich ist, daß sich die letztere, wie in der vorstehenden Aufgabe, nicht selten auf mehreren Wegen bilden läßt.

1052. Aufgabe. △ aus a, t′, t″.

Analysis. Siehe g. Betr. §. 2., §. 25. und §. 26.

1053. Aufgaben. △ aus h, h′, t.

△ aus h, h′, ∠ (ta).

Analysis. t oder ∠ (ta) und h bestimmen ein ◺. Zieht man durch den Schneidungspunkt von t mit a eine ∓ zu h′, so ergiebt sich ein zweites ◺ durch t und $\frac{2}{3}$h′, und hiemit das verlangte △ ABC.

1054. Aufgabe. △ aus h, t, t′.

Auflösung. Zeichne ein ◺ aus h, t, schneide aus dem Schwerpunkt (Endpunkt der Länge $\frac{2}{3}$t, oder $\frac{2}{3}$t′, oder $\frac{2}{3}$t″ von den ∠spitzen aus gerechnet) die Lage der Seite a mit $\frac{2}{3}$t′ u. s. w.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1055. Aufgaben. △ aus h, h′, t″.

▱ aus h, h′, c′.

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt von t″ in c ∓∓ zu h und h′, so bestimmen sich 2 ◺◺, und mittelst derselben die Lagen von a und b, so daß man zwischen diese nur h oder h′ nach 79 zu schieben hat, um das verlangte △ ABC zu erhalten.

1056. Fig. 161. a. Aufgabe. △ aus h, t′, t″.

Analysis. Ist auf verschiedene Weise möglich, z. B.: der ⊥ aus dem Schwerpunkt auf a ist = $\frac{1}{3}$h, folglich bestimmt sich ein △ BEC mit den Seiten $\frac{2}{3}$t′, $\frac{2}{3}$t″ und der ihren Durchschnittspunkt treffenden Höhe $\frac{1}{3}$h.

1057. Aufgabe. △ aus a, β und dem in der Mitte von b errichteten und durch c begrenzten ⊥.

Analysis. Zieht man durch C eine ∓ zu dem gegebenen ⊥ bis c, so erhält man denselben doppelt, und es bestimmt sich dadurch ein △ aus dieser ∓, a und β, u. s. w.

1058. Aufgaben.

1) △ aus h″, ∠ (ta), ∠ (tb).

2) △ aus (a + b), ∠ (tb), ∠ (tc).

3) △ aus (a + b + c), ∠ (tb), ∠ (t′b).

Analysis. △ ABC ist nach 498 der Gestalt nach bestimmt, und ergiebt sich der Größe nach, wenn man bei 1) wie in 440, bei 2) und 3) wie in 442 verfährt, und die Konstruktion bei 2) und 3) auch wie in 440 vollendet.

1059. Aufgabe. △ aus α, m, ∠ (ta).

Analysis. Das △ ergiebt sich der Gestalt nach, wenn man über einer beliebigen Linie a nach 320 den Ort für die ∠spitze von α konstruirt, und an die Mitte derselben Linie ∠ (ta) zeichnet. Die Größe bestimmt sich wie in 440.

1060. Aufgabe. △ aus α, (m : h).

Analysis. Folgt aus 489 und 498.

1061. Aufgabe. △ aus ($\beta - \gamma$), (b : c).

Analysis. Folgt aus 139 und 406.

1062. Aufgabe. △ aus α, (h′ : h″).

Analysis. Folgt aus 482 und 406.

1063. Aufgabe. △ aus ∠ (tb), (a : c).

Analysis. Folgt aus 320 und 501.

1064. Aufgabe. △ aus ∠ (tb), (b : c).

Analysis. Ergiebt sich mittelst 123 und 409.

1065. Aufgabe. △ aus α, (t : h).

Analysis. Verfährt man nach 123, so ergiebt sich durch $2R - \alpha$ nach 320 ein Ort. (t : h) bestimmt nach 410 ein △, und mittelst der Lage einer Kathete desselben den Scheitel von $2R - \alpha$ in dem genannten Ort, u. s. w.

1066. Aufgabe. $\triangle$ aus α, $(t : t')$.

Analysis. Beschreibt man über einer beliebigen Linie t' den mittelst α nach 320 gegebenen Ort, so bestimmt sich der Scheitel von α, wenn man aus dem Schwerpunkt mit einer von t' und $(t : t')$ bedingten Linie $\frac{2}{3}t$ einen $\odot$ beschreibt u. s. w.

1067. Aufgabe. $\triangle$ aus α, $(a : \varrho)$.

Analysis. Durch 326 reduzirt sich die Aufgabe auf 1044.

1068. Aufgabe. $\triangle$ aus r, t'', $(a : h')$.

Analysis. $(a : h')$ giebt γ nach 430, γ und r aber c nach 321; man hat also $\triangle$ aus c, r, t'' zu konstruiren.

1069. Aufgaben. $\triangle$ aus $(a + b)$, c, $(b : h'')$.
$\triangle$ aus $(a - b)$, c, $(b : h'')$.

Analysis. $(b : h'')$ giebt α nach 430, man hat also $\triangle$ aus $(a + b)$, c, α (637), oder $\triangle$ aus $(a - b)$, c, α (638) zu konstruiren.

1070. Aufgaben. $\triangle$ aus $\alpha : \beta = 1 : 7$
$\triangle$ aus $\alpha : \beta = 2 : 3$
$\triangle$ aus $\alpha : \beta = 2 : 5$
$\triangle$ aus $\alpha : \beta = 6 : 7$
$\triangle$ aus $\alpha : \beta = 2 : 1$
$\triangle$ aus $\alpha : \beta = 4 : 3$
} und einer Linie.

Analysis. Da $\beta = \gamma$ ist, sind die Verhältnisse der 3 $\measuredangle$ (z. B. $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 7 : 7$ in der ersten Aufgabe) bekannt. Hierdurch ist aber die Größe derselben gegeben: denn diese Verhältnisse fordern $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ in soviel Theile als die Summe der Verhältnißzahlen (15) angiebt, zu zerlegen, und aus der Zusammensetzung dieser Theile die $\measuredangle$ zu bilden. Die vorstehenden Aufgaben führen aber sämmtlich auf dem gezeigten Wege zu $\measuredangle$, deren Grade nach 416 konstruirt werden können, es läßt sich also die Gestalt des $\triangle$, und durch die bekannte Linie nach 440 oder 442 die Größe ableiten.

1071. Aufgaben. $\triangle$ aus $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:3$
$\triangle$ aus $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:5$
$\triangle$ aus $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:7$
$\triangle$ aus $\alpha:\beta:\gamma = 2:3:5$
} und 1 Linie.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1070; nur sind die $\measuredangle$ in einzelnen Fällen kürzer nach 415 konstruirbar.

Anmerkung. Hat die Summe der Verhältnißzahlen nur die einfachen Faktoren 2, 3, 5, so erhält man stets durch 415 konstruirbare $\measuredangle$.

1072. Aufgabe. $\triangle$ aus α, (b : c), $t_{(m:n)}$.

Analysis. Folgt aus 406 wie in 440, nachdem man c wie m : n getheilt, und t gezogen hat.

1073. Aufgabe. $\triangle$ aus α, (b : c), (a + h).

Analysis. Die mittelst α und (b : c) gefundene Gestalt des $\triangle$ bestimmt (a : h), und hiedurch mit (a + h) a und h einzeln genommen, u. s. w.

1074. Aufgabe. $\triangle$ aus (p − q), $(\beta - \gamma)$, (b : c).

Analysis. Folgt durch 139 aus 406 oder 593 nebst 320, je nachdem man von $(\beta - \gamma)$ oder (p − q) ausgeht. (Siehe 594.)

1075. Aufgabe. $\triangle$ aus (h″ : h′), (a : r), (a + b + c).

Analysis. Die Gestalt des $\triangle$ ergiebt sich durch 491 und 482, man erhält also $\triangle$ aus β, γ, (a + b + c), 647, zu konstruiren, wenn man nicht wie in 441 verfahren will.

1076. Aufgabe. $\triangle$ aus (h″ : h′), (b + c), h.

Analysis. (h″ : h′) giebt (b : c) nach 482, (b : c) und (b + c) bestimmen aber b und c, man hat also $\triangle$ aus b, c, h zu konstruiren.

1077. Aufgabe. $\triangle$ aus a, b, (h + h′). (Vergl. 636. a.)

Analysis. a : b giebt nach 482 (h′ : h), dies Verhältniß bestimmt aber nach 390 mit (h + h′) h und h′, man hat also $\triangle$ aus a, b, h zu lösen.

1078. Aufgabe. △ aus a, b, (h′ — h). (Vergl. 636. b.)

Analysis. Wie in 1077 mit Anwendung von 452.

1079. Aufgabe. △ aus h, h′, (a + b). (Vergl. 636. a.)

Analysis. Ergiebt sich wie in 1077, wenn man hier h′ : h statt a : b benutzt.

1080. Aufgabe. △ aus h, h′, (a — b). (Vergl. 636. b.)

Analysis. Ergiebt sich wie in 1078, wenn man hier h′ : h statt a : b benutzt.

1081. Aufgabe. △ aus α, h, t′.

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt von t′ in b eine ∓ zu h, so ergiebt sich diese = ½h, und bestimmt mit t′ ein △, dessen eine Kathete die Lage von a bildet. Zur Feststellung von A können hierauf die durch h über a, und α über t′ nach 79 und 320 gegebenen Oerter angewendet werden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1082. Aufgabe. △ aus α, t, t′.

Analysis. α und t′ bestimmen nach 320 einen Ort für A, schneidet man also aus dem Schwerpunkt diesen Ort mit ⅔t, so ergiebt sich A u. s. w.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1083. Aufgabe. △ aus α, t′, t″.

Analysis. Beschreibt man über t″ den nach 320 durch α gegebenen Ort, so ergiebt sich zugleich nach 331 ein Ort für die Mitte von b, weshalb man denselben nur aus dem Schwerpunkt mit ⅓t′ zu schneiden hat, um die Lage von b, und hiedurch auch das geforderte △ ABC zu erhalten.

1084. Fig. 101. a. **Aufgaben.** △ aus t, t′, t″.
△ aus (t : t′ : t″).

Analysis. Die Aufgabe reduzirt sich auf △ aus b, e, t (126), da im △ ECB, EC = ⅔t″, EB = ⅔t′ und EF = ⅓t gegeben ist. Ueberhaupt ergiebt sich also die folgende Analysis. Verlängert man EF um sich selbst bis

D, so bestimmt sich $ED = \frac{1}{3}t$, $DC \doteqdot EB$, und daher $= \frac{1}{3}t'$, $EC = \frac{2}{3}t''$, also $\triangle EDC$ aus drei Seiten, und es läßt sich daraus das verlangte $\triangle$ ableiten.

Auflösung. Zeichne $\triangle EDC$ mit den Seiten $\frac{2}{3}t$, $\frac{1}{3}t'$, $\frac{2}{3}t''$, verlängere EC um $\frac{EC}{2}$ bis H, $\frac{ED}{2}$ oder EF um $2EF$ bis A, ziehe AC, und verlängere AH bis B, so bildet ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis. Ganz wie in 1051.

1085. Aufgabe. $\triangle$ aus α, $\angle (t'a)$ und einer Linie.

Analysis. Es bestimmt sich die Gestalt des verlangten $\triangle$, wenn man über einer beliebigen Linie a den mittelst α gegebenen Ort 320 beschreibt, an diese Linie $\angle (t'a)$ legt, und zur Feststellung des Scheitelpunkts von α den Ort 514 benutzt. Die Größe des $\triangle$ ergiebt sich wie in 440 oder nach 442.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1086. Aufgabe. $\triangle$ aus $\angle (tb)$, $\angle (t'a)$ und einer Linie.

Analysis. Es bestimmt sich die Gestalt des verlangten $\triangle$, wenn man über einer beliebigen Linie $\frac{1}{3}t'$ den durch $\angle (tb)$ nach 320 gegebenen Ort beschreibt, an den außerhalb des Orts fallenden Endpunkt von t' $\angle (t'a)$ legt, und zur Feststellung von A für das Verhältniß 1 : 1 (Abschnitte von b) 514 anwendet. Die Größe des $\triangle$ ergiebt sich wie in 440 oder 442.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1087. Aufgabe. $\triangle$ aus $\angle (tb)$, $\angle (t''c)$ und einer Linie.

Analysis. Es bestimmt sich die Gestalt, wenn man über $\frac{2}{3}$ einer beliebigen Transversale t'' den mittelst $\angle (tb)$ nach 320 gegebenen Ort zeichnet, und an den außerhalb desselben fallenden Endpunkt von t'' $\angle (t''c)$ legt. Die Größe des $\triangle$ ergiebt sich wie in 440 oder nach 442.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

1088. Aufgabe. △ aus ∠ (ta), ∠ (t'b) und einer Linie.

Analysis. Es bestimmt sich die Gestalt, wenn man über einer beliebigen Linie a den mittelst ∠ (t'b) nach 320 gegebenen Ort zeichnet, an die Mitte von a ∠ (ta) legt, und zur Feststellung des Endpunkts von t' den Ort 514, in Beziehung auf C und die Lage t, für das Verhältniß 1 : 1 benutzt. Die Größe des △ ergiebt sich schließlich wie in 440 oder nach 442.

1089. Aufgabe. △ aus ∠ (ra), ∠ (tc) und einer Linie.

Analysis. Es bestimmt sich die Gestalt des verlangten △, wenn man einen beliebigen ⊙ zeichnet, ∠ (ra) festlegt, und über der Hälfte der hiedurch bestimmten Linie den mittelst ∠ (tc) gegebenen Ort 320 beschreibt. Die Größe des △ ergiebt sich wie in 440 oder nach 442.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1090. Aufgabe. △ aus α, ∠ $[a t_{(m:n)}]$ und einer Linie. (∠ $[a t_{(m:n)}]$ ist der ∠, welcher von a mit einer a nach dem Verhältniß m : n schneidenden Transversale gebildet wird.)

Analysis. Wie in 1059, nur muß ∠ $[at_{(m:n)}]$ nicht in der Mitte von a, sondern im Theilungspunkt für m : n angetragen werden.

1091. Aufgabe. △ aus ∠ $[b t_{(m:n)}]$, ∠ $[ct_{(m:n)}]$ und einer Linie.

Analysis. Es bestimmt sich die Gestalt des verlangten △, wenn man beide ∠ mit einem gemeinschaftlichen Schenkel festlegt, und durch einen beliebigen Punkt desselben eine von den andern beiden Schenkeln begrenzte Länge für m : n mittelst 514 legt. Die Größe des △ ergiebt sich wie in 440 oder nach 442.

1092. Aufgaben. △ aus t′, h, ∠ (tb).
△ aus t″, h, ∠ (tb).
△ aus t′, h″, ∠ (tb).

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1081; nur daß der Ort 320 dort über t′, und hier über $\frac{2}{3}$t′ ꝛc. zu beschreiben ist.

1093. Aufgabe. △ aus ∠ (tb), t′, t″.

Analysis. Legt man t′ fest, beschreibt über $\frac{2}{3}$t′ den mittelst ∠ (tb) nach 320 gegebenen Ort, und zeichnet um den Schwerpunkt eine Kreislinie mit $\frac{2}{3}$t″, so muß der Ort 523 zur Feststellung von c für das Verhältniß 1 : 1, in Beziehung auf den Endpunkt B von t′, angewendet werden. Hiedurch ergiebt sich A, und damit das verlangte △ ABC.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1094. Aufgabe. △ aus ∠ (tb), h, h′.

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt von t in a eine ∓ zu h′, so bestimmt sich diese = $\frac{1}{2}$ h′, und giebt dadurch nebst ∠ (tb) ein △ mit der Hypotenuse t. Man hat also die Aufgabe △ aus t, h, h′ (1053) zu lösen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich das

Datum, daß 2 von den 3 Stücken t, h′ und ∠ (tb) das dritte bestimmen.

1095. Aufgabe. △ aus ∠ (tb), h′, h″.

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt von t in a ∓ ∓ zu h′ und h″, so bestimmen sich dieselben = $\frac{2}{3}$h′ und $\frac{2}{3}$h″, weshalb durch Hilfe des ∠ (tb) sich beide entstandenen △△ feststellen lassen, und man schließlich durch den Endpunkt von t eine Linie nach 514 zu legen hat, welche in demselben halbirt, und von den gefundenen Lagen der Seiten b und c begrenzt wird.

1096. Aufgabe. △ aus ∠ (tb), t, h″.

Analysis. Nach der Anmerkung 1094 ist mittelst ∠ (tb) und t auch h′ gegeben; man hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

1097. Aufgabe. △ aus p, q, (b : c).

Analyſis. Zieht man p + q, ſo ergiebt ſich die Lage von h, alſo ein Ort für A. Durch a und (b : c) beſtimmt ſich aber ein zweiter Ort für A nach 593, weshalb ſich dieſer Punkt, und damit △ ABC feſtſtellen läßt.

Zuſatz. Es ergeben ſich 2 ≦ △△.

1098. Aufgabe. △ aus a, h, (b : c).

Analyſis 1). a und h beſtimmen einen Ort für A nach 79, a und (b : c) den anderen nach 593, folglich läßt ſich A, und damit das verlangte △ ABC feſtſtellen.

Analyſis 2). Nimmt man durch a und h das Verhältniß a : h, ſo beſtimmt dies, wenn man eine beliebige Linie b feſtlegt, einen Ort für B nach 581; (b : c) giebt aber mit b auch c nach 390; man hat alſo nur von dem feſtliegenden Punkte A aus c abzuſchneiden, um B, und hiedurch das verlangte △ der Geſtalt nach zu beſtimmen. Die Größe ergiebt ſich darauf wie in 440.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

1099. Aufgabe. △ aus a, $t'_{(m:n)}$, ∠ $[t'_{(m:n)}c]$.

Analyſis. Legt man ∠ (t'c) an t' in B, und beſchreibt um B mit a eine Kreislinie, ſo hat man durch den zweiten Endpunkt von t' mittelſt 514 eine Linie zu legen, welche von demſelben nach dem Verhältniß m : n getheilt, und von der gezeichneten Kreislinie und dem Schenkel des ∠ (t'c) begrenzt wird.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

1100. Aufgabe. △ aus a, α, $t'_{(m:n)}$.

Analyſis 1). Durch a und α ergiebt ſich nach 320 ein Ort für A. Die aus B mit t' beſchriebene Kreislinie bildet einen Ort für den Endpunkt dieſer Linie, der Ort 519 mittelſt m : n und C aber den zweiten, folglich ergiebt ſich die Lage von b, und hiedurch A und das verlangte △ ABC.

Analyſis 2). Fig. 183. Verlängert man in Rückſicht auf 535 BF ſo bis G, daß CG ∦ BA wird, ſo ergiebt ſich FG aus der Proportion AF : FC = m : n = t' : FG, und ∠ FCG = α. Zeichnet man alſo BF und FG, und

beſchreibt den nach 320 durch FG und α gegebenen Ort für C, ſo muß ſich dieſer Punkt, und damit △ ABC feſtſtellen, wenn man um B mit a eine Kreislinie beſchreibt.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

1101. Aufgabe. △ aus a, h, $t'_{(m:n)}$.

Analyſis. 1) Durch a und h ergiebt ſich der Ort 79 ∓ a; verlängert man t' bis zu demſelben, ſo finden ſich zwei ∞ △△, weshalb mittelſt t' und m : n das bis zu dem Ort reichende Stück der Verlängerung von t' gefunden werden kann u. ſ. w.

Analyſis. 2) Legt man a feſt, zieht den Ort 79, und beſchreibt um B eine Kreislinie mit t', ſo ſtellt ſich in derſelben der zweite Endpunkt von t' mittelſt des Verhältniſſes m : n durch den Ort 514 feſt u. ſ. w.

1102. Aufgabe. △ aus (a : h'), r, $t_{(m:n)}$.

Analyſis. (a : h') beſtimmt γ nach 430, r und γ aber c nach 321; man hat alſo △ aus c, γ, $t_{(m:n)}$ (ſiehe 1100) zu konſtruiren.

1103. Aufgabe. △ aus (b : h''), ϱ, und dem vom Berührungspunkt bis B reichenden Abſchnitt von a.

Analyſis. (b : h'') giebt α; zeichnet man dieſen ∠ um den ⊙ mit ϱ nach 336, ſo beſtimmt ſich ein ähnlicher Abſchnitt wie der gegebene, welcher mit dieſem zuſammengenommen c bildet, es läßt ſich alſo B, und hiedurch auch das △ ABC feſtſtellen.

1104. Fig. 18. Aufgabe. △ aus b, c, (β − γ).

Analyſis. Ohne Kenntniß des Geſetzes 139 wird man gewöhnlich darauf kommen ∠ ABD = γ ſo abzuſchneiden, daß ſich ∠ DBC = (β − γ) beſtimmt. Hiedurch erhält man aber △ ABD ∾ △ ABC, alſo AC : AB = AB : AD, oder b : c = c : AD. Hiedurch iſt aber ſowohl AD als DC gefunden, und es läßt ſich, wenn man den mittelſt DC und (β − γ) für B gegebenen Ort beſchreibt, und denſelben aus A mit b ſchneidet, △ ABC zeichnen.

1105. Aufgabe. △ aus der Lage und Länge von a, $t'_{(m:n)}$ und K als Ort für A.

Analysis. Beschreibt man mit t' eine Kreislinie um B, so bestimmt diese mit C und dem Verhältniß m : n nach 525 oder 529 einen zweiten Ort für A, außer dem gegebenen K, also den fehlenden Scheitelpunkt des geforderten △ ABC.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1106. Fig. 184. **Aufgabe.** Gegeben L, L', und A dazwischen; man soll ein △ aus α und → a zeichnen, dessen ∠spitzen A in A, B in L, C in L' fallen.

Analysis. Durch → a, AR ꝛc. und α sind im ▱ ABRC 4 ∠ bekannt, weshalb dasselbe, und damit auch das △ der Gestalt nach gegeben ist, und mittelst des festliegenden Punktes A der Größe nach abgeleitet werden kann.

Auflösung. Ziehe eine Linie BC mit der → a zwischen L und L', beschreibe über derselben den nach 320 durch α gegebenen Ort, bestimme A durch die Verbindung von R mit A, und ziehe AB ∦ AB, AC ∦ AC, so ergiebt sich das geforderte △ ABC.

1107. Aufgabe. Gegeben L, L', und A dazwischen; man soll ein △ aus t und → a zeichnen, dessen ∠spitzen A in A, B in L, C in L' fallen.

Analysis. Durch → a und das Verhältniß 1 : 1, in welchem diese t durchschneidet, erhält man einen Ort für den in a liegenden Endpunkt dieser Linie nach 538, weshalb man nur von A aus t abzuschneiden, und durch den Schneidungspunkt die → a zu legen hat.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1108. Aufgabe. Gegeben L, L', und A dazwischen; man soll ein △ aus → a und → t zeichnen, dessen ∠spitzen A in A, B in L, C in L' fallen.

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1107, nur daß der Schneidungspunkt mit dem Ort, durch welchen die → a

ju legen ist, sich hier durch die mittelst A gegebene Lage von t ergiebt.

1109. Aufgabe. △ aus α, β, $\rightarrow$ a, oder $\rightarrow$ a, $\rightarrow$ b, $\rightarrow$ c in △ NOQ.

Auflösung. Ziehe BC zwischen NQ und OQ beliebig, aber mit der $\rightarrow$ a, bestimme A so, daß ABC die $\measuredangle$ α und β hat, verlängere QA bis A in NO, und ziehe AC $\fallingdotseq$ AC, AB $\fallingdotseq$ AB, so ergiebt sich das verlangte △ ABC.

1110. Fig. 47. Aufgabe. △ aus a, $\rightarrow$ a, $\rightarrow$ t' in △ NOQ.

Analysis. Durch a und $\rightarrow$ a ergeben sich die Punkte B und C in OQ und NQ; durch B und $\rightarrow$ t' erhält man aber auch die Lage von t', es ist also in Bezug auf C und NO der Ort 514 zur Bestimmung von A anzuwenden.

1111. Fig. 185. Aufgabe. △ aus $\rightarrow$ t, Lage b soll P, Lage c aber P' durchschneiden, um △ NOQ.

Analysis. P und N bestimmen Lage b, P' und O die Lage c, beide Lagen ergeben A, und hiedurch mit der $\rightarrow$ t die Lage t; man hat also zur Feststellung von B und C, in Beziehung auf Q, nur die Aufgabe 543 anzuwenden.

1112. Fig. 186. Aufgabe. △ aus $\rightarrow$ a, $\rightarrow$ t, und Lage h soll P durchschneiden, in △ NOQ.

Analysis. $\rightarrow$ a giebt $\rightarrow$ h, P und $\rightarrow$ h bestimmen Lage h, NO und Lage h die $\measuredangle$spitze A, $\rightarrow$ t und A endlich die Lage t; man hat also zur Feststellung von B und C die Aufgabe 544 anzuwenden.

1113. Fig. III. Aufgabe. △ aus a, t', $\measuredangle$ (tb).

Analysis. Beschreibt man über $\frac{1}{2}$t' den mittelst $\measuredangle$ (tb) nach 320 gegebenen Ort, und um den einen Endpunkt B von t' eine Kreislinie mit a, so hat man, in Beziehung auf den anderen Endpunkt und die beiden gezeichneten Kreislinien, 530. II. 3) zur Feststellung von b, oder der $\measuredangle$spitzen A und C anzuwenden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1114. Fig. III. Aufgabe. △ aus a, t″, ∠ (tb).

Analysis. Wie in 1113, nur wird hier der Ort über $\frac{2}{3}t''$ beschrieben.

1115. Fig. III. und Fig. X. Aufgaben.

△ aus b, c, ∠ (ta).

▱ aus a, b, ∠ (cc′).

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt von t in a eine ∦ zu b, so halbirt diese c, und bestimmt sich $= \frac{1}{2}b$; man erhält daher ein △ aus der Grundlinie c, dem Gegen∠ (ta) und einer dessen Scheitel treffenden Transversale, $\frac{1}{2}b$ zu konstruiren; siehe 783.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1116. Fig. 101. a. Aufgabe. △ aus t′, t″, ∠ (ta).

Analysis. Die Aufgabe bedingt die Konstruktion des △ BEC aus $EB = \frac{2}{3}t'$, $EC = \frac{2}{3}t''$, und ∠ (ta), welche in der vorhergehenden Nummer 1115 gegeben ist.

1117. Fig. III. Aufgabe. △ aus b, t′, ∠ (ta).

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt von t in a eine ∦ zu t′; so bestimmt sich diese diese $= \frac{t'}{2}$, und schneidet b im Verhältniß 1 : 3, weshalb das von b, t und $\frac{a}{2}$ gebildete △ aus b; ∠ (ta), und der b wie 1 : 3 schneiden den Transversale $\frac{t'}{2}$ bestimmt ist, und nach 1049 konstruirt werden kann. Durch Feststellung dieses △ läßt sich aber auch das geforderte ABC zeichnen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1118. Fig. 187. Aufgabe. Um △ NOQ ein △ aus a, b, und → a ∦ NO.

Analysis. → a und Q bestimmen Lage a. Schneidet man nun, um a einzuführen und diese Länge mit NO in Beziehung zu setzen, a beliebig = BC oder = B′C′ a

und vergleicht die entstehenden △△ ABC und A′B′C′, so ergiebt sich AO : AB = NO : CB, und
A′O : A′B′ = NO : C′B′, also

AO : AB = A′O : A′B′, und
OB : AO = OB′ : A′O d. S. d. V. G.,
weshalb △ AOA′ ∼ △ BOB′, folglich
AA′ ∦ BB′ sein muß,

woraus hervorgeht, daß h, also auch die ∦ durch A mitgegeben ist, und man zwischen dieselbe und Lage a nur b durch N zu legen hat, um △ ABC zu bestimmen.

Auflösung. Ziehe durch Q eine ∦ zu NO, schneide in beliebiger Lage B′C′ = a ab, lege von C′ und B′ aus Linien durch N und O, bestimme eine durch den Schneidungspunkt A′ laufende ∦ zu B′C′, lege zwischen die beiden gezogenen ∦∦ die Länge b, und ziehe durch N zu der erhaltenen ↛ b die ∦ CA, so ergiebt sich, wenn man AO bis B verlängert, das verlangte △ ABC.

Beweis. AN : NC = AA′ : CC′, da △ ANA′ ∼ △ CNC′,
AO : OB = AA′ : BB′, da △ AOA′ ∼ △ BOB′,

also ist AA′ : CC′ = AA′ : BB′, da NO ∦ CB,
und deshalb CC′ = BB′,
folglich auch BC = B′C′ = a,

während sich CA = b (∦ zwischen ∦) aus der Konstruktion geradezu ergiebt.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

Anmerkung. Was für ein Ort, was für ein Datum, welche Lehrsätze folgen aus der Analysis der vorstehenden Aufgabe?

1119. Aufgabe. Um △ NOQ ein △ aus a, ↛ t und ↛ a ∦ NO.

Analysis. Durch a und ↛ a ∦ NO ergiebt sich wie in 1118 ein Ort für A ∦ a. Nun halbirt t aber NO

nach 536, folglich hat man auch die Lage t, und hiedurch das verlangte △ ABC.

1120. Aufgabe. Um △ NOQ ein △ aus a, t, und → a ∓ NO.

Analysis. Durch a und → a ∓ NO ergiebt sich wie in 1118 ein Ort für A ∓ a, weshalb sich mittelst t auch → t bestimmt, und die vorhergehende Aufgabe zu lösen ist.

Zusatz. Es ergeben sich 2 ≦ Resultate.

1121. Aufgabe. Um △ NOQ ein △ aus h, t und → a ∓ NO.

Analysis. Aus h und → a ∓ NO ergiebt sich a nach Analysis und Beweis 1118; man hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

1122. Fig. 188. **Aufgabe.** △ aus m und den von m in a gebildeten beiden Abschnitten.

Analysis 1). Ist AD = m, so muß AB : AC = BD : CD sein, weshalb sich ein Ort für A nach 593 ergiebt, und nur von D aus m zur Feststellung des △ ABC abzuschneiden ist.

Analysis 2). Denkt man sich um △ ABC einen ⊙ beschrieben, und verlängert m bis F, so ergiebt sich DF aus der Proportion m : CD = DB : DF. Da aber α von m halbirt wird, muß auch der aus F auf CB gefällte ⊥ FE, diese Linie halbiren, weshalb mittelst der gegebenen Lage dieses ⊥ und der Länge von DF der Punkt F, hierauf A durch m, also auch das verlangte △ ABC bestimmt werden kann.

Zusatz. Es ergeben sich 2 ≦ Resultate.

1123. Aufgabe. △ aus a, m, (b : c).

Analysis. Da sich b und c wie die beiden von m in a gebildeten Abschnitte verhalten, a selbst aber gegeben ist, hat man die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

1124. Aufgabe. △ aus b, h', (a : h).

Analysis. 1) Durch Oerter. b und (a:h) bestimmen, wenn man b festlegt, einen Ort für B nach 581;

der andere Ort, und hiedurch das verlangte △ ABC, ergeben sich mittelst b und h′ nach 79.

Analysis. 2) Durch Daten. b und h′ geben (ah), (a:h) und (ah) aber a und h nach 462; man hat also △ aus a, h, b zu lösen.

Analysis 3). Sei $h : a = m : n$.

Da $h' : h = a : b$ ist, und aus der gegebenen Proportion $h : a = b : \frac{nb}{m}$ folgt, so muß

$h' : a = a : \frac{nb}{m}$ sein, aus welcher Proportion a gefunden werden kann, und deshalb △ aus a, b, h′ zu konstruiren ist.

1125. Aufgabe. △ aus p, q, (b+c).

Analysis 1). Da nach 209 $b^2 - c^2 = p^2 - q^2$ ist, hat man $(b+c) : (p+q) = (p-q) : (b-c)$. Aus dieser Proportion bestimmt sich (b − c), folglich mittelst der gegebenen Summe (b+c) sowohl b als c, und es ist △ aus a, b, c zu verzeichnen.

Analysis 2). Legt man (p+q) = a nebst der mitgegeben Lage von h fest, und bildet das △ nach 130, so ergiebt sich, wenn man eine Kreislinie um C mit (b+c), und eine andere um A mit c beschreibt, daß die Mittelpunkte derselben in eine gerade Linie fallen. Dann müssen sich aber beide Kreise berühren, und es ist deshalb ⊙ aus P, L_μ, K B. v. J. nach 578 zu verzeichnen, für welche Aufgabe B den Punkt P, die Lage von h die Linie L_1 und die Kreislinie mit (b+c) K bildet.

Zusatz. Es sind auch nach der Analysis 2) zwei ≅ Resultate möglich; vergl. 577 Zusatz 2).

1126. Aufgabe. △ aus p, q, (b−c).

Analysis 1). Wie in der vorhergehenden Aufgabe Analysis 1) bestimmt sich (b+c), und damit a, b, c.

Analysis 2). Wie in der vorhergehenden Aufgabe Analysis 2) erhält man die Aufgabe ⊙ aus P, K, L_μ B.

s. A. zu verzeichnen, wobei K durch den ⊙ um C mit (b — c) gebildet wird.

1127. Aufgabe. △ aus a, t, (b + c).

Analysis. Legt man a fest, und beschreibt um die Mitte dieser Seite mit t eine Kreislinie, so bildet dieselbe nach 220 einen Ort für die ∠spitzen aller über a stehenden △△, welche dieselbe Summe der Quadrate von b und c haben. Durch a und t ist also $(b^2 + c^2)$ gegeben. Aus $(b^2 + c^2)$ und (b + c) ergeben sich aber b und c nach 467; man hat also △ aus a, b, c zu konstruiren.

1128. Aufgabe. △ aus a, t, (b — c).

Analysis. Wie in der vorhergehenden Analysis bestimmen a und t auch $(b^2 + c^2)$; $(b^2 + c^2)$ und (b — c) ergeben aber b und c nach 467; man hat also △ aus a, b, c zu verzeichnen.

1129. Aufgabe. △ aus r, h, $(b^2 + c^2)$.

Analysis. 2rh ist = bc nach 556, aus bc und $(b^2 + c^2)$ ergeben sich aber b und c nach 468. a.; man hat also △ aus b, c, h zu verzeichnen.

1130. Aufgabe. △ aus r, h, $(p^2 - q^2)$.

Analysis. $(p^2 - q^2)$ ist = $(b^2 - c^2)$ nach 209, und 2rh = bc nach 556, $(b^2 - c^2)$ und (bc) bestimmen aber b und c nach 470; man hat also △ aus b, c, h zu verzeichnen.

2tes Kapitel.

Vierecks-Aufgaben aller Art.

1131. Fig. 102. Aufgabe. ▱ aus a, ∠ (be), ∠ (ce), ∠ (ce'), ∠ (de').

Analysis. Nach 508 ergiebt sich das ▱ der Gestalt nach. Wie in 509 läßt sich schließlich aus der Gestalt die Größe desselben ableiten.

Auflösung. Lege an eine beliebige Linie $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die $\measuredangle$ (ce'), (ce); ferner an die erhaltene Lage $A\mathfrak{C}$ $\angle$ (be) und ziehe von $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{D}A$ unter der Neigung $\angle$ (de'), so bildet $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Gestalt des verlangten $\square$, weshalb man nur $AB = a$ abzusetzen, $BC \fallingdotseq B\mathfrak{C}$, und $CD \fallingdotseq \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ zu legen hat, um das gesuchte $\square$ ABCD der Gestalt und Größe nach zu erhalten.

Beweis. Aus der Konstruktion folgt $AB : A\mathfrak{B} = AC : A\mathfrak{C} = AD : A\mathfrak{D}$, also $DB \fallingdotseq D\mathfrak{B}$, weshalb $\square$ ABCD nicht bloß a, sondern auch die gegebenen $\measuredangle$ hat.

Anmerkung. Es ist zweckmäßig bei allen Aufgaben dieser Art den Schüler Auflösung und Beweis aus der Analysis ableiten zu lassen.

1132. Fig. XIV. **Aufgaben.**

$\square$ aus $\angle$ C, $\angle$ D, $\angle$ (de), $\angle$ (be') } u. einer
$\square$ aus $\angle$ (de), $\angle$ (be), $\angle$ (ce'), $\angle$ (ee') } Linie.

Analysis 2c. wie in 1131.

1133. Fig. XIV. **Aufgaben.**

$\square$ aus $\angle$ C, $\angle$ D, $\angle$ (ae'), $\angle$ (de) } und
$\square$ aus $\angle$ B, $\angle$ D, $\angle$ (ee'), $\angle$ (de') } einer
$\square$ aus $\angle$ A, $\angle$ C, $\angle$ (ae'), $\angle$ (be) } Linie.

Analysis 2c. Ergiebt sich wie in 1131, aber durch Hilfe von 320.

1134. Fig. 102. **Aufgabe.** $\square$ aus $\angle$ A, $\angle$ (ae'), $\angle$ (be), $\angle$ (ce), $(a + b + c + d + e + e')$.

Analysis. Durch die 4 $\measuredangle$ ist nach 508 die Gestalt des $\square$ mittelst 320 gegeben. Die Größe läßt sich aus derselben ableiten, da wegen der Aehnlichkeit des die Gestalt angebenden $\square$ $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ mit $\square$ ABCD $(a + b + c + d + e + e') : (a + b + c + d + e + e') = a : a$ sein muß, also a gefunden werden kann, und wie in 1131 bei der Konstruktion einzuführen ist.

Auflösung. Zeichne ein beliebiges $\triangle$ $A\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ mit den $\measuredangle$ A und (ae'), und bestimme $\mathfrak{C}$ durch die $\measuredangle$ (be) und (ce) mittelst zweimaliger Anwendung des Orts 320, so bildet $\square$

$ABED$ die Gestalt des gesuchten $\square ABCD$. Bestimmt man nun a aus der Proportion $(a+b+c+b+e+e') : (a+b+c+d+e+e') = a:a$, und leitet aus dem $\square ABED$ ein $\sim \square$ mit der Seite a ab, so erhält man das gesuchte $\square ABCD$.

Beweis. Die Aehnlichkeit der $\square\square$ $ABED$ und $ABCD$ folgt leicht aus der Konstruktion. Hiedurch ergiebt sich

$$(a+b+c+b+e+e') : AB+BC+CD+DE+AC+BD = a : AB\ (=a).$$

Nun ist aber auch

$$(a+b+c+b+e+e') : (a+b+c+d+e+e') = a : a,$$

folglich muß

$$AB+BC+CD+DE+AC+BD = (a+b+c+d+e+e')$$

sein, und das $\square ABCD$ hat auch die gegebenen $\sphericalangle$.

Anmerkung. Statt $(a+b+c+d+e+e')$ könnte die Summe jeder beliebigen Menge von Linien, oder auch die Differenz ꝛc. zweier Linien des $\square$ bestimmt sein, und es würde sich dieselbe Analysis ꝛc. ergeben.

1135. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $(a:b)$, d (oder einer anderen Linie).

Analysis. $(a:b)$ und $\angle B$ bestimmen die Gestalt des $\triangle ABC$, und $\angle A$ und $\angle C$ schließlich auch die Gestalt des $\square ABCD$, weshalb dasselbe mit d wie in 1131 gezeichnet werden kann.

1136. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus $\angle A$, $\angle B$, c, e, $(a:b)$.

Analysis. Die Gestalt des $\triangle ABC$ bestimmt sich wie in 1135; durch $e:c = e:c$ bestimmt sich c, also mittelst $\angle A$ die Gestalt des $\square ABCD$, aus welcher die Größe in Bezug auf e oder c wie in 1131 abgeleitet werden kann;

1137. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus $\angle D$, $(a:b)$, $(b:e)$, $(e:e)$, d.

Analysis. $(a:b)$ und $(b:e)$ bestimmen die Gestalt des $\triangle ABC$; $c:c' = e:e'$ giebt c', und damit einen Ort

für D, der andere ergiebt sich aber mittelst e und ∠ D nach 320. Folglich hat man die Gestalt des gesuchten ▱, und dadurch auch, wenn man d benutzt, dessen Größe wie in 1131.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

1138. Fig. 102. **Aufgabe.** ▱ aus (a:b), (a:d), ∠ (ee'), ∠ B, (e — e').

Analysis. (a:b) und ∠ B bestimmen die Gestalt des △ ABC. Legt man nun die Lage von e' mittelst ∠ (ee') fest, so ergiebt sich E, und damit ▱ ABED durch die Proportion a : b = (a : d), da nach derselben b gefunden werden kann. Nun muß e — e' : (e — e') = a : a sein, folglich läßt sich a bestimmen, und wie in 1131 ein ABED ∾ ▱ ABCD mit der Seite a zeichnen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1139. Fig. 52. **Aufgabe.** ▱ aus a, ∠ B, ∠ D, ∠ (ee'), (e : e').

Analysis. (e : e'), und ∠ (ee') geben die Gestalt des 162 angeführten ▱, ∠ B und ∠ D mittelst zweimaliger Anwendung des Orts 320 die in das ▱ fallende ∠ spitze E; zieht man daher Linien nach den 4 ∢ spitzen des ▱, so bilden 2 davon Seiten eines Vierecks, und die beiden anderen geben die ⟶ der fehlenden Seiten an. Vollendet man also das hieraus hervorgehende ▱, so ist die Gestalt des verlangten ▱ bestimmt, und es ist nur a wie in 1131 einzuführen

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1140. Fig. XIV. **Aufgabe.** ▱ aus a, ∠ (ae), ∠ ae', ∠ (ce), (a : c).

Analysis. ∠ (ae) und ∠ (ee') bestimmen die Gestalt des △ ABE, und hiedurch die Lagen von e und e'. Nun ist a : c = a : c, also c bekannt, und man hat zwischen die angeführten Lagen diese Seite nach 94 mit der Neigung ∠ (ce) gegen Lage e zu schieben, um die Gestalt des verlangten ▱ zu erhalten, welcher schließlich die Seite a wie in 1131 gegeben werden kann.

1141. Aufgabe. Fig. XIV. □ aus a, b, ∠ (de), ∠ (de'), ∠ (ce').

Analysis. ∠ (de') + ∠ (ce') und ∠ (de) bestimmen die Gestalt des △ ACD; ∠ (de') giebt zugleich die Lage e', also einen Ort für B, der zweite Ort ergiebt sich aber durch a : b nach 593, so daß man der erhaltenen Gestalt des Vierecks ABCD nur die Größe a wie in 1131 zu geben hat.

Zusatz. Der zweite Schnitt des Orts bestimmt ein anderes □ mit einem erhabenen ∠.

1142. Aufgabe. Fig. XIV. □ aus (∠B + ∠C), ∠ (ce'), (a : d), ∠ (be), (a + c).

Analysis. Aus (∠B + ∠C) ergiebt sich ∠ (ac) = 2R — (∠B + ∠C), und hiedurch ∠ (ae') = ∠ (ce') — 2R + (∠B + ∠C). Durch ∠ (ae') und (a : d) ist aber △ ABD der Gestalt nach bestimmt; zeichnet man also △ ABD und ∠ (ce'), so ergiebt sich ein Ort für C, und man hat nur über a den mittelst ∠ (be) nach 320 gegebenen zweiten Ort zu beschreiben, um C, und hiedurch die Gestalt des verlangten □ festzustellen. Die Größe desselben läßt sich darauf durch (a + c) wie in 1134 ableiten.

Zusatz. Es sind 4 verschiedene Resultate möglich.

1143. Fig. XIV. **Aufgabe.** □ aus (a : b), (c : d), (e : e'), (e : c), (a + b + c + d).

Analysis. (c : d) und (e : c) bestimmen die Gestalt des △ ACD. e : e' = (e : e') giebt e', und damit einen Ort für B. Durch (a : b) läßt sich aber nach 593 ein zweiter Ort für B konstruiren. Es kann also dieser Punkt B, und folglich auch die Gestalt des verlangten □ festgestellt werden, welcher man sodann schließlich den Umfang (a + b + c + d) wie in 1134 zu geben hat.

1144. Aufgabe. Fig. XIX. ▭ aus ∠ (be), ∠ (de'), ∠ (ae), e' (oder einer anderen Linie).

Analysis. Durch ∠ (be) und ∠ (ae) ergiebt sich die Gestalt des △ ABC, und ein Ort für D ∥ a; den zwei-

ten Ort erhält man durch ∠ (de′) nach 320. Aus der hiemit bestimmten Gestalt des □ ABCD kann mittelst e′ die Größe wie in 1131 abgeleitet werden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1145. Aufgabe. Fig. XIX. □ aus ∠ (ae), ∠ (ae′), ∠ (de), (a + e).

Analysis. Durch gleiche Mittel wie in 1144 bestimmt sich die Gestalt des verlangten □, aus welcher sich durch (a + e) die Größe wie in 1134 ableiten läßt.

1146. Aufgabe. □ aus (a : b), ∠ (ce′), ∠ (ee′) und einer Linie.

Analysis. ∠ (ee′) + ∠ (ce′) giebt ∠ (ce) oder ∠ (ae). Durch (a : b) und ∠ (ae) bestimmt sich aber die Gestalt des △ ABC, aus welcher auch die des □ durch ∠ (ee′) abgeleitet werden kann, und derselben nur die vorgeschriebene Linie wie in 1131 zu geben ist.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1147. Fig. 189. **Aufgabe.** □ aus (a : b), (c : d), ∠ B und einer Linie.

Analysis. (a : b) und ∠ B bestimmen die Gestalt des △ ABC. Zeichnet man daher △ ABC, und zieht eine ∥ zu a durch C, so wird sich D ergeben, wenn man CH beliebig annimmt, aus CH : HJ = c : d HJ bestimmt, und von H aus abschneidet, schließlich aber AD ∥ JH zieht. Der auf diese Art gefundenen Gestalt des □ läßt sich darauf die vorgeschriebene Linie wie in 1131 geben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1148. Fig. 34. **Aufgabe.** □ aus a, c, (b : d), (∠ C + ∠ D).

Analysis. (b : d) und (∠ C + ∠ D) bestimmen die Gestalt des 169 angeführten △. Giebt man diesem △ (c — e) zur Seite, so läßt sich schließlich durch a oder c das verlangte □ konstruiren.

1149. Fig. 34. **Aufgabe.** □ aus (e : e′), ∠ (ee′), ∠ A, (a + c + e + e′).

Analysis. (e:e') und ∠ (ee') geben die Gestalt des 171 angeführten △ DBF, dessen Umfang (a+c+e+e') bildet, weshalb das △ wie in 647 konstruirt, und hierauf mittelst ∠ A das verlangte □ abgeleitet werden kann.

1150. Fig. XXI. Aufgabe. □ im ⊙ aus e, ∠ A, ∠ (be), ∠ (ee').

Analysis. Durch ∠ (de') = ∠ (be), und ∠ A bestimmt sich die Gestalt des △ ABD, oder △ ABD. Beschreibt man um dies △ einen ⊙, und stellt die Lage von e durch A und ∠ (ee') fest, so erhält man auch die Gestalt des □ ABCD, welcher e wie in 1131 zu geben ist.

1151. Fig. XXI. Aufgabe. □ im ⊙ aus r, (a:b), (b:c), ∠ A.

Analysis. Durch ∠ C = 2R − ∠ A und (b:c) ergiebt sich die Gestalt des △ DBC, oder △ DBE. Beschreibt man um dieses △ einen ⊙, und bestimmt a aus der Proportion a:b = (a:b), so ergiebt sich A, und damit □ ABED, welchem man wie in 1131 r zu geben hat, um das verlangte □ ABCD zu erhalten.

1152. Fig. XXI. Aufgabe. □ im ⊙ aus a, ∠ A, ∠ B, ∠ (ee').

Analysis. Trägt man in einen beliebigen ⊙ die ∠ A und B als Peripherie ∠, so bestimmen sich 2 Sehnen, welche unter ∠ (ee') geneigt konstruirt werden müssen. Führt man dies aber nach 982 aus, so zeigt sich die Gestalt des gesuchten □ bestimmt, welcher a wie in 1131 zu geben ist.

1153. Fig. 190. Aufgabe. □ um ⊙ aus e, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Auflösung. Legt man um einen beliebigen ⊙ nach 336 ein □ mit den ∠ A, B, C, so bildet dieses □ die Gestalt des gesuchten. Schneidet man daher von A aus AC = e ab, und zieht durch C ∥ ∥ zu b und c, so erhält man das geforderte □ ABCD.

Beweis. $\mathfrak{AB} : \mathfrak{AB} = \mathfrak{BC} : BC = \mathfrak{CD} : CD = \mathfrak{DA} : DA$, da sämmtliche Verhältnisse $= \mathfrak{AC} : AC$ sind. Hieraus folgt: $\mathfrak{AB} + \mathfrak{CD} : \mathfrak{AB} + CD = \mathfrak{AB} : \mathfrak{AB}$, und

$$\mathfrak{BC} + \mathfrak{AD} : BC + \mathfrak{AD} = \mathfrak{BC} : BC, \text{ also auch}$$

$$\mathfrak{AB} + \mathfrak{CD} : \mathfrak{AB} + CD = \mathfrak{BC} + \mathfrak{AD} : BC + \mathfrak{AD}.$$

Nun ist aber nach der Konstruktion $\mathfrak{AB} + \mathfrak{CD} = \mathfrak{BC} + \mathfrak{AD}$, demnach muß auch $\mathfrak{AB} + CD = BC + \mathfrak{AD}$ sein.

1154. Aufgabe. $\square$ in und um $\odot$ aus $\angle$ A, $\angle$ B, $(a + b + c + d)$.

Analysis. Aus $\angle$ A ergiebt sich $\angle$ C $= 2R -$ $\angle$ A. Durch $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C bestimmt sich aber die Gestalt des geforderten $\square$ wie in 1153, also auch $(a : c)$; $(a + c) = \frac{a + b + c + d}{2}$ und $(a : c)$ bestimmen aber a und c, weshalb aus der erhaltenen Gestalt das eigentliche $\square$ wie in 1131 abgeleitet werden kann.

1155. Aufgabe. Ein reguläres neck (z. B. 15 eck), welches sich durch r zeichnen läßt, mit einer gegebenen Seite a zu konstruiren.

Analysis. Konstruirt man in einen beliebigen $\odot$ ein reguläres neck (15 eck), so ergiebt sich $(r : a)$; durch a und $(r : a)$ erhält man aber r, und kann deshalb das geforderte neck auf die gewöhnliche Art zeichnen.

Anmerkung. Die Konstruktion eines regulären 10ecks aus der Seite a kann auch durch eine Veränderung des goldnen Schnitts bewerkstelligt werden. Da nämlich a Mediane (der größere Abschnitt einer nach dem goldenen Schnitt getheilten Linie) zu r ist, hat man den größeren Abschnitt, und soll die ganze Linie oder den kleineren Abschnitt bestimmen. Dieser findet sich aber auch, wenn man a nach dem goldnen Schnitt theilt, d. h. die Mediane von a nimmt, denn es wäre

$a + x : a = a : x$, wenn man (d. G. d. h. Gl.)

$x : a - x = a : x$, oder

$a : x = x : a - x$ hätte, welches die angezeigte Auflösung giebt.

Beiläufig kann noch dem Schüler mitgetheilt werden, daß für einen gegebenen kleineren Abschnitt b die zugehörige Mediane gefunden wird, wenn man b und die Mediane von b vereinigt: denn wenn sich verhalten soll

$b+x : x = x : b$, müßte auch (d. S.)

$b : x-b = x : b$ und d. S. d. V. Gl.

$b-(x-b) : (x-b) = (x-b) : b$, d. h.

$x-b$ Mediane zu b sein, woraus hervorgeht, daß x selbst erhalten wird, wenn man b und die Mediane von b vereinigt.

1156. Fig. 229. **Aufgabe: Ein Fünfeck ABCDE aus dem Umfange und den 6∠ EDB, BDC, ECD, ECB, CEA und DBA zu verzeichnen.**

Analysis. Nimmt man eine beliebige Linie, und legt an den Endpunkten derselben die ersten 4 ∠ fest, so bestimmt sich die Gestalt des ▱ BCDE, weshalb man nur die ∠ CEA und DBA an CE und DB zu legen hat, um die Gestalt des verlangten Fünfecks ABCDE zu erhalten, welcher man schließlich wie in 1134 den vorgeschriebenen Umfang zu geben im Stande ist.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

1157. **Aufgaben.** △ aus f^2, α, β.

▱ aus f^2, α, β.

◺ aus f^2, α.

▭ aus f^2, α.

Analysis. Verwandelt man die gegebene Fläche in ein △ mit dem ∠ α, so bestimmt β die → derjenigen Linie, welche zwischen den Schenkeln des ∠ α f^2 abschneiden muß. Hiemit ist aber die Aufgabe auf 553 reduzirt.

1158. **Aufgaben.** △ aus f^2, α.

▽ aus f^2, γ.

Analyſis. Durch α ſind die übrigen $\measuredangle$ gegeben; man hat alſo 1157 zu löſen.

1159. Aufgabe. $\hexagon$ aus f^2.

Analyſis. Da im $\hexagon$ jeder $\measuredangle = \frac{2}{3}R$ iſt, hat man wie in 1157 zu verfahren.

1160. Aufgaben. $\triangle$ aus f^2, α, $(b:h)$.
$\triangle$ aus f^2, α, $(p:q)$.
$\triangle$ aus f^2, α, $(a:h)$.
$\triangle$ aus f^2, β, $(a:r)$.

Analyſis. Nach 1042, 1043, 1044, 1045 erhält man die Geſtalt der verlangten $\triangle\triangle$, alſo auch deren $\measuredangle$, und kann ihnen deshalb nach 1157 die beſtimmte Fläche geben.

1161. Aufgaben. $\triangle$ aus f^2, α, $(m:h)$.
$\triangle$ aus f^2, $(\beta-\gamma)$, $(b:c)$.
$\triangle$ aus f^2, α, $(h':h'')$.
$\triangle$ aus f^2, $\measuredangle$ (tb), $(a:c)$.
$\triangle$ aus f^2, $\measuredangle$ (tb), $(b:c)$.
$\triangle$ aus f^2, α, $(t:h)$.
$\triangle$ aus f^2, α, $(t':t)$.
$\triangle$ aus f^2, α, $(a:\varrho)$.

Analyſis. Folgt aus 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067 mittelſt 1157 wie in 1160.

Anmerkung. Ueberhaupt ſind mittelſt 1157 alle Verwandlungsaufgaben für $\triangle\triangle$ löſsbar, wenn aus den Bedingungen derſelben die Geſtalt des verlangten $\triangle$ abgeleitet werden kann.

1162. Aufgabe. Eine Fläche f^2 ſo umzuformen, daß die entſtehende Figur einem gegebenen neck, deſſen Fläche f^2 iſt, ähnlich wird.

Analyſis. Da ſich $\sim$ Figuren wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten verhalten, iſt

$f^2 : f^2 = a^2 : a^2$, alſo auch

$f : f = a : a$, und hiedurch eine Seite a des geſuchten Vielecks beſtimmbar. Da aber die Geſtalt deſſelben außer-

dem gegeben ist, kann man diese Seite a wie in 1131 zur Vollendung der Zeichnung benutzen.

1163. Aufgaben.

▱ aus f^2, ∠ C, ∠ D, ∠ (de), ∠ (be').

▱ aus f^2, ∠ (dé), ∠ (be), ∠ (ce'), ∠ (ee').

▱ aus f^2, ∠ C, ∠ D, ∠ (ae'), ∠ (de).

▱ aus f^2, ∠ B, ∠ D, ∠ (ee'), ∠ (de').

▱ aus f^2, ∠ A, ∠ C, ∠ (ae'), ∠ (be).

▱ aus f^2, ∠ A, ∠ (ae'), ∠ (be), ∠ (ee).

▱ aus f^2, (a:b), (c:d), (e:e'), (e:c).

Analysis. Nach 1132, 1133, 1134, 1143 erhält man die Gestalt der verlangten ▱▱, und kann ihnen deshalb nach 1162 die bestimmte Fläche geben.

1164. Aufgaben.

▭ aus f^2, ∠ (be), ∠ (de'), ∠ (ae).

▭ aus f^2, ∠ (ae), ∠ (ae'), ∠ (de).

▭ aus f^2, ∠ B, (a:b), (c:d).

Analysis. Folgt aus 1144, 1145, 1147 durch 1162 wie in 1163.

1165. Aufgaben.

▱ im ⊙ aus f^2, ∠ A, ∠ (be), ∠ (ee').

▱ im ⊙ aus f^2, ∠ A, ∠ B, ∠ (ae').

▱ im ⊙ aus f^2, ∠ A, (a:b), (b:c).

Analysis. Folgt aus 1150, 1152, 1151 durch 1162 wie in 1163.

1166. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus f^2, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Analysis. Folgt aus 1153 durch 1162 wie in 1153.

1167. Aufgabe. ▱ in und um ⊙ aus f^2, ∠ A, ∠ B.

Analysis. Folgt aus 1154 durch 1162 wie in 1163.

1168. Aufgabe. Ein reguläres neck (z. B. 15 eck), welches sich durch r zeichnen läßt, mit einer gegebenen Fläche f^2 zu konstruiren.

Analysis. Konstruirt man in einen beliebigen ⊙ ein reguläres n eck (15 eck), so erhält man die Gestalt des verlangten n ecks, und kann derselben die bestimmte Fläche wie in 1162 geben.

1169. Fig. 229. **Aufgabe.** Ein Fünfeck ABCDE mit einer bestimmten Fläche und den 6 ∠ EDB, BDC, ECD, ECB, CEA und DBA zu verzeichnen.

Analysis. Folgt aus 1156 durch 1162 wie in 1163.

1170. Aufgabe. △ aus f^2, (a:h), β.

Analysis. f^2 giebt (ah), (a:h) und (ah) bestimmen aber a und h einzeln genommen nach 461; man hat also △ aus a, β, h zu konstruiren.

1171. Aufgabe. △ aus f^2, (a + h), b.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1170 mittelst 458 zu △ aus a, b, h.

1172. Aufgabe. △ aus f^2, (a − h), r.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1170 mittelst 460 zu △ aus a, r, h.

1173. Aufgabe. △ aus f^2, $(a^2 + h^2)$, t.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1170 mittelst 468. a zu △ aus a, h, t.

1174. Aufgabe. △ aus f^2, $(a^2 - h^2)$, h'.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1170 mittelst 470 zu △ aus a, h, h', oder, da $ah = bh'$ ist, zu △ aus a, b, h.

1175. Aufgabe. △ aus f^2, α, (b:c).

Analysis. Aus f^2 und α ergiebt sich (bc) nach 486, (b:c) und (bc) bestimmen aber b und c einzeln genommen nach 461; man hat also △ aus b, c, α zu konstruiren.

1176. Aufgabe. △ aus f^2, α, (b + c).

Analysis. Durch 486 ergiebt sich mittelst 458 △ aus b, c, α.

1177. Aufgabe. △ aus f^2, α, (b − c).

Analysis. Durch 486 ergiebt sich mittelst 460 △ aus b, c, α.

1178. Aufgabe. △ aus f^2, α, $(b^2 + c^2)$.

Analysis. Durch 486 ergiebt sich mittelst 468. a △ aus b, c, α.

1179. Aufgabe. △ aus f^2, α, $(b^2 - c^2)$.

Analysis. Durch 486 ergiebt sich mittelst 470 △ aus b, c, α.

1180. Aufgabe. △ aus f^2, (bc), a.

Analysis. Aus f^2 und a ergiebt sich h nach 185; aus f^2 und (bc) aber α nach 486; man hat also △ aus a, h, α, siehe 788, zu verzeichnen.

1181. Aufgabe. △ aus f^2, (bc), $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Aus f^2 und (bc) ergiebt sich α nach 486; α und $(\beta - \gamma)$ bestimmen aber α, β, γ, also die Gestalt des verlangten △, mithin auch (b : c); (bc) und (b : c) geben endlich b und c nach 461; man hat also △ aus b, c, α zu verzeichnen.

1182. Aufgabe. △ aus f^2, t, t'.

Analysis. Man hat nur $\frac{1}{2}f^2$ in ein △ mit 2 Seiten $\frac{1}{2}t$ und $\frac{1}{2}t'$ nach 194 zu verwandeln.

1183. Aufgaben. △ aus f^2, $(a + b)$, $(h : h')$.

△ aus f^2, $(a - b)$, $(h : h')$.

Analysis. $(h : h')$ bestimmt $(a : b)$ nach 482, $(a : b)$ und $(a + b)$ oder $(a - b)$ ergeben aber a und b nach 390 oder 453; man erhält also △ aus f^2, a, b, siehe 194, zu verzeichnen.

1184. Aufgabe. △ aus f^2, h, (b : c).

Analysis. Aus f^2 und h ergiebt sich a nach 185; man erhält also △ aus a, (b : c), siehe 1098, zu verzeichnen.

1185. Aufgabe. △ aus f^2 und den beiden durch m in a gebildeten Abschnitten.

Analysis. Die Summe der beiden gegebenen Abschnitte ist = a, ihr Verhältniß = (b : c); durch f^2 und a

ergiebt sich aber h nach 185, man hat also △ aus a, h, (b : c), siehe 1098, zu verzeichnen.

1186. Aufgaben. △ aus f^2, a, $t_{(m:n)}$.

△ aus f^2, h, $t_{(m:n)}$.

Analysis. Aus f^2 und a ergiebt sich h, aus f^2 und h aber a, beides nach 185; man erhält also △ aus a, h, $t_{(m:n)}$ zu konstruiren, siehe 1050.

1187. Aufgabe. △ aus f^2, a, $t'_{(m:n)}$.

Analysis. 1) Da b durch t' nach dem Verhältniß m : n getheilt wird, verhalten sich auch die beiden △, in welche t' △ ABC zerlegt wie m : n, weshalb dasjenige von beiden △△, welches a und t' zu Seiten hat, an Größe $= \frac{m}{m+n} f^2$ ist, folglich nach 194 gezeichnet werden kann, und sich aus diesem das andere, also auch △ ABC, durch Verlängerung der gefundenen Seite nach m : n ergeben muß.

Analysis 2). f^2 und a bestimmen h nach 185; man hat also △ aus a, h, $t'_{(m:n)}$, siehe 1101, zu konstruiren.

1188. Aufgabe. △ aus f^2, h, $t'_{(m:n)}$.

Analysis 1) f^2 und h bestimmen a nach 185, es läßt sich also diese Analysis nach der ersten von 1187 vollenden.

Analysis 2.) f^2 und h bestimmen a nach 185; man hat also △ aus a, h, $t'_{(m:n)}$, siehe 1101, zu konstruiren.

1189. Fig. 183. Aufgabe. △ aus f^2, α, $t'_{(m:n)}$.

Analysis. Da sich die beiden Theile des △ ABC, in welche dasselbe von t' zerlegt wird, wie m : n verhalten, ist die Fläche des α enthaltende Theils $= \frac{n}{m+n} f^2$. Aus dieser Fläche und der Seite t' ergiebt sich aber nach 186 die auf derselben stehende Höhe; man hat also ein △ aus a, h, α, siehe 788, zu konstruiren, u. s. w.

1190. Fig. 191. Aufgabe. △ aus f^2, α, $t_{(m:n)}$.

Analysis. Sei AD $=$ t. Zieht man durch C eine ∥ zu c, und verlängert t bis E, so ergiebt sich, da △ ABD

$\sim \triangle$ CDE ist, $AB : EC = BD : DC$, d. h.

$AB : EC = m : n$. Nun ist aber auch

$AB : EC = \triangle ABC : \triangle ECA$, da beide $\triangle\triangle$ dieselbe Höhe CG haben, folglich hat man

---

$m : n = f^2 : \triangle ECA$, aus welcher Proportion $\triangle ECA$ bestimmt werden kann, wenn man f^2 in ein $\triangle$ mit der Seite m verwandelt, die Länge n an m setzt, und den Endpunkt mit der Spitze des Gegen$\angle$ von m verbindet. Ferner ergiebt sich noch AE, da $m : n = t : DE$ sein muß, und endlich $\angle ACE = 2R - \varepsilon$; also läßt sich $\triangle ACE$ aus der Fläche, einer Seite und dem Gegen$\angle$ nach 873 konstruiren, und aus diesem $\triangle$ das verlangte ABC ableiten.

1191. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, γ, $(h + h')$.

Analysis. γ und $(h + h')$ bestimmen $(a + b)$ nach 149, man erhält also $\triangle$ aus f^2, γ, $(a + b)$, siehe 1176, zu konstruiren.

1192. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, γ, $(h' - h)$.

Analysis. γ und $(h' - h)$ bestimmen $(a - b)$ nach 152, man erhält also $\triangle$ aus f^2, γ, $(a - b)$, siehe 1177, zu konstruiren.

1193. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, $(a + b)$, $(h + h')$.

Analysis. $(a + b)$ und $(h + h')$ bestimmen γ oder $2R - \gamma$ nach 149; man erhält also $\triangle$ aus f^2, γ, $(a + b)$, siehe 1176, zu konstruiren.

1194. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, $(a - b)$, $(h' - h)$.

Analysis. $(a - b)$ und $(h' - h)$ bestimmen γ oder $2R - \gamma$ nach 152; man erhält also $\triangle$ aus f^2, γ, $(a - b)$, siehe 1177, zu konstruiren.

1195. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, γ, $[(a + b) + (h' + h)]$.

Analysis. γ bestimmt $a : h'$, nun ist aber $a : h = b : h$, also $a + b : h' + h = a : h'$, folglich auch das Verhältniß von $(a + b)$ und $(h' + h)$ bekannt; hiedurch erhält man nach 390 $\triangle$ aus f^2, $(a + b)$, γ, siehe 1176, zu konstruiren.

1196. Aufgabe. $\triangle$ aus f^2, γ, $[(a + b) - (h' + h)]$.

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1195, nur daß hier, um $(a+b)$ zu erhalten, 452 angewendet werden muß.

1197. Aufgabe. $\triangle$ aus f^a, γ, $[(a-b)+(h'-h)]$.

Analysis. Stimmt mit 1195 überein, nur daß hier die Verhältnißglieder subtrahirt werden müssen.

1198. Aufgabe. $\triangle$ aus f^a, γ, $[(a-b)-(h'-h)]$.

Analysis. Stimmt mit 1196 überein, nur daß hier die Verhältnißglieder subtrahirt werden müssen.

1199. Aufgabe. Es sollen die Flächen mehrerer $\sim$ Figuren in eine denselben $\sim$ Figur vereinigt werden.

Auflösung. Folgt aus 554 auf dieselbe Art wie man die Summe mehrerer Quadrate findet.

1200. Aufgabe. Es soll der Unterschied zweier ähnlichen Figuren als eine denselben ähnliche Figur dargestellt werden.

Auflösung. Folgt aus 554 auf dieselbe Art wie man die Differenz zweier Quadrate findet.

4tes Kapitel.

Kreis-Aufgaben.

1201. Aufgabe. $\odot$ aus L, P, P^a.

Analysis. Verlängert man PP^a bis L, so läßt sich die in dem entstandenen Durchschnittspunkt endigende Tangente, als mittlere Proportionale zwischen der gezeichneten Sekante und dem äußeren Abschnitt, folglich auch der Berührungspunkt bestimmen.

Zusatz. Es können sich zwei der Lage und Größe nach verschiedene Resultate ergeben.

1202. Aufgabe. $\odot$ aus L, K $=K^a$, gleichart. B. (Wie ungleichart. Ver. siehe 1879).

Analysis. Beschreibt man um μ eine M durchlaufende

Kreislinie, so trifft dieselbe auch M', und bestimmt die Entfernung einer L ∓ Berührungslinie um r oder r', weshalb sich diese zeichnen läßt, und man die Aufgabe auf 1202 : ⊙ aus L, F, P' reduzirt hat.

1203. Aufgabe. ⊙ aus P, K = K'; gleichart. B. (Die ungleichart. Ber. siehe 2081.)

Analysis. Beschreibt man um μ eine M und M' durchlaufende Kreislinie, so bestimmt sich der Radius eines dieselbe berührenden ⊙ um P = r, und es ist die Aufgabe hiedurch auf ⊙ aus P, P', K, siehe 677, reduzirt.

1204. Aufgabe. ⊙ aus K = K' = K'', ungleichart. B. 2 ⊙⊙ v. A. und der dritte v. J., oder umgekehrt.

Analysis. Beschreibt man um μ eine M' und M'' durchlaufende Kreislinie, so bestimmt sich der Radius eines dieselbe v. J. oder v. A. berührenden ⊙ um M = 2r, und es ist die Aufgabe hiedurch auf ⊙ aus P, P', K, siehe 577, reduzirt.

1205. Aufgabe. ⊙ aus K, K' = K''; K' und K'' sollen gleichartig berührt werden. (Die ungleichart. B. von K' und K'' siehe 2082.)

Analysis. Es bestimmt sich in derselben Art wie in 1204 der Radius eines Berührungskreises = r + r' oder r − r', und die Aufgabe reduzirt sich hiedurch in den verschiedenen Fällen auf 577.

1206. Aufgabe. ⊙ aus L, L', P.

Analysis 1). Die Halbirungslinie des ∠ (LL') ist nach 276 ein Ort für μ. Durch diesen Ort und P bestimmt sich ein zweiter Punkt für die gesuchte Kreislinie, wenn man den auf jenen Ort aus P gefällten ⊥ um sich selbst verlängert. Hiemit ist die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', L (1201) zurückgeführt.

Analysis 2). Fig. 192. Da ein Ort für μ durch 276 gegeben ist, hat man eigentlich nur die Aufgabe P μ gleich dem ⊥ B μ zu ziehen. Verbindet man aber P mit D, und zeichnet beliebig BR ∓ Bμ, RP ∓ μP, so muß auch BR = RD

nach 545 sein, weshalb sich eine leichte Auflösung ergiebt, wenn man einen beliebigen $\perp$ BM fällt, PM = BM abschneidet, und $P\mu \neq$ PM zieht.

Zusatz. Es sind zwei der Lage und Größe nach verschiedene Resultate möglich.

1207. Aufgabe. ⊙ aus P, L', L_μ.

Analysis. Da μ in L fallen soll, muß, wenn man aus dem Durchschnitt von L und L' eine zweite Berührungslinie zieht, der von derselben mit L gebildete $\angle = \angle$ (LL') sein, weshalb sich die Aufgabe auf die vorhergehende reduzirt.

1208. Aufgabe. ⊙ aus P, L_μ, K.

Analysis. L_μ und P bestimmen nach 315 einen zweiten Punkt für die gesuchte Kreislinie; man hat also 577 zu konstruiren.

1209. Aufgabe. ⊙ aus P, P', K_d.

Analysis 1.) Da K halbirt werden soll, ist der Durchmesser 2r Sehne des gesuchten ⊙, also r mittlere Proportionale zwischen PM und der von der geforderten Kreislinie begrenzten Verlängerung. Daraus läßt sich aber diese selbst mit ihrem Endpunkt bestimmen, und die Aufgabe folglich durch ⊙ aus P, P', P'' lösen.

Analysis 2.) Verlängert man die M durchlaufende gemeinschaftliche Sehne 3is zur Lage PP', so ergiebt sich in dieser Linie ein Punkt, in welchem nach 576 die Verlängerungen aller Sehnen zusammentreffen, deren Endpunkte zugleich von K und einer beliebigen P, P' und K durchschneidenden Kreislinie gebildet werden. Dieser Punkt läßt sich wie in 577 bestimmen; also hat man aus demselben nur eine Sekante für K durch M zu legen, so ergeben sich 2 neue Punkte der gesuchten Kreislinie.

Analysis 3.) Siehe 1571.

1210. Aufgabe. ⊙ aus P, L, K_d.

Analysis. Durch den Sehnensatz ergiebt sich, wie in Analysis 1) der vorhergehenden Aufgabe ein zweiter Punkt für die gesuchte Kreislinie, weshalb man 1201 zu lösen hat.

1211. Aufgabe. ⊙ aus P, K_d, $K'_{d'}$.

Analysis 1). P und K_d bestimmen wie in Analysis 1) 1209 einen zweiten, P und $K'_{d'}$ einen dritten Punkt der gesuchten Kreislinie.

Analysis 2.) Siehe 1572.

1212. Aufgabe. ⊙ aus P, K', K_d.

Analysis. P und K_d bestimmen wie in Analysis 1) 1209 einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie, weshalb man ⊙ aus P, P', K' (577) zu lösen hat.

1213. Aufgabe. ⊙ aus L, L'_s, P in L'.

Analysis. Die vom Durchschnitt D der Linien L und L' begrenzte Berührungslinie läßt sich als mittlere Proportionale zwischen DP ± s und DP, also ein dritter Punkt der gesuchten Kreislinie bestimmen.

Zusatz. Es sind zwei der Lage und Größe nach verschiedene Resultate möglich.

1214. Aufgabe. ⊙ aus L_s, L', P in L'_s.

Analysis. Verlängert man L und L' bis zum Durchschnitt, so ergiebt sich, da P festliegt, eine Berührungslinie des gesuchten ⊙, welche mittlere Proportionale zwischen dem äußeren Abschnitt + s und dem äußeren Abschnitt selbst ist, woraus sich dieser nach 459 bestimmen läßt, und folglich drei Punkte der gesuchten Kreislinie festgestellt werden können.

1215. Aufgabe. ⊙ aus P, P', L_s.

Analysis. Verlängert man PP' bis zum Durchschnitt D mit L, so ergiebt sich die Sekante DP' und der äußere Abschnitt DP. Von der zweiten Sekante ist nur s bekannt. Es findet sich aber, wenn man den äußeren Abschnitt derselben x nennt, $DP' : x + s = x : DP$, weshalb sich nach 459 x, also ein dritter Punkt der gesuchten Kreislinie bestimmen läßt.

Zusatz. Es sind zwei der Lage und Größe nach verschiedene Resultate möglich.

1216. Aufgabe. ⊙ aus P, L_μ, L'_s.

Analysis. L_μ und P bestimmen einen zweiten Punkt

der gesuchten Kreislinie nach 315; man hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

1217. Aufgabe. ⊙ aus P, L_1, L_2.

Analysis. Da beide Sehnen gleich werden sollen, und ihr Abstand von μ ebenfalls gleich sein, also dieser Punkt in die Halbirungslinie des $\angle$ (LL') fallen. Hiemit ist aber die Aufgabe auf die vorhergehende reduzirt.

1218. Aufgabe. ⊙ aus P, P', K.

Analysis. Kennt man die 577 abgehandelte Hilfsaufgabe ⊙ aus P, P', K, so ergiebt sich bald, daß in der Lage der Linie PP' ein Punkt bestimmbar ist, in welchem die Verlängerung von s treffen muß. Durch s und K ist aber der Ort 316 bestimmbar, folglich hat man aus dem genannten Punkte nur an diesen Ort eine Berührungslinie zu legen, um zwei neue Punkte der gesuchten Kreislinie zu erhalten.

Zusatz. Es ergeben sich zwei der Lage und Größe nach verschiedene ⊙⊙.

1219. Aufgabe. ⊙ aus K, L, P in L.

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in der vorhergehenden Aufgabe.

1220. Aufgabe. ⊙ aus K, K', P in K'.

Analysis. Zieht man in P eine Berührungslinie zu K', so erhält man die vorhergehende Aufgabe zu konstruiren.

1221. Aufgabe. ⊙ aus P', P_b, L. (359.)

Analysis. Zieht man die Sekante PP', so durchschneidet dieselbe die gesuchte Kreislinie in einem zweiten Punkte, welcher X heißen mag, und es ergiebt sich $PX \times PP' = b^2$. Hiedurch läßt sich X bestimmen, und die Aufgabe reduzirt sich auf 1201.

Anwendung. Die 359 erwähnte doppelte Einkleidung der Aufgaben, welche P_b enthalten, ist in Erinnerung zu bringen.

1222. Aufgabe. ⊙ aus P', P_b, K.

Analysis. Führe in derselben Art wie die vorhergehende Aufgabe zu 577.

1223. Fig. 193. **Aufgabe.** ⊙ aus L_1, L'_1, L''_1.

Analysis. Durch den ∠ α ist der halbe Centri∠ $A\mu B = 2R - \alpha$, also $A\mu : \mu B$ oder $\mu C : \mu B$ nach 403 gegeben, weshalb man, da beide Linien zugleich ⊥ auf L'' und L' sind, einen Ort für μ nach 546 erhält. Den zweiten Ort giebt aber 276; es läßt sich also μ bestimmen.

1224. **Aufgabe.** ⊙ aus L'', L_μ, L'_a.

Analysis. Zieht man aus dem Scheitel des ∠ (LL'') eine zweite Berührungslinie, so ist der entstehende ∠ = ∠ (LL''); man hat also die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

1225. **Aufgabe.** ⊙ aus P', L_μ, P_b. (339)

Analysis. P' und P_b bestimmen wie in 1221 einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie, also auch nach 72 einen zweiten Ort für μ, u. s. w.

1225. a. Fig. 412. b. **Aufgabe.** ⊙ aus P_b, P'_b, L_μ. (359)

Analysis. Nach der Anmerkung von 362 ergiebt sich ein zweiter Ort für μ.

Konstruktion. Sind P und G die gegebenen festen Punkte, PT und GU aber die Berührungslinien b und b', so beschreibe man mit denselben ⊙⊙ um P und G, zeichne beliebig einen dieselben schneidenden ⊙, z. B. um W, und fälle aus dem Durchschnittspunkt V der entstandenen gemeinschaftlichen Sehnen einen ⊥ VO auf die Lage der Centrale, so bildet der Schneidungspunkt mit L, z. B. O, wenn L durch P und G ginge, den gesuchten Mittelpunkt, und der Radius ergiebt sich, wenn man aus O eine Tangente, z. B. OU, an einen der ⊙⊙ um P und G legt.

Beweis. ∠ OUG ist nach der Konstruktion = R, es ist also nur darzuthun, daß man auch ∠ OTP = R erhalten hat. Zieht man aus V Tangenten VH und VI an die ⊙⊙ um P und G, so ergiebt sich VH = VI, da VH^2 und VI^2 den gleichen □□ VD×VC und VF×VE gleich sind. Hieraus folgt $VP^2 - b^2 = VG^2 - b'^2$, also auch $VP^2 - VG^2$, oder (209) $OP^2 - OG^2 = b^2 - b'^2$

und $OP^2 - b^2 = OG^2 - b'^2$. Nach der Konstruktion ist aber $OG^2 - b'^2 = OU^2$, daher muß $OP^2 - PT^2 = OT^2$, und deshalb $\angle OTP = R$ sein.

Anmerkung. Eine zweite Analysis führt durch die Anmerkung von 2083 zu ⊙ aus P, P′, L_μ.

1226. Aufgabe. ⊙ aus P, L_μ, K_ε.

Analysis. P und L_μ bestimmen einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie, nach 315; man hat also 1218 zu konstruiren.

1227. Aufgabe. ⊙ aus P, P'_b, K_d. (359) (Vergl. 1572. a.)

Analysis. Wie in 1209 Analysis 1) bestimmen P und K_d durch den Sehnensatz einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie, P und P'_b ergeben aber durch den Sekantensatz wie in 1221 einen dritten Punkt, also die Kreislinie selbst.

1228. Aufgaben. ⊙ aus ϱ, L_μ, K_d.
⊙ aus ϱ, K'_μ, K_d.

Analysis. r^2 ist $= (\varrho + M\mu)(\varrho - M\mu) = \varrho^2 - M\mu^2$, also $M\mu^2 = \varrho^2 - r^2$. Durch $M\mu$ erhält man aber einen zweiten Ort für μ, folglich läßt sich der gesuchte Mittelpunkt bestimmen.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

1229. Aufgabe. ⊙ aus P, K'_s, K_d.

Analysis. P und K_d bestimmen durch den Sehnensatz einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie; man hat also 1218 zu konstruiren.

1230. Aufgabe. ⊙ aus P′, K_s, P_b. (359)

Analysis. P′ und P_b bestimmen durch den Tangentensatz einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie, man hat also 1218 zu konstruiren.

1231. Aufgaben. ⊙ aus L, L'_α, L''_μ.
⊙ aus L, L'_α, K_μ.

Analysis. L und L'_α bestimmen ganz wie in 1223 einen Ort für μ u. s. w.

1232. Fig. 230. Aufgabe. Es ist ein festliegender Halbkreis gegeben und in dem einen Endpunkt des Durchmessers eine Tangente gezogen; man soll eine Kreislinie zeichnen, welche den zweiten Endpunkt des Durchmessers schneidet, mit ihrem Centrum in den Umfang des Halbkreises fällt, und endlich die gezogene Tangente berührt.

Analysis. Fällt man aus μ auf AC den $\perp$ μH, so ergiebt sich $CH = B\mu = \mu A$. Da nun $CA : \mu A = \mu A : HA$ ist, müßte deshalb $CA : CH = CH : HA$ sein, d. h. der gegebene Durchmesser AC ist zur Bestimmung von H nach dem goldenen Schnitt zu theilen, um durch einen in H auf AC errichteten $\perp$ das gesuchte Centrum μ festzustellen.

1233. Fig. 194. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \mp L'_\nu, L''$.

Analysis. Durch α bestimmt sich der halbe Centri$\angle$ $A\mu B = 2R - \alpha$, also die $\rightarrow$ von μB. Da nun $CD = \frac{1}{2}s$ gegeben ist, also vorläufig festgelegt werden kann, hat man die Hilfsaufgabe 552 zu lösen, um μD oder ϱ nebst μA und μC zu erhalten. Hiedurch ergiebt sich aber ein Ort für $\mu \mp L_\nu$ und die Aufgabe ist auf $\odot$ aus L_μ, ϱ, L'' reduzirt.

1234. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \mp L'_\nu, K_\nu$.

Analysis. Die Aufgabe reduzirt sich in derselben Art wie in 1233 auf $\odot$ aus L_μ, ϱ, K_ν, siehe 383.

1235. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \mp L'_\nu, L''_{\mu\nu}$.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1233 zu $\odot$ aus L_μ, ϱ, L'_ν, siehe 925.

1236. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \mp L'_\nu, K_{\mu\nu}$.

Analysis. Führt in derselben Art wie in 1233 auf $\odot$ aus $L_\mu, \varrho, K_{\mu\nu}$, siehe 926.

1237. Aufgaben. $\odot$ aus $L_\alpha \mp L'_\nu, L''_{\mu\nu}$.
$\odot$ aus $L_\alpha \mp L'_\nu, K_{\mu\nu}$.

Analysis. In derselben Art wie in 1233 erhält man einen zweiten Ort für μ, und ϱ; hierdurch ergiebt sich aber μ und der gesuchte $\odot$.

1238. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\varepsilon$, L''_β.

Analysis. Führt ganz wie in 1233 zu $\odot$ aus $L_{\mu\varrho}$, L'_α, siehe 929.

1239. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\varepsilon$, K_d.

Analysis. Führt ganz wie in 1233 zu $\odot$ aus L_μ, ϱ, K_d, siehe 905.

1240. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\varepsilon$, P_b. (359)

Analysis. Führt ganz wie in 1233 zu $\odot$ aus L_μ, ϱ, P_b, siehe 942.

1241. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\varepsilon$, K_b. (360)

Analysis. Führt ganz wie in 1233 zu $\odot$ aus L_μ, ϱ, K_b, siehe 949.

1242. Fig. 194. **Aufgabe.** $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\beta$, L''.

Analysis. Durch die $\measuredangle\,\alpha$ und β sind die halben Centri $\measuredangle\,A\mu B$ und $C\mu D$, also die Verhältnisse $A\mu : \mu B$ und $\mu D : \mu C$ gegeben, welche $= m : n$ und $m' : n'$ sein mögen. Setzt man dieselben zusammen, so findet sich, da $\mu B = \mu D$ ist, $A\mu : \mu C = mm' : nn'$. Nun kennt man aber auch die Summe dieser Abschnitte, folglich lassen sich dieselben nach 472 einzeln bestimmen, und damit ein Ort für μ feststellen. Zugleich ergiebt sich noch durch einen der vorgeschriebenen $\measuredangle$ die Hypotenuse μD oder ϱ; man hat also die Aufgabe auf $\odot$ aus ϱ, L_μ, L' reduzirt.

1243. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\beta$, K.

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu $\odot$ aus ϱ, L_μ, K, siehe 383.

1244. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\beta$, L''_ε.

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu $\odot$ aus ϱ, L_μ, L''_ε. (925).

1245. Aufgabe. $\odot$ aus $L_\alpha \neq L'_\beta$, K_ε.

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu $\odot$ aus ϱ, L_μ, K_ε. (926).

1246. Aufgaben. ⊙ aus $L_\alpha \fallingdotseq L'_\beta, L''_\mu$.

⊙ aus $L_\alpha \fallingdotseq L'_\beta, K_\mu$.

Analysis. Ganz wie in 1242 erhält man einen zweiten Ort für μ, und ϱ; hiedurch ergiebt sich aber μ selbst und der gesuchte ⊙.

1247. Aufgabe. ⊙ aus $L_\alpha \fallingdotseq L'_\beta, L''_\gamma$.

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu ⊙ aus ϱ, L_μ L''_γ, siehe 929.

1248. Aufgabe. ⊙ aus $L_\alpha \fallingdotseq L'_\beta, K_d$.

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu ⊙ aus ϱ, L_μ K_d, siehe 905.

1249. Aufgabe. ⊙ aus $L_\alpha \fallingdotseq L'_\beta, P_b$. (359)

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu ⊙ aus ϱ, L_μ P_b, siehe 942.

1250. Aufgabe. ⊙ aus $L_\alpha \fallingdotseq L'_\beta, K_b$. (360)

Analysis. Führt ganz wie in 1242 zu ⊙ aus ϱ, L_μ, K_b, siehe 949.

1251. Fig. 195. **Aufgabe.** ⊙ aus P, P', L_α.

Analysis. Nach 72 ergiebt sich durch P und P' ein Ort für μ. α bestimmt aber den halben Centri $\angle$ $C\mu D$, also das Verhältniß $C\mu : \mu D$ oder $P\mu : \mu D$ nach 403, folglich läßt sich, da μD ein $\perp$ ist, μ mittelst der Hilfsaufgabe 552 feststellen, und der verlangte ⊙ beschreiben.

1252. Fig. 196. **Aufgabe.** ⊙ aus P, L, L'_α.

Analysis. α bestimmt den halben Centri $\angle$ $E_\mu G$, und mittelst desselben nach 403 das Verhältniß $E\mu : G_{\mu_1}$ oder $E\mu : \mu B$, wodurch sich nach 546 ein Ort für μ ergiebt, da beide Linien $\perp\!\!\perp$ auf L und L' sind. Hiemit ist aber die Aufgabe auf ⊙ aus P, L, L'_μ, siehe 1207, reduzirt.

1253. Aufgabe. Eine Kreislinie zu konstruiren, welche n mal so groß ist als eine gegebene.

Analysis. Da sich zwei Kreislinien wie die zugehörigen Radien verhalten, muß der Radius der gesuchten Kreislinie n mal so groß sein als der Halbmesser der gegebenen.

1254. Aufgabe. Eine Kreislinie zu konstruiren, welche der Summe mehrerer gegebenen Kreislinien gleich ist.

Analysis. Sind k, k', k'' die gegebenen Kreislinien und K die gesuchte, so ergiebt sich $k : k' : k'' = r : r' : r''$,

also auch $k + k' + k'' : r + r' + r'' = k : r$, oder

$$k + k' + k'' : r + r' + r'' = K : R.$$

Da aber $K = k + k' + k''$ sein soll, muß auch nach dieser Proportion R, der Radius der gesuchten Kreislinie, $= r + r' + r''$ sein, d. h. die Länge haben, welche die Summe von den Radien der gegebenen Kreislinien bildet.

1255. Aufgabe. Eine Kreislinie zu konstruiren, welche der Differenz zweier gegebenen Kreislinien gleich ist.

Analysis. Verfährt man wie bei der vorhergehenden Aufgabe, nur daß man hier nicht addirt sondern subtrahirt, so ergiebt sich der gesuchte Radius gleich der Differenz der gegebenen beiden Radien.

1256. Aufgabe. Einen ⊙ zu konstruiren, dessen Fläche n mal so groß ist als ein gegebener ⊙.

Analysis. Da sich die Flächen zweier ⊙⊙ wie die Quadrate der Radien verhalten, folgt aus $f^2 : nf^2 = r^2 : x^2$, daß das Quadrat des gesuchten Radius oder $x^2 = nr^2$ sein muß, also nur mittelst des Pythagoräischen Satzes die Seite eines Quadrats zu finden ist, welches n mal so groß ist als ein gegebenes.

1257. Aufgabe. Einen Ausschnitt, dessen Fläche den $\frac{n}{m}$ Theil eines ⊙ bildet als ⊙ darzustellen.

Analysis. Ganz wie in der vorhergehenden Analysis ergiebt sich das Quadrat des gesuchten Radius oder $x^2 = \frac{n}{m} r^2$, und es läßt sich derselbe auch in gleicher Art bestimmen.

1258. Aufgabe. Einen ⊙ zu konstruiren, dessen Fläche der Summe mehrerer gegebenen ⊙⊙ gleich ist.

Analysis. Bezeichnen f^2, f'^2, f''^2 die Flächen der gegebenen ⊙⊙, und F^2 die Fläche des gesuchten, so ergiebt sich, da sich die Flächen wie die Quadrate der Radien verhalten, $f^2 : f'^2 : f''^2 = r^2 : r'^2 : r''^2$, also auch $f^2 + f'^2 + f''^2 : r^2 + r'^2 + r''^2 = f^2 : r^2$, oder $f^2 + f'^2 + f''^2 : r^2 + r'^2 + r''^2 = F^2 : R^2$. Da aber $F^2 = f^2 + f'^2 + f''^2$ sein soll, muß auch nach dieser Proportion $R^2 = r^2 + r'^2 + r''^2$ sein, wonach sich der gesuchte Radius R durch Anwendung des Pythagoräischen Satzes darstellen läßt.

1259. Aufgabe. Einen ⊙ zu konstruiren, dessen Fläche der Differenz zweier gegebenen ⊙⊙ gleich ist.

Analysis. Verfährt man wie bei der vorhergehenden Aufgabe, nur daß man hier subtrahirt und nicht addirt, so ergiebt sich das Quadrat des gesuchten Radius oder $R^2 = r^2 - r'^2$, weshalb R auch in diesem Fall mittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes dargestellt werden kann.

5tes Kapitel.

Theilungen.

1260. Aufgabe. Ein △ aus der einen ∠spitze nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Man theile die Grundlinie nach den gegebenen Verhältnissen, wozu dieselben, wenn dies nicht schon statt findet, nach 393 laufend gemacht werden müssen u. s. w.

1261. Aufgabe. Ein ▱ ∦ einer Seite nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Stimmt mit 1260 überein.

1262. Aufgabe. Ein □ aus dem Schnei-dungspunkt der nicht ∓ Seiten nach gegebnen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Man theile eine von den ∓ Seiten des □ nach den gebenen Verhältnissen, u. s. w.

Beweis. Fig. 197.

DQ : QO : OC = AI : IN : NB = m:n:p u. d. K.; also ist auch

△DQG:△QOG:△OCG=△AIG:△ING:△NBG=m:n:p, und durch S. d. h. Gl.

□DQIA:□QONI:□OCBN = m:n:p.

1263. Aufgabe. Ein ▱ aus der einen ∠spitze durch gerade Linien nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Man theile die der bestimmten ∠spitze gegenüberliegende Diagonale nach den gegebenen Verhältnissen, verbinde die Theilungspunkte mit den ∠spitzen, und verwandele die entstehenden ▱▱ der Bedingung gemäß nach 231.

1264. Aus den im 4ten Kapitel des 1sten Abschnitts dieses Hauptstücks, und in dem 3ten Kapitel Abschnitt 1. Hauptstück 1. gegebenen Theilungsaufgaben lassen sich eben so viel hieher gehörende neue Theilungsaufgaben bilden, wenn man keine Zerlegung der Fläche in gleiche Stücke, sondern eine Theilung nach gegebenen Verhältnissen fordert. Da es aber bei allen Theilungen nach 232 nur auf eine hier bereits in 1260 angeführte einfache Theilungsart ankömmt, sobald man die Auflösung mit der Verwandlung beginnt, und die herausgefallenen Theile nach 230 in die Figur zurückschafft, sollen 1) die vorher erwähnten Aufgaben hier nicht sämmtlich erörtert werden, und wollen wir 2) im Folgenden im Ganzen bei der Theilung in n gleiche Theile verharren, ohne die allgemeinere Theilung besonders zu berücksichtigen.

1265. Aufgabe. Ein △ durch eine in A beginnende gebrochene Linie, deren ∠spitzen ab-

wechselnd in a und b fallen, nach den Verhältnissen m:n:p:q:r zu theilen.

Auflösung. Theile zunächst a nach m:n:p:q:r, dann b nach n:p:q:r, hierauf den Rest von a nach p:q:r, zuletzt den Rest von b nach q:r. ꝛc.

1266. Aufgabe. Einen Punkt X in einem △ so zu bestimmen, daß AX, BX und CX das △ nach den Verhältnissen m:n:p zerlegen.

Analysis 1). Bezeichnen h, h′, h″ die auf a, b, c aus X gefällten ⊥⊥, so ergiebt sich

$$ah : bh' : ch'' = m : n : p, \text{ also auch}$$
$$h : h' = mb : na, \text{ und}$$
$$h' : h'' = nc : pb.$$

Hiedurch ergeben sich nach 546 zwei Oerter für X, weshalb sich dieser Punkt feststellen läßt.

Analysis 2). Sind die gesuchten Theile f^2, f'^2, f''^2, so ist, da $f^2 : f'^2 : f''^2 = m : n : p$ sein soll,

$$f^2+f'^2+f''^2 : m+n+p = f^2 : m = f'^2 : n = f''^2 : p,$$

oder

$$f^2 \quad : m+n+p = f^2 : m = f'^2 : n = f''^2 : p,$$

durch welche Proportionen die Fläche jedes Theils, also auch, wenn man a, b, c als Grundlinien annimmt, die Höhen bestimmt sind, und folglich X durch zwei nach 79 gegebene Oerter gefunden werden kann.

Analysis 3). Fig. 198. Zieht man aus X ∓∓ XD und XE zu c und b, und verbindet D und E mit A, so ergiebt sich △ BDA = △ BXA, △ EAC = △ XAC, also auch △ DEA = △ BXC, weshalb △ BAD : △ DAE : △ EAC = m : n : p = BD : DE : EC sein muß, sich folglich die Punkte D und E, und schließlich der geforderte Punkt X feststellen lassen.

Auflösung. Theile eine Seite a nach m : n : p, und ziehe durch die Theilungspunkte D und E ∓∓ zu c und b, so bestimmt deren Schnitt den geforderten Punkt X.

Anmerkung. Wenn die Verhältnisse aller Theile einer Figur bekannt sind, lassen sich die Flächen dieser Theile stets wie in der Analysis 2) bestimmen, weshalb auch alle Verhältnißtheilungen als Figuren-Konstruktionen behandelt werden können, siehe 228.

1267. Aufgabe. Ein □ (oder ▱) durch lauter von einem außerhalb gegebenen Punkte P auslaufende Linien nach bestimmten Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Ergiebt sich durch 562.

1268. Aufgabe. Ein ▱ durch gerade, in einer Winkelspitze zusammentreffende Linien, nach bestimmten Verhältnissen zu theilen.

Auflösung 1). Ziehe die beiden Mittellinien des ▱, theile dieselben von den Schenkeln der bestimmten ∠spitze aus in entgegengesetzter Ordnung nach den vorgeschriebenen Verhältnißzahlen, und verbinde die Winkelspitze mit den beiden an die genannten Schenkel zunächst fallenden Theilungspunkte, so ergiebt sich der erste und letzte geforderte Theil. Die Wiederholung desselben Verfahrens in Beziehung auf jedes Paar folgende Theilungspunkte bestimmt in derselben Art die übrigen Theile.

Beweis. Folgt aus 562.

Auflösung 2). Sollen sich die Theile wie $m:n:o:p:q$ $(= 3:2:1:4:5)$ verhalten, so theile man jede von den beiden durch die theilenden Linien geschnittenen Seiten des ▱ in $m+n+o+p+q$ (15) gleiche Theile, und verbinde (den Schneidungspunkt der getheilten ▱ Seiten mit gerechnet) den $2m$ten (6ten), den $2(m+n)$ten (10ten), den $2(m+n+o)$ten (12ten), den $2(m+n+o+p)$ten (20ten) Theilungspunkt mit der bestimmten ∠spitze, so erhält man die verlangten Theilungslinien.

Beweis. Verbände man alle (28) Theilungspunkte und die ∠spitze mit dem Scheitel, in welchem die Theilungslinien zusammentreffen sollen, so ergäben sich $2(m+n+o+p+q)$

(oder 30) gleiche △△, von denen nach der Auflösung der erste Theil 2m (oder 6), der zweite 2n (oder 4), der dritte 2o (oder 2), der vierte 2p (oder 8), der fünfte 2q (oder 10) solcher △△ enthält, weshalb sich die Theile wie 2m:2n:2o:2p:2q (oder 6:4:2:8:10), also auch wie m:n:o:p:q (oder 3:2:1:4:5) verhalten.

1269. Aufgabe. Ein neck durch gerade Linien, welche von einer ∠spitze auslaufen, nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Verwandele das neck so in ein △, daß eine ∠spitze des letzteren mit der bestimmten des ersteren zusammenfällt, theile das △ nach 1260 von dieser ∠spitze aus, und schaffe die herausfallenden Theile nach 230 in die Figur zurück.

1270. Fig. 199. Aufgabe. Ein △ durch ⫩ Linien zu einer Seite, z. B. a, in n gleiche Theile zu theilen.

Analysis 1). Theilt man die Seite b, und verbindet die Theilungspunkte mit B, so hat man die entstehenden △△ ADB, AEB nach 553 so zu verwandeln, daß ∠ A unverändert bleibt, und die Gegenseiten die ⇾ von a erhalten.

Auflösung. Theile AC in n gleiche Theile, errichte in den Theilungspunkten D, E ⊥⊥, beschreibe über AC einen Halbkreis, und um A mit AS und AQ Kreislinien, ziehe endlich durch die Schneidungspunkte N und O mit b ⫩⫩ zu a, so ergeben sich die verlangten Theile.

Analysis 2). Siehe U. d. A. §. 28.

Anmerkung. Analysis 1) und 2) führen zu derselben Auflösung, weshalb der U. d. A. §. 28. gegebene Beweis für beide giltig ist.

1271. Aufgabe. Ein △ durch gerade Linien, welche bestimmte ⇾⇾ haben, in n gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Ergiebt sich durch 553, da man nur nach

und nach $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$ ꝛc. des gegebenen △ auf die daſelbſt angegebene Art abzuſchneiden hat.

1272. Aufgabe. Ein △ durch lauter ⊥⊥ zu einer Seite in n gleiche Theile zu theilen.

Analyſis. Folgt aus 1271.

1273. Aufgabe. Ein ▱ durch lauter ⫽ ⫽ zu einer Diagonale in n gleiche Theile zu theilen.

Auflöſung. Theile jedes von der Diagonale gebildete △ nach 1270, wenn n gerade iſt, in $\frac{1}{2}$n, und wenn n ungerade iſt, in n gleiche Theile, ſo genügt der Aufgabe im erſten Fall jeder einzelne Theil, im zweiten aber müſſen hiezu, von den ∠ſpitzen aus gerechnet, deren zwei zuſammengenommen werden.

1274. Fig. 200. **Aufgabe.** Ein ▭ durch ⫽ Linien zu den ⫽ Seiten in n gleiche Theile zu theilen.

Auflöſung. Verwandele das ▭ ABCD in △ ABM, theile dies von A aus durch AN, AN′ ꝛc., und verwandele ſchließlich die △△ AGN, AGN′ ꝛc. nach 553 in andere △△ mit demſelben ∠ G, und mit a oder c ⫽ fallenden Gegenſeiten.

1275. Fig. 200. **Aufgabe.** Ein ▱ durch gerade Linien, welche beſtimmte →→ haben, in n gleiche Theile zu theilen.

Auflöſung. Verfährt man wie in 1274, ſo hat man nur ſchließlich die entſtehenden △△ AGN, AGN′ ꝛc. nach 553 in andere mit demſelben ∠ G, und ſolchen Gegenſeiten dieſes ∠, welche die vorgeſchriebenen →→ haben, verwandeln.

1276. Aufgabe. Ein ▱ durch ⫽ Linien zu einer Seite in n gleiche Theile zu theilen.

Auflöſung ꝛc. Folgt aus 1275.

1277. Aufgabe. Ein △ durch lauter ∓ Linien zu einer Diagonale in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung ꝛc. Folgt aus 1275.

1278. Fig. 201. Aufgabe. In einem neck, z. B. Fünfeck, ist ein Punkt P gegeben, und mit den ∠spitzen verbunden; man soll dasselbe so in n gleiche Theile theilen, daß die Theilungslinien dem gegebenen neck ∼ Figuren bilden, und mit den ∠spitzen in PA, PB, u. s. w. fallen, d. h. also, es soll Figur $A''B''C''D''E'' = \frac{1}{n}$, Figur $A'B'C'D'E' = \frac{2}{n}$ des gegebenen n ecks werden.

Analysis. 3 : 2 : 1 soll = ABCDE : A′B′C′D′E′ : A″B″C″D″E″ werden. Dazu müßte auch 3 : 2 : 1 = $BC^2 : B'C'^2 : B''C''^2$, und 3 : 2 : 1 = PBC : PB′C′ : PB″C″ sein; man hat also nur 1270 anzuwenden, um die Lage der verlangten Theilungslinien zu erhalten.

Auflösung. Theile eins der gegebenen △△, z. B. PBC durch lauter ∓ zu BC nach 1270 in n gleiche Theile, ziehe aus den hiedurch erhaltenen Punkten B′, B″ ∓∓ zu AB, durch A′, A″ ∓∓ zu AE, durch E′, E″ ∓∓ mit ED, und verbinde D″ mit C″, D′ mit C′, so bilden A′B′C′D′E′, A″B″C″D″E″ die verlangten Theilungslinien.

Beweis. PC″ : PC′ : PC = PB″ : PB′ : PB = PA″ : PA′ : PA = PE″ : PE′ : PE = PD″ : PD′ : PD. Hieraus folgt die Parallelität von D″C″ und D′C′ mit DC, und ferner die Aehnlichkeit der gebildeten Figuren mit der gegebenen. Die Richtigkeit der Theilung in Hinsicht der Größe ergiebt sich aber, da nach der Auflösung 3 : 2 : 1 = PBC PB′C′ : PB″C″ also auch = $BC^2 : B'C'^2 : B''C''^2$, und wegen der Aehnlichkeit schließlich = ABCDE : A′B′C′D′E′ : A″B″C″D″E″ sein muß.

1279. Fig. 202. Aufgabe. Einen ○ durch lauter Kreislinien, welche sich unter einander

und die Peripherie des gegebenen ⊙ in demsel-ben Punkte B berühren, in n gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Da sich die Flächen der ⊙⊙ wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, bestimmen sich die Pro-portionen

$$p : 1 = d^2 : x^2,$$
$$n : 2 = d^2 : x'^2,$$
$$n : 3 = d^2 : x''^2 \text{ u. s. w.,}$$

in welchen x, x', x'' ꝛc. die gesuchten Durchmesser, und d den gegebenen bedeuten. Aus diesen Proportionen ergeben sich aber x, x', x'' u. s. w., also auch die geforderten Theilungslinien.

Auflösung. Theile BE oder d in n gleiche Theile, errichte in den Theilungspunkten F, G, H u. s. w. ⊥⊥, beschreibe mit BN, BO u. s. w. Kreislinien um B, und zeichne über den hiedurch bestimmten Linien BX, BX′ ꝛc., als Durchmesser genommen, Kreislinien, so ist der gegebene ⊙ in n gleiche Theile getheilt.

Beweis. $\odot\mu : \odot M = BX^2 : BE^2 = BN^2 : BE^2 = BE \times BF : BE^2 = BF : BE = 1 : n$, also ist $\odot\mu = \frac{1}{n}$ von ⊙ M. Eben so läßt sich zeigen, daß $\odot\mu' = \frac{2}{n}$ von ⊙ M, $\odot\mu'' = \frac{3}{n}$ von ⊙ M u. s. w. ist. Hieraus geht aber genügend hervor, daß sowohl der ⊙ μ, als jede der folgenden ringartigen Figuren, $\frac{1}{n}$ des gegebenen ⊙ bildet.

6tes Kapitel.

Gemischte Aufgaben.

1280. Was für Figuren entstehen, wenn man bei den verschiedenen Arten von △△ die Mitten der Seiten durch gerade Linien verbindet?

1281. Was für Figuren entstehen, wenn man die Mitten der aufeinanderfolgenden Seiten bei den verschiedenen Arten von ▱▱ durch gerade Linien verbindet?

Im ▯ entsteht ein ▯.

" ▭ " " ◇.

" ◇ " " ▭.

" ▭ im ⊙ entsteht ein ◇.

In jedem ▱ überhaupt entsteht ein halb so großes ▱.

1282. Analogie zu 1281. Was für eine Figur entsteht, wenn man die Mitten der beiden Diagonalen eines ▱ mit den Mitten eines Paars Gegenseiten verbindet?

Ein ▱.

1283. Aufgabe. Gegeben L, L′ und P; man soll eine von L und L′ begrenzte Linie XY so durch P legen, daß sich die von P bestimmten Abschnitte PX und PY wie m:n verhalten.

Analysis 1). Folgt aus 514. } sowohl bei der Lage
Analysis 2). Folgt aus 535. } von P außerhalb als zwischen L und L′.

1284. Aufgabe. Eine Linie a so zu theilen, daß das Quadrat des einen Theils dem Rechteck aus einer Linie b und dem anderen Theil gleich wird.

Analysis. Es soll $a-x : x = x : b$ sein. Hieraus folgt d. Add. d. V. Gl. $a : b + x = x : b$, weshalb sich x nach 459 konstruiren läßt.

1285. Fig. 208. Aufgabe. In einer festliegenden Linie AB ist ein Punkt C gegeben, man soll einen zweiten X so bestimmen, daß AC:CX = CX:BX wird.

Analysis. Es wäre AC:CX = CX:BX, wenn man (d. Add. d. h. Gl.) AX:BC = AC:CX hätte. Mittelst dieser Proportion läßt sich aber AX oder CX, folglich auch X nach 459 bestimmen.

1286. Aufgabe. Zwei Linien zu finden, deren Quadrate sich wie m:n verhalten.

Auflösung. Konstruire aus m und n, als p und q in c genommen, ein △, so bilden nach 472 die Katheten desselben die verlangten beiden Linien.

1287. Aufgabe. Eine Linie AB so zu theilen, daß sich die Quadrate der Abschnitte wie m:n verhalten.

Analysis. Folgt aus 1286.

Auflösung. Theile AB = m:n, und beschreibe über den erhaltnen Abschnitten als p und q in c ein △, so bestimmt die Halbirungslinie des rechten∠ den gesuchten Punkt in AB.

1288. Aufgabe. Ueber einer Linie a ein △ zu konstruiren, von welchem sich die Quadrate der Seiten wie 3 gegebene Linien verhalten.

Analysis. Nach 1286 lassen sich drei Linien x, y, z so bestimmen, daß $x^2 : y^2 : z^2 = m : n : p$ ist. Aus diesen Linien erhält man aber die Gestalt des verlangten △, und kann derselben wie in 440 die Seite a geben.

1289. Aufgabe. Es sind zwei sich berührende Kreislinien K und K′ gegeben; man soll durch den Berührungspunkt eine von K und K′ begrenzte Linie a legen.

Analysis. Verbindet man die Endpunkte von a mit M und M′, und zieht MM′, so ergeben sich nach 301. a 2 ∾ △△; man hat also bei der Berührung von Außen die

Summe a der beiden im Berührungspunkt endigenden Sehnen, und bei der Berührung von Innen die Differenz a dieser Sehnen, während das Verhältniß derselben wie r : r' gegeben ist, also die Sehnen einzeln nach 390 oder nach 452 konstruirt werden können, woraus sich die gesuchte Lage von a leicht ergiebt.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

1289. a. Fig. 437. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; es soll ein Punkt X' so bestimmt werden, daß sich der ⊥ P'' I'', welchen man auf eine beliebig durch X' gezogene Linie fällen kann, eben so groß ergiebt als die Summe zweier anderen ⊥⊥, PI und P'I', welche aus P und P' auf dieselbe Linie gefällt werden können.

Analysis. Da P P' I' I ein ▭ bildet, muß nach 172 a. die aus der Mitte X von PP' gezogene ⊥ XH = ½ P''I'' sein. Dies fände statt, wenn auch XX' = ½ P''X', also P''X' : X'X = 2 : 1 wäre. Nun läßt sich sowohl X als der letzte Punkt X' bestimmen, und es ergeben sich dieselben Schlüsse für jede Lage von II', folglich ist der Punkt gefunden, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügt.

1290. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY durch P legen, deren ⊥ Abstände von P' und P'' sich wie m : n verhalten.

Analysis.

Lage 1). XY schneidet die Verbindungslinie von P' und P''. Es ergeben sich 2 ∾ △△, weshalb man nur P'P'' nach dem Verhältniß m : n zu theilen hat, um einen zweiten Punkt für die gesuchte Lage XY zu erhalten.

Lage 2) XY schneidet nicht die Verbindungslinie von P' und P''. Verlängert man P'P'' bis zur Lage XY, und nennt die Verlängerung x, so muß P'P'' + x : x = m : n, also (d. Subtr.) P'P'' : m — n = x : n sein, weshalb x, und hiedurch ein zweiter Punkt für die Lage XY bestimmt werden kann.

1291. Fig. 156 u. 156. a. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die ⊥ Abstände dieses Punkts von den aus P′ und P″ auf XY gefällten ⊥⊥ wie m:n verhalten (PX : PY = m : n).

Analysis. 1) Verlängert man P′X und P″P bis zu ihrem Durchschnittspunkt G, so wäre PX : PY = m : n, wenn man △ XPG ∼ △ YPP″, und P″P : PG = m : n hätte. Bestimmt man folglich G nebst P′G durch die letzte Proportion, so muß sich auch die Lage von XY als ⊥ auf GP′ ergeben.

Analysis 2). Legt man durch P eine ∦ PH zu den ⊥⊥, so ergiebt sich nach 435 P′H : P″H = PX : PY = m : n, weshalb H gegeben ist, und die Lage von XY ⊥ PH bestimmt werden kann.

1292. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, K; man soll eine Berührungslinie XY an K legen, deren ⊥ Abstände von P und P′ sich wie m : n verhalten.

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1290, nur daß man von dem erhaltenen Punkt eine Tangente an K zu legen hat.

Anmerkung. Diese und die folgenden 4 Aufgaben bilden Analogieen zu 1290, indem nur statt der Punkte ⊙⊙ eingeführt sind.

1293. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß der ⊥ Abstand derselben von P′ sich zu der ⊥ XY an K gezogenen Berührungslinie wie m : n verhält.

Analysis. Zieht man durch M eine ∦ zu der Berührungslinie, so ergiebt sich in beiden Lagen 1290 zu lösen, und es ist schließlich 282 anzuwenden.

1294. **Aufgabe.** Gegeben P, K, K′; man soll eine Berührungslinie XY an K legen, deren ⊥ Abstand von P sich zu der ⊥ XY an K′ gezogenen Berührungslinie wie m : n verhält.

Analysis. Verfährt man wie in 1293, so ergiebt sich 1292 zu konstruiren.

1295. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß zwei ⊥ XY an K und K' gezogene Berührungslinien das Verhältniß m:n erhalten.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 1293.

1296. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß zwei ⊥ XY an K'' und K' gezogene Tangenten das Verhältniß m:n erhalten.

Analysis. Zieht man durch M' und M'' ∓ ∓ zu den ⊥ XY stehenden Berührungslinien, so erhält man 1292 zu konstruiren.

1297. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß der entstehende Berührungspunkt die Entfernung zwischen den aus P und P' auf XY gefällten ⊥⊥ nach dem Verhältniß m:n theilt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1291, und es ist schließlich 282 anzuwenden.

Anmerkung. Diese und die folgenden 4 Aufgaben bilden Analogieen zu 1291, indem nur statt der Punkte ⊙⊙ eingeführt sind.

1298. Fig. 180. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß dieser Punkt die Entfernung zwischen dem aus P' auf XY gefällten ⊥ und der ⊥ XY an K gezogenen Tangente im Verhältniß m:n theilt.

Analysis. Verlängert man BX und P'P bis zu ihrem Durchschnittspunkt G, so wäre PX : PY = m : n, wenn man △ XPG ∽ △ YP'P, also PG : P'P = m : n hätte. Bestimmt man folglich G nach dieser Proportion, nebst der von

G nach K führenden Tangente GB, so muß sich die Lage von XY ⊥ GB ergeben.

1299. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß der entstehende Berührungspunkt die Entfernung zwischen dem aus P auf XY gefällten ⊥ und der ⊥ XY an K′ gezogenen Tangente nach dem Verhältniß m:n theilt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∥ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe auf die vorhergehende.

1300. Fig. 180. u. 181. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß dieser Punkt die Entfernung zweier ⊥ XY an K und K′ gezogenen Tangenten nach dem Verhältniß m:n theilt.

Analysis. In Rücksicht auf die 1298 angeführte Analysis, wird man durch Analogie darauf geleitet, wie dort P′ nach G verlegt wurde, hier eine Kreislinie, deren Radius sich zu r wie m:n verhält, in der Verlängerung von PM so um O zu verzeichnen, daß PO:PM = m:n wird, und dann zu den ⊙⊙ um O und M′ eine gemeinschaftliche Tangente, statt der in jener Aufgabe von G nach K führenden Berührungslinie, zu legen. Die nähere Untersuchung dieser Konstruktion zeigt, daß sich wirklich hiedurch die Lage von XY ergiebt.

Auflösung. Verlängere PM so bis O, daß PO:PM = m:n wird, beschreibe um O einen ⊙, dessen Radius sich zu r wie m:n verhält, ziehe zu den ⊙⊙ um O und M′ nach 318 eine gemeinschaftliche Tangente, fälle PX ⊥ B′T, und ziehe die Berührungslinie BY an K ∥ B′T nach 282, so ergiebt sich PX:PY = m:n.

Beweis. Fällt man aus O und M die ⊥⊥ ON und MQ auf XY, so ergiebt sich PN:PQ = PO:PM = m:n, wegen der Aehnlichkeit der △△ PNO und PMQ. Nun ist aber nach der Konstruktion OT:MB, oder NX:QY = m:n; man hat also PN:PQ = NX:QY, und daraus d. A. d.

β. Gt. PX : PY = NX : QY, also auch PX : PY = m : n w. z. b. w.

1301. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß der Berührungspunkt die Entfernung zweier ⊥ XY an K″ und K′ gezogenen Tangenten nach dem Verhältniß m : n theilt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe auf die vorhergehende, so daß man nur schließlich bei der Konstruktion 282 anzuwenden hat.

1302. Aufgabe. Gegeben L ∓ L′, P in L, und P′ in L′; man soll von P und P′ aus zwei sich unter ∠ α schneidende Linien ziehen, die in L und L′ endigen, und von einander in zwei das Verhältniß m : n enthaltende Abschnitte getheilt werden.

Auflösung. Theilt man PP′ nach dem Verhältniß m : n, und wendet die beiden Oerter 514 und 320 an, so ergiebt sich der Schneidungspunkt der verlangten Linien.

Zusatz. Es lassen sich zwei Paar solcher Linien ziehen.

1303. Fig. 204. Aufgabe. Gegeben L, L′, P in L, und P′ in L′; man soll von P nach L′ eine, und von P′ nach L eine andere Linie ziehen, von denen jede die andere in zwei sich wie m : n verhaltende Abschnitte zerlegt.

Analysis. Da PX : XZ = P′X : XY = m : n sein soll, ergiebt sich △ PXP′ ∼ △ ZXY, und PP′ ∓ ZY, weshalb PP′ : YZ = m : n sein muß, also YZ bestimmbar ist, und nach 94 zwischen L und L′ geschoben werden kann, wodurch sich die Endpunkte der geforderten Linien feststellen.

1304. Fig. 204. Aufgabe. Gegeben L, L′, P in L, und P′ in L′; man soll von P nach L′ eine, und von P′ nach L eine andere Linie so ziehen, daß sich beide unter ∠ α schneiden, und das

Rechteck aus den Abschnitten der einen ($PX \times XZ$) dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der anderen ($P'X \times XY$) gleich wird.

Analysis. Da $XP \times XZ = XP' \times XY$ werden soll, geht eine Kreislinie durch $PYZP'$, und es ist $\angle XP'Z = \angle XPY$, weshalb $\angle XP'P - \angle XPP' = \angle ZP'P - \angle YPP'$ bekannt ist. Nun hat man aber auch $\angle XP'P + \angle XPP' = 2R - \alpha$, folglich läßt sich jeder dieser $\angle$, deren Schenkel die geforderten Linien feststellen, nach 101 bestimmen.

Zusatz. Auf der anderen Seite von PP' läßt sich ein zweites Paar solcher Linien zeichnen.

1305. Aufgabe. Gegeben L, L', L''; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die $\perp$ Abstände desselben von L, L' und L'' wie $m : n : p$ verhalten.

Analysis. Die zweimalige Anwendung des Orts 546 für die Verhältnisse $m : n$, $n : p$, und die rechten $\measuredangle$ bestimmen den gesuchten Punkt.

Zusatz. Es ergeben sich stets vier Punkte. Wenn $m : n : p = 1 : 1 : 1$ ist, bilden diese die Mittelpunkte der $\odot\odot$ im und am $\triangle$.

Anmerkung. Beim Rückwärtseinschneiden mit dem Meßtisch erfordert die Bestimmung des Standpunkts mittelst des sogenannten fehlerzeigenden $\triangle$ die praktische Lösung dieser Aufgabe.

1306. Aufgabe. Gegeben L, L', L''; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die aus demselben in vorgeschriebenen $\rightarrow\!\!\rightarrow$ nach L, L', L'' gezogenen 3 Linien wie $m : n : p$ verhalten.

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1305.

Anmerkung. 1305 ist ein einzelner Fall von 1306.

1307. Fig. 205. **Aufgabe.** Gegeben K und eine festliegende Sehne AB; man soll X in K so bestimmen, daß sich die Entfernungen dieses

Punkts von A und B = m : n verhalten, oder Δ aus a, α, (b : c).

Analysis 1. Ergiebt sich mittelst 593.

Analysis 2. Halbirt man ∠ AXB, so bestimmt sich, da AC : CB = AX : BX = m : n sein muß, Punkt C; die Verlängerung von XC trifft aber die Mitte D des Bogens ADB, es läßt sich also die Lage von DC, und hiedurch auch X zeichnen.

1308. Aufgabe. Es sind 3 Punkte P, P′, P″ gegeben; man soll einen 4ten X so bestimmen, daß sich die Entfernungen desselben von den übrigen wie m : n : p verhalten.

Analysis. Ergiebt sich durch zweimalige Anwendung des Orts 593.

1309. Aufgabe. Gegeben P, L, K; man soll durch P eine Linie so legen, daß die von P, L und K gebildeten Stücke sich wie m : n verhalten.

Analysis. Bei derselben sind in gleicher Art wie in 517 mehrere Fälle zu unterscheiden. Die Auflösung derselben ergiebt sich mittelst derselben Oerter wie in 517.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist die Verallgemeinerung von 517.

1310. Aufgabe. Gegeben P, K und eine festliegende Sehne in K; man soll aus P eine Sekante nach K ziehen, deren von der Sehne gebildeten beiden Abschnitte sich wie m : n verhalten.

Analysis. Die Aufgabe bildet einen Fall der vorhergehenden mit einer andern Einkleidung.

1311. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll durch P eine Linie so legen, daß die von P, K und K′ gebildeten Stücke sich wie m : n verhalten.

Analysis. Bei derselben sind gerade so viel Fälle wie in 530 zu unterscheiden, deren Auflösung sich mittelst der ebenfalls dort angeführten Oerter ergiebt.

Anmerkung 1). Zu dieser Aufgabe gehört auch als einzelner Fall die Verallgemeinerung von 338, daß sich nämlich die beiden Sehnen wie m : n verhalten sollen.

Anmerkung 2). Die Aufgabe ist die Verallgemeinerung von 330.

1312. Fig. 206. und 206. a. **Aufgabe.** Es sind 3 Linien L, L′, L″ gegeben; man soll ein □ beschreiben, welches mit zwei ∠spitzen in L und L′, mit der dritten und vierten in L″ fällt.

Analysis. Die Lage des geforderten □ im △ ist g. Betr. §. 6. erörtert. Es läßt sich aber stets noch ein zweites □ X′Y′Z′V′ bestimmen, welches mit seinen ∠spitzen in die Verlängerungen von b und c fällt. Die Lage dieses □ ergiebt sich gleichfalls durch die Höhe AD; denn zieht man AE′ ∦ X′Y′ ꝛc., so ergiebt sich AE′ : X′Y′ = AD : X′V′, da beide Verhältnisse = CA : CX′ sind, also AE′ = AD, wodurch sich Punkt E′, hierauf mittelst C auch Y′, und schließlich das gesuchte □ bestimmen läßt.

Konstruktion. Fälle aus A auf a den ⊥ AD, bestimme AE′ = AE = AD und ∦ a. Zieht man nun CY′ durch E′, ferner Y′X′ ∦ a, und fällt die ⊥⊥ Y′Z′ und X′V′, so erhält man das eine □; das andere ergiebt sich aber, wenn man E mit C verbindet, YX ∦ a legt, und die ⊥⊥ XV und YZ fällt.

Beweis. AE′ : X′Y′ = CA : CX′ = AD : X′V′,
und AE : XY = CA : CX = AD : XV.
Da nun AE′ = AD, und AE = AD ist,
muß auch X′Y′ = X′V′, und XY = XV sein.

1313. Fig. 206. **Aufgabe.** In ein festliegend gegebenes △ ein ▭ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∦ a fällt, und zwei Nebenseiten das Verhältniß m : n erhalten.

Analysis. Verfährt man wie in 1312, so ergiebt sich der ⊥ AD : AE (∓ a) = m : n, weshalb sich die Punkte E und Y, also auch das gesuchte □ bestimmen lassen.

Anmerkung. Diese und die folgenden Aufgaben können sämmtlich wie 1312 allgemeiner aufgestellt werden, wodurch sich 2 verschiedene Resultate ergeben können.

1314. Fig. 206. Aufgabe. In ein festliegend gegebenes △ einen ▽ mit einem gegebenen ∠ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ a fällt.

Analysis. Zieht man aus A nach a eine Linie AD unter dem gegebenen ∠, so paßt die Analysis 1312 vollständig für diese Aufgabe, und zwar in beiden Fällen.

1315. Aufgabe. In ein festliegend gegebenes △ einen ▽ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ a fällt, und das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe = m : n wird.

Analysis. Das Verhältniß der Grundlinie, oder überhaupt einer Seite zur Höhe bestimmt nach 410 einen ∠ des ▽; man hat also 1314 zu konstruiren.

1316. Fig. 206. Aufgabe. In ein festliegend gegebenes △ ein ▱ mit einem gegebenen ∠ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ a fällt, und zwei Nebenseiten das Verhältniß m : n erhalten.

Analysis. Zieht man aus A nach a eine Linie AD unter dem gegebenen ∠, so paßt die Analysis 1313 mit Hilfe von 1312 auch für diese Aufgabe.

1317. Fig. 207. Aufgabe. In ein festliegend gegebenes △ ein □ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ a fällt, und sich die Summe zweier Nebenseiten = s bestimmt.

Analysis. Verlängert man XV um XY bis V', so ergiebt sich V'V = s, also die Lage NO ∓ s. Die Figur XV'Z'Y bildet aber ein ⊡, folglich hat man 1312 zwischen den Linien AC, AB, NO zu konstruiren, u. s. w.

1318. Fig. 207. **Aufgabe.** In ein festliegend gegebenes △ ein ▭ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ s fällt, und sich die Differenz zweier Nebenseiten = d bestimmt.

Analysis. Verlängert man XV so bis V'', daß XV'' = XY wird, so ergiebt sich VV'' = d, also die Lage N'O' ∓ s. Die Figur XV''Z''Y bildet aber ein ⊡, folglich hat man 1312 zu konstruiren u. s. w.

1319. **Aufgabe.** In ein festliegend gegebenes △ ein ▱ mit einem bestimmten ∠ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ s fällt, und sich die Summe zweier Nebenseiten = s ergiebt.

Analysis. Verfährt man ganz wie in 1317, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1314.

1320. **Aufgabe.** In ein festliegend gegebenes △ ein ▭ mit einem bestimmten ∠ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ s fällt, und sich die Differenz zweier Nebenseiten = d ergiebt.

Analysis. Verfährt man ganz wie in 1318, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1314.

1320. a. Fig. 207. **Aufgabe.** In ein festliegend gegebenes △ ein ▭, dessen Fläche = f^2 ist, so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ s fällt.

Analysis. ⊥ AU : AU − WU = s : XY. Aber

f : XY	=	WU : f	gegeben,
h f : h − XV	=	s . XV : f.	Bestimmt
s : f	=	f : g,	so erhält
h : h − XV	=	XV : g.	

also ist d. Zus. s. man nun vorher g in man durch Zus. s. dieser Proportion läßt sich XV nach 457 bestimmen, u. s. w.

1321. Aufgabe. In ein festliegend gegebenes △ ein ▱, dessen Fläche = f^a ist, mit einem bestimmten ∠ so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∦ a fällt.

Analysis. Verfährt man wie in der vorhergehenden Aufgabe, so bestimmt sich die Höhe des ▱, die Höhe und der ∠ bestimmen aber dessen Seite, weshalb nur schließlich 94 zur Feststellung des ▱ anzuwenden ist.

1322. Fig. 208. **Aufgabe.** In ein ▱ einen ◇ einzuschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des ▱ ∦ fallen. (Stehen die Diagonalen ⊥ zu ein einander, so ergibt sich ein ⊡.)

Analysis. $XY : e' = AX : a$,

$XV : e = BX : a$, also ist

$e : e' = AX : BX$, und hiedurch Punkt X gegeben, von dem aus der ◇ zu konstruiren ist.

1323. Fig. 209. **Aufgabe.** In ein ⊡ ein ▭ so einzuschreiben, daß zwei Nebenseiten desselben das Verhältniß n : m erhalten.

Auflösung. Theile eine Seite AB in V nach dem Verhältniß m : n, bestimme BV = BX, CX = CY, DY = DZ, verbinde die Punkte V, X, Y und Z, so ist das verlangte ▭ konstruirt.

Beweis. △ DZY ≅ △ BVX, △ AZV ≅ △ CXY, also ist ZX ein ▱. Als △△, die =schenklig sind, müssen die 4 △△ ∼ sein, folglich hat man ZY : YX = n : m. Das ▱ ist aber auch ein ▭, da die an den Quadratseiten bei V, X, Y, Z liegenden beiden ∠ jeder $\frac{1}{2}$R betragen.

1324. Fig. 210. **Aufgabe.** In einem festliegend gegebenen △ ABC soll eine ∦ XY zu a so gezogen werden, daß sich BY + CX = a ergiebt.

Analysis. Es ist, wenn diese Abschnitte durch x und y bezeichnet werden, $x:y = b:c$, und $x+y = a$ bedingt, folglich lassen sich nach 390 x und y bestimmen.

Auflösung. Halbirt man α, so ergeben sich CE und BE in a als die gesuchten beiden Abschnitte.

1325. Fig. 210. Aufgabe. Zwischen den Verlängerungen der Seiten b und c eines festliegend gegebenen $\triangle$ ABC soll eine $\fallingdotseq X'Y'$ zu a so gezogen werden, daß sich $BY' + CX' = a$ ergiebt.

Analysis ꝛc. Wie in 1324.

1326. Fig. 210. Aufgabe. Zwischen den Verlängerungen der Seiten b und c eines festliegend gegebenen $\triangle$ ABC soll eine $\fallingdotseq X'Y'$ so zu a gezogen werden, daß sich $CX' - BY' = a$ ergiebt.

Analysis. Da $CX' : BY' = b : c$, und
$CX' - BY' = a$ bedingt ist, läßt sich jeder dieser beiden Abschnitte nach 452 bestimmen.

Auflösung. Halbirt man den Nebenwinkel von α, so ergeben sich CE' und BE' als die gesuchten beiden Abschnitte, welche $= CX'$ und BY' zu verzeichnen sind.

Beweis. Zieht man $BD \fallingdotseq AE'$, so bestimmt sich ein $\triangle$ ABD, also $AB = AD$. Da nun $CE' : BE' = CA : AD$ ist, muß deshalb auch $CE' : BE'$ oder $CX' : BY' = CA : AB$, also $X'Y' \fallingdotseq a$ sein, während auch wirklich $CX' - BY' = CE' - BE' = a$ ist.

Anmerkung. Die Aufgabe bildet eine Analogie zu 1325.

1327. Fig. 210. Aufgabe. In einem festliegend gegebenen $\triangle$ ABC soll eine $\fallingdotseq XY$ so zu a gezogen werden, daß sich $BY^2 + CX^2 = a^2$ bestimmt.

Analyſis. Da $BY : CX = c : b$, und
$BY^2 + CX^2 = a^2$ bedingt iſt,
laſſen ſich BX und CY nach 464 beſtimmen.

1328. Fig. 210. Aufgabe. Zwiſchen den Verlängerungen der Seiten b und c eines feſtliegend-gegebenen $\triangle ABC$ ſoll eine $\neq X'Y'$ ſo zu a gezogen werden, daß ſich $CX'^2 - BY'^2 = a^2$ beſtimmt.

Analyſis. Da $CX' : BY' = b : c$, und
$CX'^2 - BY'^2 = a^2$ bedingt iſt,
laſſen ſich BX und CY nach 466 beſtimmen.

1329. Fig. 211. Aufgabe. In einem feſtliegend gegebenen $\triangle ABC$ ſoll eine $\neq XY$ ſo zu a gezogen werden, daß ſich $XY^2 = BX^2 + CY^2$ beſtimmt.

Analyſis. Verlängert man BY bis zu einer durch A zu XY gezogenen $\neq AD$, und legt $DE \neq YC$, ſo erhält man

$BX : XY = AB : AD$
$XY : YC = AD : DE$ nach 545, folglich

$BX : XY : YC = AB : AD : DE$, und
$BX^2 : XY^2 : YC^2 = AB^2 : AD^2 : DE^2$. Da nun
$XY^2 = BX^2 + YC^2$ ſein ſoll, muß auch
$AD^2 = AB^2 + DE^2 = c^2 + b^2$ ſein.
Hiemit iſt aber D, alſo auch DB mit Y beſtimmt, durch welchen Punkt man $XY \neq a$ zu legen hat.

1330. Fig. 211. Aufgabe. In einem feſtliegend gegebenen $\triangle ABC$ ſoll eine $\neq XY$ ſo zu a gezogen werden, daß ſich $XY \times a = BX \times YC$ ergiebt.

Analyſis. Verlängert man BY bis zu einer durch A zu XY gezogenen $\neq AD$, und legt $DE \neq YC$, ſo erhält man

$BX : XY = BA : AD$, und
$CY : CB = DE : EB$, folglich d. Zuf. f.

$BX \times CY : XY \times CB = BA \times DE : AD \times EB$, oder
$BX \times CY : XY \times a = c \cdot b : x(x+a)$. Da nun
$BX \times CY = XY \times a$ bedingt iſt, muß auch
$c \cdot b = x(x+a)$ ſein, weshalb x oder AD nach 459 beſtimmt werden kann, u. ſ. w.

1331. Fig. 212. Aufgabe. Im verlängerten Durchmeſſer AB iſt $CD \perp AC$; man ſoll von A eine Linie AXY ſo nach CD ziehen, daß ſich $XY = d$ beſtimmt.

Analyſis. Zieht man BX, ſo erhält man, da $\angle X = R$, $\triangle ABX \sim \triangle ACY$; alſo iſt
$AC : AX = AX + d : AB$, durch welche Proportion ſich AX nach 459 konſtruiren läßt.

1332. Fig. 213. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und P'' außerhalb L und L'; man ſoll durch P'' eine Linie $P''XY$ ſo legen, daß ſich $PX : P'Y = m : n$ beſtimmt.

Analyſis. $PX : P'Y = PG : P'G$, alſo iſt
$PG : P'G = m : n$; aber
$P'G - PG = PP'$ gegeben,
folglich läßt ſich PG nach 452 beſtimmen, u. ſ. w.

1333. Fig. 213. Aufgabe. Gegeben $L \neq L'$, P in L, P' in L', und ein Punkt G in gerader Linie mit P und P'; man ſoll durch G eine Linie GXY ſo legen, daß ſich $PX \times P'Y = f^2$ beſtimmt.

Analyſis 1). Da $P'Y : PX = P'G : PG$ iſt, und
$P'Y \times PX = f^2$ werden ſoll, ergeben ſich $P'Y$ und PX nach 462.

Analyſis 2). Oder man beſtimme g ſo, daß $P'G : PG = f : g$, ſo iſt

$P'Y : PX = f : g$. Dies mit

$P'Y : f = f : PX$ verglichen, giebt

$f : PX = PX : g$, durch welche Proportion PX gezeichnet werden kann, und sich dann die Lage der gesuchten Linie ergeben muß.

Analysis 3). Denkt man sich, $\neq L$ und L', $f = DE$ zwischen GY und GP' geschoben, so ergiebt sich, da $P'Y : DE = P'G : GD$, und $DE : PX = DG : PG$ ist, $P'Y : DE = DE : PX$ aber bestimmt wurde, daß $P'G : GD = GD : PG$ sein muß, durch welche Proportion sich GD, also auch Punkt E, und mittelst desselben endlich die Lage von XY bestimmen läßt.

Anmerkung 1). Aus der Analysis der vorstehenden Aufgabe folgt der Satz: wenn man die mittlere Proportionale zwischen dem Abschnitt GP einer Linie und der Linie GP' selbst von dem gemeinschaftlichen Endpunkt G des Abschnitts und der Linie auf der letzteren $= GD$ absetzt, und durch die Punkte P, D, P' $\neq$ Linien legt, so schneidet jede durch jenen Endpunkt G gezogene Linie die 3 $\neq\neq$ in der Art, daß die mittlere DE mittlere Proportionale wird zwischen den beiden äußeren PX und $P'Y$.

Anmerkung 2). Allgemein, für jede Lage des dritten Punkts, ist die vorstehende Aufgabe in 2202 behandelt.

1334. Fig. 214. Aufgabe. Gegeben K und K', welche sich in P durchschneiden; man soll eine Linie XY so durch diesen Punkt legen, daß sich $PX \times PY = f^2$ bestimmt.

Analysis 1.) Zieht man den Durchmesser PMG, und fällt auf die Verlängerung desselben den $\perp YD$, so ergiebt sich $\triangle PDY \sim \triangle PXG$, also

$PG : PY = PX : PD$. Aber
$f : PY = PX : f$ gegeben,

folglich ist $PG : f = f : PD$, durch welche Proportion PD, also auch der $\perp$ DY, und schließlich die Lage der geforderten Linie bestimmt werden kann.

Analysis 2.) Da sich X in einer Kreislinie befindet, und $XP \times PY$ gegeben ist, läßt sich ein Ort für Y nach 592 konstruiren, also Y selbst bestimmen.

Zusatz. Es ergeben sich zwei Resultate.

1334. a. Fig. 43. Aufgabe. Es soll aus dem Schneidungspunkt P zweier Kreislinien K und K′ eine in K′ endigende Linie PY′ so gezogen werden, daß sich das $\square$ aus den beiden Abschnitten PX′ und X′Y′, welche von K gebildet werden, $= f^2$ ergiebt.

Analysis. Da sich P in K′ befindet, und $PX' \times X'Y' = f^2$ gegeben ist, erhält man nach 592. a. einen Ort für X′, weshalb dieser Punkt, und mittelst desselben die geforderte Lage von PY′ festgestellt werden kann.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

1335. Fig. 215. Aufgabe. Es sollen zwei $\sim$ $\triangle\triangle$ konstruirt werden, welche den Radius MA einer Kreislinie K zur Summe der Grundlinien erhalten, und mit den Spitzen in K fallen.

Analysis. $\angle Y = \frac{1}{2}$ AMZ, also auch $\angle Z = \frac{1}{2}$ XMZ; man hat folglich ein $\triangle$ zu konstruiren, dessen $\angle$ an der Spitze halb so groß ist als jeder $\angle$ an der Grundlinie, und es muß deshalb, zur Bestimmung von MX, MA nach dem goldenen Schnitt getheilt werden.

1336. Fig. 216. Aufgabe. In einem $\triangle$ ABC eine Linie aus A nach a zu ziehen, welche mittlere Proportionale zwischen den beiden in a gebildeten Abschnitten wird, d. h. es soll BX : AX = AX : CX sein.

Analysis. Beschreibt man um △ ABC einen ⊙, und verlängert AX bis Y, so ergibt sich

BX : AX = XY : CX. Es soll aber sein

BX : AX = AX : CX, folglich ist

XY = AX; man hat also zur Feststellung von AY nur 514 anzuwenden.

Auflösung. Verlängere die Höhe AD um sich selbst bis E, ziehe durch E eine ∓ zu a, beschreibe um das △ eine Kreislinie, und verbinde A mit Y, so bildet AX die verlangte Linie.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1336. a. Fig. 218. Aufgabe. Es ist ein festliegender ∠, und eine um den Scheitel desselben beschriebene Kreislinie K gegeben; man soll zwischen den Schenkeln dieses ∠ eine Tangente XY an K legen, welche von dem Berührungspunkt Z in zwei sich wie m : n verhaltende Abschnitte XZ und ZY zerlegt wird.

Analysis. Zieht man MZ, und hierauf DF ∓ XY, so bestimmt sich ∠ DOM = R, also ein Ort für O nach 75, und DO : OF = m : n nach 537, weshalb die ∓ MY gezogene Linie OG auch DG : GM = m : n bestimmt, und sich folglich durch Feststellung des Punktes G ein zweiter Ort für O konstruiren läßt, u. s. w.

Auflösung. Theile DM in G = m : n, ziehe GO ∓ MY, beschreibe über DM einen Halbkreis, ziehe MZ durch O, und lege durch Z eine ⊥ MZ stehende Linie XY, so ist die verlangte Tangente konstruirt.

1337. Fig. 217. In welchen Verhältnissen schneiden sich die 3 Transversalen jedes △, von denen die eine, CD, c halbirt, und die andern beiden, BE und BN, b in drei gleiche Theile theilen?

Es ergiebt sich 1) EO : OB = 1 : 3:
denn zieht man DG ∥ b, so erhält man EO = OG, da sowohl DG als EC = $\frac{1}{2}$ EA ist. Man hat aber GB = GE = 2EO, folglich muß EO : OB = 1 : 3 sein.

2) CO : OD ist = 1 : 1, also CO = OD:
denn zieht man EI ∥ c, so ergiebt sich IO = $\frac{1}{3}$ OD, da EI = $\frac{1}{3}$ AD, also auch = $\frac{1}{3}$ DB ist. Man hat aber ID = 2IC; setzt man also IO = 1, so ist OD = 3, und IC = 2, folglich CO = OD.

3) BQ : QN ist = 3 : 2:
denn setzt man DS = 1, so ist AN = 2, NC = 4, also SQ : QN = 1 : 4, da aber SB = SN sein muß, erhält man deshalb BQ = 6 und QN = 4, folglich BQ : QN = 3 : 2.

4) CQ : QD ist = 4 : 1:
denn zieht man NH ∥ c, und setzt NH = 2, so ist AD und DB = 3, also muß auch, wenn HQ = 2, QD = 3 sein; aber CH = 2HD, folglich ist HC = 10, und deshalb CQ = 12, demnach schließlich CQ : QD = 12 : 3 = 4 : 1.

5) CO : OQ : QD = 5 : 3 : 2:
denn setzt man DQ = 2, so ist CQ nach 4) = 8, also CD = 10, und deshalb CO nach 2) = 5, folglich OQ = 3, also wirklich CO = 5, OQ = 3, QD = 2.

1338. Fig. 217. Im △ ABC theilt BE die Seite b nach dem Verhältniß 1 : 4 = CE : EA, und CD die Seite c nach dem Verhältniß 9 : 16 = BD : DA; wie verhält sich CO : OD?

Es ergiebt sich CO : OD = 25 : 36:
denn zieht man EI ∥ c, und setzt EI = 16, so ist AD = 16. 5, und DB = 9. 5; OD = 9. 5, und ID = 61, wenn IQ = 16 angenommen wird. Da aber ID : IC = 4 : 1 sein muß, erhält man deshalb IC = $\frac{61}{4}$, und CO = $\frac{125}{4}$, folglich CO : OD = $\frac{125}{4}$: 45 = 25 : 36.

Anmerkung. Die erhaltenen und gegebenen Verhältnißzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36 bilden die 6 ersten Quadratzahlen. Die gesuchten Abschnitte der Transversalen CD bilden nicht bloß in diesem Falle gegeneinander Quadrat-Zahlen, sondern auch in folgenden Fällen.

Ist CE : EA = 1 : 4,
AD : DB = 9 : 16,
} so erhält man CO : OD = 25 : 64.

Ist CE : EA = 4 : 1,
AD : DB = 9 : 16,
} so erhält man CO : OD = 25 : 4.

Ist CE : EA = 4 : 1,
AD : DB = 16 : 9,
} so erhält man CO : OD = 100 : 9.

1339. Fig. 219. Wie verhalten sich die 3 Abschnitte der Diagonale eines $\square$, welche sich ergeben, wenn man A und C mit den Mitten F und G der Seiten BC und AD verbindet?

Die Abschnitte werden gleich, also wie 1 : 1 : 1: denn FG ist ein $\square$, folglich muß DI : IH = DG : GA, und IH : HB = CF : FB, also DI = IH = HB sein.

Anmerkung. Fig. 219. a. Wiederholt man dieselbe Konstruktion von B und D aus, so wird hiedurch das $\square$ in 9 Stücke zerschnitten, aus denen sich 5 $\cong$ $\square$'s zusammensetzen lassen.

1340. Fig. 220. Wie verhalten sich die 3 Abschnitte der Diagonale eines $\square$, welche entstehen, wenn man B mit den Mitten F und G der Seiten DC und AD verbindet?

Die Abschnitte werden gleich, also wie 1 : 1 : 1: denn BC = 2 GA, also ist auch HB = 2 GH, und GF = 3, wenn man IH = 2 setzt, da AC ∥ GF ist. Aus dem Vorigen folgt aber AC = 6, folglich muß, da HC = 2 AH ist, AH = 2, und IC = 2 sein; man hat also AH = HI = IC.

Anmerkung. Zieht man von D aus Linien durch I und H, so ergeben sich zugleich die Linien von 1339.

1341. Fig. 221. Wie verhält sich in dem regulären 6eck ABCDEF, AH : HM : MI ; ID, AH : HI : ID, AG : GE, FG : GH : HB, FK : KM : MC.

1) Es ist AH : HM : MI : ID = 1 : 1 : 1 : 1 :
denn HM = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{1}{2}$AM = AH; eben so MI = $\frac{1}{2}$FE = $\frac{1}{2}$MD = ID = $\frac{1}{2}$MA = AH, folglich muß AH = HM = MI = ID sein.

2) Es ist AH : HI : ID = 1 : 2 : 1.
Folgt aus 1).

3) Es ist AG : GE = 1 : 2 = FG : GB :
denn nach 1) ist AH : IH = 1 : 2.

4) Es ist FG : GH : HB = 2 : 1 : 3 :
denn GH = $\frac{1}{2}$EI = $\frac{1}{2}$HF, nach 3), und HF ist = HB.

1342. Fig. 221. a. Wie verhält sich in dem regulären 6eck ABCDEFG, AO : OI, GO : OB, GQ : QB, AQ : QE, GO : OQ : QB, wenn AI und AE die Seiten GF und FD halbiren?

1) Es ist IO = OA, und GO : OB = 1 : 3 :
denn verlängert man AB und GF, so ergiebt sich AB = AH, und GI = $\frac{1}{2}$HG; die Linien AI und BG liegen also im △ HBI ganz wie in Fall 1) und 2) von 1337, woselbst die Verhältnisse ihrer Abschnitte sich in der angeführten Art ergaben.

2) Es ist GQ : QB = 3 : 4 :
denn zieht man GM ∦ FD, so ergiebt sich NM = $\frac{1}{2}$ED = $\frac{1}{4}$FD = $\frac{1}{4}$GM, also GN = $\frac{1}{4}$GM oder = $\frac{1}{4}$AB, weshalb GQ : QB = 3 : 4 ist.

3) Es ist AQ : QE = 2 : 5 :
denn setzt man NQ = 3, so ist AQ = 4, und NE = 7, also QE = 10, folglich AQ : QE = 2 : 5.

4) Es ist GO : OQ : QB = 7 : 5 : 16 :
denn nach 1) ist GO : OB = 1 : 3, und nach 2) GQ : QB = 3 : 4; setzt man also GO = 1, so hat man GB = 4,

und deshalb 4 nach dem Verhältniß 3 : 4 zu theilen, um GQ und QB zu erhalten, wodurch sich $GQ = \frac{12}{7}$, und $QB = \frac{16}{7}$, also $GQ - GO = OQ = \frac{5}{7}$, demnach wirklich $GO : OQ : QB = 1 : \frac{5}{7} : \frac{16}{7} = 7 : 5 : 16$ ergiebt.

1343. Fig. 221. b **Wie verhält sich in dem regulären 6eck ABCDEF, BN : IN, und AN : NS, wenn BI die Seite FE halbirt, und AS die Seite ED nach dem Verhältniß 1 : 2 = ES : SD theilt?**

1) **Es ist AN = NS:**

denn zieht man eine ∦ FN zu ED, (welche in der Figur durch N gezogen ist, da sich später zeigt, daß dieser Punkt von derselben getroffen wird) so ergiebt sich BN = NH, und IN = IH, also $IN = \frac{1}{3}IB$, weshalb, wenn man 2AB oder GB = 2 setzt, FN oder $HE = \frac{2}{3}$, folglich $HS = 1 = AB$, also AN = NS sein muß.

2) **Es ist IN : NB = 1 : 2:**

denn nach 1) ist NA = NS, also trifft eine durch F zu ED gezogene ∦ den Durchschnittspunkt N der in Rede stehenden Linien AS und BI. Hieraus folgt aber HI = IN, weshalb, da HN = NB ist, IN : NB = 1 : 2 sein muß.

Anmerkung. Man kann leicht eine große Menge ähnlicher Aufgaben z. B. in Rücksicht auf solche Linien, welche 2 Seiten unter bestimmten Verhältnissen schneiden u. s. w., nicht bloß für das reguläre Sechseck, sondern auch für andere reguläre Figuren bilden. Beim regulären Fünfeck führt eine 1341 ähnliche Untersuchung namentlich zu guten Resultaten.

1344. Fig. 222. **Aufgabe. Gegeben P, P′, P″, P‴; man soll einen Punkt X in P″P‴ so bestimmen, daß sich △ PP‴X = △ P′P″X, oder wie m : n ergiebt.**

Analysis. Es ist, wenn man die aus P und P′ auf P″ P‴ gefällten Höhen h und h′ nennt, entweder $\frac{P'''X \cdot h}{2}$ $= \frac{P''X \cdot h'}{2}$, oder $\frac{P'''X \cdot h}{2} : \frac{P''X \cdot h'}{2} = m : n$, folglich muß

$P'''X : P''X = h' : h$, oder

$P'''X : P''X = mh' : nh$ sein.

Theilt man also P″P‴ nach dem Verhältniß h′ : h, oder nach dem Verhältniß mh′ : nh, so bestimmt sich X.

1345. Fig. 223. Aufgabe. Gegeben $L \fallingdotseq L'$, und P; man soll X in L, und X′ in L′ so bestimmen, daß $PX = PX'$, und $XX' = a$ wird.

Analysis. a zwischen zwei $\fallingdotseq$ bestimmt die $\rightarrow XX'$, also auch die Lage eines von P auf XX′ gefällten $\perp$, welcher in die Mitte von XX′ treffen muß, da $PX = PX'$ werden soll. Hiedurch ergiebt sich aber Z, und deshalb auch die Lage von XX′.

Auflösung. Zeichne $AB = a$, errichte in der Mitte C einen $\perp$ CD, ziehe durch C eine $\fallingdotseq$ zu L und L′, durch P eine $\fallingdotseq$ zu CD, durch Z eine $\fallingdotseq$ zu AB, so ergiebt sich XX′ als die geforderte Linie.

Zusatz. Es ergeben sich 2 Lagen von XX′.

1346. Fig. 224. Aufgabe. Gegeben L, L′ und P; man soll X in L, und X′ in L′ so bestimmen, daß $PX = PX'$, und der von L mit XX′ gebildete $\angle = \alpha$ wird.

Analysis. Fällt man aus P auf XX′ den $\perp$ PZ, so ergiebt sich $XZ = X'Z$, und wegen der gegebenen $\rightarrow$ von XX′ nach 538 ein Ort für Z. Nun ist aber mittelst der $\rightarrow$ XX′ die $\rightarrow$ aller auf XX′ stehenden $\perp\perp$, folglich auch die Lage von PZ gegeben, es läßt sich also Z selbst bestimmen, u. s. w.

Auflösung. Ziehe AB mit der Neigung α zu L, verbinde die Mitte C mit N, errichte in C auf AB den $\perp$ CD, lege durch P eine $\fallingdotseq$ zu DC, durch Z eine $\fallingdotseq$ zu AB, so bildet diese die geforderte Linie.

1347. Fig. 225. Aufgabe. Gegeben L, K und die begrenzte Linie MB $\fallingdotseq$ L; man soll zwischen beiden $\fallingdotseq$ eine Tangente XY so legen, daß sich BY $=$ XY bestimmt.

Analysis. Fällt man den $\perp$ MG, und zieht GF $\fallingdotseq$ XY, so ist $\triangle$ MGF $\sim$ $\triangle$ MCY, also

GF : MY $=$ GM : r, oder

BY : MY $=$ GM : r, u. d. A. d. B. Gl.

BM : MY $=$ GM $+$ r : r, weshalb Y, und folglich auch die Tangente YX bestimmt werden kann.

Anmerkung. Die Aufgabe ist nur eine andere Einkleidung für: $\triangle$ aus h, h', (a $+$ b), nämlich h $=$ MG, h' $=$ r, MB $=$ (a $+$ b).

1348. Fig. 226. Aufgabe. Die festliegende Linie AB ist in C halbirt, in A, C, B sind $\perp\perp$ errichtet, und zwar ist CD $=$ b; ($>$ AB) man soll durch D eine Linie XY legen, welche AB als mittlere Proportionale zwischen AX und BY bestimmt.

Analysis. Nach 172. a ist

2b $=$ AX $+$ BY; da nun

AX : AB $=$ AB : BY sein soll, sind nach 457 AX und BY bestimmbar.

Auflösung. Setze BF $=$ 2b ab, und beschreibe über BF einen Halbkreis, so bestimmt der Durchschnitt mit dem $\perp$ in A den einen Punkt X.

Beweis. XG $\fallingdotseq$ AB gezogen, ergiebt sich AX $+$ BY $=$ 2b $=$ BF $=$ BG $+$ BY, also BY $=$ GF. Nun ist aber BG : GX $=$ GX : GF, folglich auch

AX : AB $=$ AB : BY.

1349. Fig. 227. **Aufgabe.** Gegeben K und P außerhalb K; man soll von P nach K eine Sekante PXY so ziehen, daß sich das Rechteck aus der Sehne XY und der Sekante $PY = f^2$ bestimmt.

Analysis. Zieht man die Berührungslinie PG oder b, so ergiebt sich

$PY : b = b : PX$. Da nun
$f : PY = YX : f$ sein soll, erhält man d. Zus. f.

$f : b = b \times YX : f \times PX$, oder
$f^2 : b^2 = XY : PX$; es ist also das Verhältniß der Abschnitte PX und XY gegeben, und daher PY nach 523 zu konstruiren. Aus der letzten Proportion erhält man aber auch d. A. d. B. Gl.

$f^2 + b^2 : f^2 = PY : YX$, folglich d. Zus. f. mit
$f : XY = PY : f$

$f^2 + b^2 : 1 = PY^2 : 1$, wonach PY leicht bestimmt werden kann.

Auflösung. Errichte in G auf PG einen $\perp = f$, verbinde den Endpunkt F desselben mit P, und beschreibe um diesen Punkt mit der erhaltenen Hypotenuse PF einen $\odot$, so ergiebt sich die verlangte Sekante PY.

Zusatz. Es ergeben sich 2 Resultate.

1350. Fig. 227. **Aufgabe.** Gegeben K, und P außerhalb K; man soll von P nach K eine Sekante PXY ziehen, deren beide Abschnitte PX und XY ein $\square = f^2$ bilden.

Analysis. Zieht man die Berührungslinie PG oder b, so ergiebt sich

$PX : b = b : PX + XY$. Da nun
$f : PX = XY : f$ sein soll,

erhält man d. Z. $f : b = b.XY : f(PX + XY)$,
oder $f^2 : b^2 = XY : PX + XY$, also
d. G. d. V. G. $b^2 - f^2 : f^2 = PX : XY$,
oder $(b+f)(b-f) : f^2 = PX : XY$. Setzt
man hiemit $f : PX = XY : f$ zusammen,

so ergiebt sich $b+f : PX = PX : b-f$, durch welche Proportion sich PX, und damit auch die Lage der geforderten Sekante bestimmen läßt.

Auflösung. Beschreibe über der Berührungslinie PG einen Halbkreis, schneide von G aus f als Sehne ab, verbinde P mit dem Endpunkt H derselben, und beschreibe um P mit der erhaltenen Sehne eine Kreislinie, so ergiebt sich die verlangte Sekante PY.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn $f <$ ist als die Berührungslinie PG.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1351. Aufgabe. Gegeben P, P′ und L; man soll von allen den $\measuredangle$, deren Schenkel durch P und P′ laufen, mit ihren $\angle$spitzen aber in L fallen, die Lage des Scheitels X von demjenigen dieser $\measuredangle$ bestimmen, welcher gegen die übrigen vergleichen ein Maximum bildet.

Analysis. Soll $\angle PXP' > \angle PYP'$ u. s. w. sein, so müssen, wenn man durch PXP′ eine Kreislinie legt, alle Punkte von L außerhalb derselben fallen, da jeder innerhalb fallende Punkt einen größeren $\angle$ als PXP′ bestimmen würde. Wenn aber außer X alle Punkte von L außerhalb der P und P′ durchlaufenden Kreislinie fallen sollen, muß dieselbe L in X berühren.

Auflösung. Siehe 1201.

1352. Aufgabe. Gegeben P, P′ und K; man soll von allen den $\measuredangle$, deren Schenkel durch P und P′ laufen, mit ihren $\measuredangle$spitzen aber in K fallen, 1) die Lage des Scheitels X von demjenigen dieser $\measuredangle$ bestimmen, welcher gegen die übrigen verglichen ein Maximum bildet, und 2) die Lage des Scheitels X′ von demjenigen dieser $\measuredangle$, welcher gegen die übrigen verglichen sich als Minimum ergiebt.

Analysis zu 1). Verfährt man wie in 1351, so ergiebt sich, daß X der Berührungspunkt einer K von außen berührenden Kreislinie sein muß, welche P und P′ durchläuft.

Analysis zu 2). Soll $\angle PX'P'$ kleiner als jeder andere $\angle$ sein, dessen Scheitel in K fällt, und mit seinen Schenkeln P und P′ durchläuft, so müssen, wenn man durch P, X′, P′ eine Kreislinie zieht, alle Punkte von K innerhalb derselben fallen, da jeder außerhalb fallende Punkt einen kleineren $\angle$ als $PX'P'$ bestimmen würde. Wenn aber alle Punkte von K innerhalb der P und P′ durchlaufenden Kreislinie fallen sollen, muß dieselbe K in X′ v. J. berühren.

Auflösung. Siehe (für das Maximum und Minimum) 577.

1353. Fig. 228. **Lehrsatz.** Legt man durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines festliegenden $\angle$ eine gerade Linie, die in dem Punkte halbirt wird, so bildet die abgeschnittene Fläche ein Minimum im Vergleich zu allen denjenigen $\triangle\triangle$, welche mittelst einer P durchlaufenden Linie in diesem $\angle$ bestimmt werden können.

Beweis. Es soll $\triangle ABC < \triangle AXY < \triangle AX'Y'$ ꝛc. sein, da $PC = PB$ ist.

Zieht man $PG \fallingdotseq AC$, so ergiebt sich $GB = AG$, also $GX < AG$, und auch $XP < PY$, GX' aber $> GA$, folglich auch $X'P > PY'$.

Nun iſt $\triangle BXP : \triangle PCY = PX \times PB : PC \times PY$,
oder $\triangle BXP : \triangle PCY = PX : PY$,
und $\triangle BX'P : \triangle PCY' = PX' \times PB : PC \times PY'$,
oder $\triangle BX'P : \triangle PCY' = PX' : PY'$,
alſo muß $\triangle BXP < \triangle PCY$,
und $\triangle PCY' < \triangle BX'P$;
folglich auch $\triangle ABC < \triangle AXY$,
und $\triangle ABC < \triangle AX'Y'$ ſein.

III. Hauptstück.

Uebungen, welche nicht immer durch das erste Hauptstück vorbereitet sind.

A. Erster Abschnitt.

Aufgaben, welche ohne die Lehre von der Aehnlichkeit lösbar sind.

1stes Kapitel.

Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben.

1354. Fig. VI. Aufgabe. $\triangle$ aus a, ϱ, (b+c).

Analysis. Bedenkt man, daß jedes Paar von A oder B oder C an den $\odot$ mit ϱ führende Tangenten dieselbe Größe hat, so ergiebt sich $AF+AE = AB-BF+AC-EC = b+c-a$, also $AF = \frac{(b+c)-a}{2}$, und hieraus im $\triangle$ AOF durch Hilfe von ϱ $\angle \frac{\alpha}{2}$, womit sich die Aufgabe auf $\triangle$ aus a, α, (b+c), siehe 642, reduzirt.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich das Gesetz,

daß $AF = \frac{(b+c)-a}{2}$ ist, und das Datum, daß,

wenn von den 3 Stücken ϱ, α, $(b+c-a)$ zwei gegeben sind, das dritte bestimmt werden kann.

1355. Fig. VI. Aufgabe. $\triangle$ aus a, ϱ, $(b-c)$.

Analysis. $(b-c) = CE-BF = CD-BD$, da jedes von A oder B oder C an den Kreis mit ϱ führende Tangenten-Paar dieselbe Größe hat. Nun ist aber $CD+BD=a$ gegeben, folglich läßt sich mittelst 105 durch Hilfe von ϱ das verlangte $\triangle$ ABC verzeichnen.

Auflösung. Theile nach 105 a oder BC so in D, daß sich $CD-DB = (b-c)$ ergiebt, errichte $DO = \varrho \perp$ auf a, und ziehe aus B und C an den mit ϱ beschriebenen $\odot$ Tangenten, so ergiebt sich das verlangte $\triangle$ ABC.

Beweis. $AC-AB = CE-BF = CD-DB = (b-c)$, a und ϱ sind aber nach der Konstruktion im $\triangle$ ABC vorhanden.

Anmerkung. Aus der Analysis folgt das Gesetz, daß jeder Berührungspunkt des $\odot$ mit ϱ in einem $\triangle$ die zugehörige Seite in 2 Abschnitte theilt, welche den Unterschied der beiden anliegenden Seiten zur Differenz haben.

1355. a. Aufgabe. $\triangle$ aus h, ϱ, $(a+b+c)$.

Analysis. $(a+b+c)$ und ϱ bestimmen f^2 nach 342, h und f^2 aber a nach 185, und $(a+b+c)$ und a schließlich $(b+c)$; man erhält also $\triangle$ aus a, $(b+c)$, ϱ (1354) zu verzeichnen.

1356. Fig. VI. Aufgabe. $\triangle$ aus α, ϱ, $(b+c)$.

Analysis. Schiebt man nach 306 den $\odot$ mit ϱ in den $\angle \alpha$, so bestimmen sich die Tangenten AF und AE, also auch $BF + CE = BC = (b+c) - (FA+AE)$, weshalb man nur die Hilfsaufgabe 375 zur Feststellung von a anzuwenden hat.

1356. a. Aufgabe. $\triangle$ aus $(a+b)$, ϱ, α.

Analysis. Siehe 1634 Fall 2).

1356. b. Aufgabe. $\triangle$ aus $(a-b)$, ϱ, α.

Analysis. Siehe 1635 Fall 1).

1357. Aufgabe. $\triangle$ aus α, ϱ, $(a+b+c)$.

Analysis 1). Fig. VI. Schiebt man nach 306 den $\odot$ mit ϱ in den $\angle\ \alpha$, so bestimmen sich die Tangenten AF und AE, also auch $BC+BF+CE = 2BC = (a+b+c) - (AF+AE)$, weshalb man nur die Hilfsaufgabe 375 zur Feststellung von a anzuwenden hat.

Analysis 2). Fig. 16. $(a+b+c)$ und α bestimmen nach 339 den Ort um H, zu welchem CB eine Tangente ist. Der $\odot$ mit ϱ läßt sich aber nach 306 feststellen, folglich hat man zur Vollendung des $\triangle$ nur 318 zu benutzen.

Auflösung. Setze auf den Schenkeln des $\angle\ \alpha$ AF und $AG = \frac{a+b+c}{2}$ ab, errichte in G und F $\perp\perp$, beschreibe um den Schneidungspunkt H mit HG einen $\odot$, schiebe den $\odot$ mit ϱ nach 306 zwischen die Schenkel des $\angle\ \alpha$, und ziehe nach 318 zu den $\odot\odot$ um O und H die gemeinschaftliche Tangente KI, so bestimmt sich durch Verlängerung derselben das geforderte $\triangle$ ABC.

Beweis. Ergiebt sich durch 339, 306 und 318.

1358. Fig. VII. Aufgabe. $\triangle$ aus ϱ, $(c-a)$.

Analysis. Nach dem Gesetz 1355 ist $AE-EC = AE-\varrho = c-a$, also $AE = (c-a)+\varrho$, weshalb sich A, und mittelst 272 und des rechten $\angle$ bei C auch das verlangte $\triangle$ ABC feststellen läßt.

1359. Fig. VI. Aufgabe. $\triangle$ aus α, ϱ, $(a-c)$.

Analysis. Zeichnet man α um den Kreis mit ϱ nach 336, so ergiebt sich AE; nun ist aber $CE - AE$ nach dem Gesetz $1355 = (a-c)$, also muß $CE = (a-c)+AE$ sein; weshalb sich C, und mittelst 272 auch das verlangte $\triangle$ ABC feststellen läßt.

1360. Fig. 162. Aufgabe. $\triangle$ aus t, h, α.

Analysis. Verlängert man nach 123 t um sich selbst bis D, so ergiebt sich $\angle\ ABD = 2R - \alpha$, also nach 320 ein Ort für B. Den zweiten Ort bestimmt die mittelst t und h gegebene Lage von a als Kathete eines $\triangle$ u. s. w.

1361. Fig. X. Aufgabe. ▱ aus c, ∠ (cc'), ∠ (ab) = ∠ DBC.

Analysis. Ergiebt sich aus 1360.

1362. Fig. 231. Aufgabe. △ aus t, h, m.

Analysis 1). Ist im △ ABC, AD = h, AF = t, AE = m, so zeigt sich die Lage dieser drei Linien mittelst des rechten ∠ bei D bestimmt. Da nun FB = FC werden soll, bildet der in F auf BC errichtete ⊥ einen Ort für den Mittelpunkt des ums △, und halbirt rückwärts verlängert den Bogen CB; die Verlängerung von m oder AE trifft aber gleichfalls die Mitte dieses Bogens, folglich ist AG eine Sehne, und bestimmt nach 72 einen zweiten Ort für den gesuchten Mittelpunkt M u. s. w.

Analysis 2). Der in F errichtete ⊥ bildet einen Ort für M, der konstruirbare ∠ (hm) oder DAE ist aber = ∠ (rm) nach 332, folglich ergiebt sich durch Abtragung jenes ∠ auf der anderen Seite von AE ein zweiter Ort für M, und hiedurch das verlangte △ ABC.

1363. Aufgabe. △ aus t, h, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Durch h und $(\beta-\gamma)$ ergiebt sich m nach 145; man hat also 1362 zu konstruiren.

1364. Aufgabe. △ aus t, m, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Die Aufgabe reduzirt sich durch 145 auf 1362.

1365. Aufgabe. △ aus h, $(\beta-\gamma)$, $(p \mp q)$.

Analysis. Nach 139 läßt sich ein △ bestimmen, zu dessen Stücken $(p-q)$, $(\beta-\gamma)$ und h, als Seite, Gegen∠ und den Scheitel desselben treffende Höhe gehören; siehe 788.

1366. Aufgabe. △ aus $(b+c)$, $(\beta-\gamma)$, $(p \mp q)$.

Analysis. Nach 139 läßt sich ein △ bestimmen, zu dessen Stücken $(p-q)$, $(\beta-\gamma)$ und $(b+c)$, als Seite, Gegen∠, und Summe der beiden übrigen Seiten, siehe 642, gehören.

1367. Aufgabe. △ aus $(b-c)$, $(\beta-\gamma)$, $(p \mp q)$.

Analysis. Führt wie in 1366 zu 643.

Anmerkung. Ist β stumpf, so erhält man 142 zu konstruiren, da in diesem Fall $(p-q) = a$ ist.

1368. Fig. 86. und 86. a. Aufgabe. $\triangle$ aus r, h, $(p \mp q)$.

Analysis. Zieht man $AD \fallingdotseq CB$, so bestimmt sich nach 348 diese Linie $= (p-q)$. Legt man dieselbe also als Sehne in den $\odot$ mit r, und errichtet den $\perp AF = h$, so ergiebt sich mittelst der gefundenen Lage von a das verlangte $\triangle ABC$.

1369. Aufgabe. $\triangle$ aus h, m, $(p \mp q)$.

Analysis. Durch h und m ergiebt sich nach 145 $(\beta-\gamma)$, wodurch sich die Aufgabe auf 1365 reduzirt.

1370. Aufgabe. $\triangle$ aus m, $(\beta-\gamma)$, $(p \mp q)$.

Analysis. Führt wie in 1369 zu 1365.

1371. Aufgabe. $\triangle$ aus r, m, $(\beta-\gamma)$.

Analysis 1). r und $(\beta-\gamma)$ bestimmen nach 349 $(p \mp q)$; man hat also 1370 zu lösen.

Analysis 2). Durch m und $(\beta-\gamma)$ ergiebt sich nach 145 h; man hat also $\triangle$ aus r, h, $(\beta-\gamma)$ zu konstruiren; siehe 335.

1371. a. Aufgabe. $\triangle$ aus h, m, r.

Analysis. Nach 146 bestimmen h und m $(\beta-\gamma)$; man erhält also $\triangle$ aus r, h, $(\beta-\gamma)$, siehe 335, zu verzeichnen.

1372. Aufgabe. $\triangle$ aus m, $(p \mp q)$, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Durch $(p \mp q)$ und $(\beta-\gamma)$ ergiebt sich r nach 349; man hat also $\triangle$ aus r, m, $(\beta-\gamma)$, siehe 1371, zu konstruiren.

1373. Fig. 86. und 86. a. Aufgabe. $\triangle$ aus $(b+c)$, r, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Zieht man $AD \fallingdotseq a$, so ergiebt sich nach 348 $\angle DCA = (\beta-\gamma)$, weshalb DA gegeben ist. Nun muß aber $AB = DC$, und daher $AC+CD = (b+c)$ sein, folglich läßt sich $\triangle ACD$ nach 642 konstruiren.

1374. Fig. 86. und 86. a. **Aufgabe.** △ aus $(b-c)$, r, $(\beta-\gamma)$.

Analyſis. Führt ganz wie in 1373 zu 643.

1375. Aufgabe. △ aus $(p \mp q)$, r, $(b+c)$.

Analyſis. Führt in ähnlicher Art wie 1373 mittelſt 349 zu 642.

1376. Aufgabe. △ aus $(p \mp q)$, r, $(b-c)$.

Analyſis. Führt in ähnlicher Art wie 1373 mittelſt 349 zu 643.

1377. Aufgabe. △ aus t, $(\beta-\gamma)$, $(p \mp q)$.

Analyſis. $(\beta-\gamma)$ und $(p \mp q)$ beſtimmen r nach 349; man hat alſo △ aus t, r, $(\beta-\gamma)$ (350) zu konſtruiren.

1378. Aufgabe. △ aus t, r, $(p \mp q)$.

Analyſis. $(p \mp q)$ und t beſtimmen nach 351 h; man hat alſo 1368 zu konſtruiren.

1379. Fig. 86. und 86. a. **Aufgabe.** △ aus p, q, $(\beta-\gamma)$.

Analyſis. Beſtimmt man $BC = (p \pm q)$, ſo ergiebt ſich mittelſt der Lage h ein Ort für A. Einen zweiten Ort für denſelben Punkt erhält man aber nach 320, da $\angle CAE = (\beta-\gamma)$ iſt, wenn man $CE = (p \mp q)$ abſetzt.

1380. Fig. 23. und 23. b. **Aufgabe.** △ aus h', $(\beta-\gamma)$, $(b-c)$.

Analyſis. Schneidet man $AB = AD$ ab, ſo ergiebt ſich nach 141 $\angle DBC = \frac{\beta-\gamma}{2}$, und $DC = (b-c)$. Aus dieſen beiden Stücken und h' läßt ſich △ DBC nach 788 konſtruiren.

1381. Fig. 23. und 23. b. **Aufgabe.** △ aus h'', $(\beta-\gamma)$, $(b-c)$.

Analyſis. Trägt man $b = AD'$ ab, ſo beſtimmt ſich nach 141 $\angle D'CB = \frac{\beta-\gamma}{2}$, und $D'B = (b-c)$. Aus

diesen beiden Stücken und h'' läßt sich △ D'CB nach 788 konstruiren.

1382. Fig. 23. und 23. b. Aufgabe. △ aus h', $(\beta-\gamma)$, (b + c).

Analysis. Bestimmt man CG = (b+c), so ergiebt sich ∠ CBG nach 143 = $R + \frac{\beta-\gamma}{2}$, weshalb sich durch Hilfe von h' △ CBG nach 788 konstruiren läßt.

1383. Fig. 23. und 23. b. Aufgabe. △ aus h'', $(\beta-\gamma)$, (b + c).

Analysis. Bestimmt man BG' = (b + c), so ergiebt sich nach 143 ∠ $BCG' = R - \frac{\beta-\gamma}{2}$, weshalb sich durch Hilfe von h'' △ BCG' nach 788 zeichnen läßt.

1384. Aufgabe. △ aus h, α, $(p \mp q)$.

Analysis. Durch h und (p—q) bestimmt sich t nach 351; man hat also △ aus t, h, α, siehe 1360, zu konstruiren.

1385. Aufgabe. △ aus t, α, $(p \mp q)$.

Analysis. Führt ganz wie in 1384 zu 1360.

1386. Fig. 232. Aufgabe. △ aus α, ϱ, (b—c).

Analysis. Verbindet man O mit C und B, so bestimmt sich ∠ $COB = R + \frac{\alpha}{2}$ nach 326. Nun ist aber nach dem 1355 entwickelten Gesetz CH — BH = (b—c), folglich läßt sich △ COB durch Hilfe von ϱ nach 1384 zeichnen.

1387. Aufgabe. △ aus ϱ, (b—c), $(\beta-\gamma)$.

Analysis 1). Fig. 232. Schneidet man CD = (b—c) ab, so ergiebt sich ∠ $CDB = R + \frac{\alpha}{2}$. Nach 326 ist aber ∠ COB ebenfalls $= R + \frac{\alpha}{2}$, folglich liegen die 4 Punkte B, O, D, C in einer Kreislinie, und es ist ∠ DOC = ∠ $DBC = \frac{\beta-\gamma}{2}$ nach 141. Hiemit zeigt sich das △DOC

aus $DC = (b - c)$, dem Gegen$\angle$ $DOC = \frac{\beta - \gamma}{2}$, und der Höhe $OG = \varrho$ nach 788 konstruirbar, und es läßt sich daraus die Zeichnung des verlangten $\triangle ABC$ ableiten.

Analysis 2). Fig. 232. Die Linien BO und CO halbiren die $\measuredangle \beta$ und γ, es ist also $\angle OBC - \angle OCB = \frac{\beta - \gamma}{2}$ gegeben, während $CH - BH = (b - c)$ nach 1355 sein muß; folglich läßt sich $\triangle COB$ durch Hilfe von ϱ nach 1365 zeichnen.

Anmerkung. Aus der Analysis 1) ergiebt sich:

1) daß, wenn man in einem $\triangle$ nach 325 den über einer Seite mittelst des Gegen$\angle$ gegebenen Kreisort für den Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$ beschreibt, derselbe in jeder anliegenden Seite oder deren Verlängerung den Unterschied dieser beiden Seiten als Sehne abschneidet.

2) Fig. 232. Bestimmt man $CD = (b - c)$ und verbindet O mit D und C, so ergiebt sich $\angle DOC = \angle DBC = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

1388. Aufgabe. $\triangle$ aus α, m, $(a + b + c)$.

Analysis. Zeichnet man α, so läßt sich m festlegen. Nach 339 tangirt aber a einen nach derselben Nummer konstruirbaren Kreisort, folglich hat man durch den Endpunkt von m an diesen Ort eine Berührungslinie zu legen.

Zusatz. Es sind $2 \leqq$ Resultate möglich.

1389. Fig. 233. Aufgabe. $\triangle$ aus α, h, $(a + b + c)$.

Analysis 1). Denkt man sich in Rücksicht auf 130 BC um $CE = CA$, und $BD = BA$ verlängert, so bestimmt sich $DE = (a + b + c)$, und $\angle DAE = \angle DAB + \angle CAE + \angle BAC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \alpha = \frac{2R - \alpha}{2} + \alpha = R + \frac{\alpha}{2}$, weshalb durch Hilfe von h $\triangle AED$ nach 788 kon-

struirt werden kann, und nur 72 anzuwenden ist, um B und C, und hiedurch △ ABC festzustellen.

Analysis 2). α und (a + b + c) bestimmen, wenn man $\frac{1}{2}$ (a + b + c) auf den Schenkeln von α absetzt, den ⊙ von 339. Beschreibt man nach der Konstruktion desselben um A einen zweiten ⊙ mit h, so hat man daher nur für beide ⊙⊙ eine gemeinschaftliche Berührungslinie nach 318 zu verzeichnen, um die Lage von a, und hiemit das verlangte △ ABC festzustellen.

1389. a. Aufgabe. △ aus a, h, ϱ.

Analysis. Durch a und h ergiebt sich f^2 nach 185, durch f^2 und ϱ nach 342 (a + b + c), durch (a + b + c) und a endlich (b + c); man hat also △ aus a, (b + c), ϱ, siehe 1354, zu verzeichnen.

1390. Fig. X. Aufgabe. ▱ aus a, h', ∠ (cc').

Analysis. a und h' geben nach 114 ∠ BCA. Zieht man durch E eine ∦ zu b, so halbirt dieselbe a, weshalb sich mittelst des vorhergenannten ∠ ein Ort für E bestimmen läßt. Der zweite Ort ergiebt sich mittelst a und ∠ (cc') nach 320 u. s. w.

1391. Fig. 185. Aufgabe. △ aus a, b, c um △ NOQ.

Analysis. Durch a, b, c ist △ ABC der Gestalt und Größe nach bestimmt, also auch jeder von den ∠ α, β, und γ gegeben. Mittelst NO und α, und NQ und γ bestimmen sich aber nach 320 zwei N, O, A, und N, C, Q durchlaufende Kreislinien, also hat man nur durch N nach 372 so die Seite b zu legen, daß ihre beiden Endpunkte in jene Kreislinien fallen, u. s. w.

Anmerkung. Mittelst dieser Aufgabe kann auch die korrespondirende: △ aus a, b, c in △ NOQ gelöst werden, indem man ein △ aus a, b, c zeichnet, um dasselbe ein △ NOQ ≅ △ bestimmt, und die in den Seiten desselben erhaltenen Abschnitte in den Seiten des gegebenen △ NOQ

nachbildet, u. s. w. Eine selbstständige Auflösung ist 1989 zu finden.

1392. Fig. 234. **Aufgabe.** △ aus c, β so um △ NOQ, daß h durch P läuft.

Analysis. ∠ NAP ist $= R - \beta$ gegeben, weshalb sich mittelst NP nach 320 eine N, P, A durchlaufende Kreislinie zeichnen läßt. In derselben Art ergiebt sich aber durch NQ und β eine andere N, B, Q durchlaufende Kreislinie, folglich hat man zur Feststellung von A und B mittelst c nur 372 anzuwenden, u. s. w.

1393. **Aufgabe.** △ aus $(a+b)$, $(h'+h)$, ϱ.

Analysis. Durch $(a+b)$ und $(h'+h)$ erhält man γ nach 149, und hat also △ aus γ, ϱ, $(a+b)$ (1356) zu verzeichnen.

Zusatz. Nach 149 sind zwei verschiedene Resultate möglich.

1394. **Aufgabe.** △ aus $(a-b)$, $(h'-h)$, ϱ.

Analysis. Durch $(a-b)$ und $(h'-h)$ erhält man γ nach 152, und hat daher △ aus γ, ϱ, $(a-b)$ (1386) zu verzeichnen.

Zusatz. Nach 152 sind zwei verschiedene Resultate möglich.

1395. **Aufgabe.** △ aus $(a+b)$, $(h'+h)$, r.

Analysis. Führt wie in 1393 zu 795.

1396. **Aufgabe.** △ aus $(a-b)$, $(h'-h)$, r.

Analysis. Führt wie in 1394 zu 795.

1397. **Aufgabe.** △ aus $(h'-h)$, γ, r.

Analysis. Führt durch 152 zu △ aus $(a-b)$ γ, r, siehe 795.

1398. **Aufgabe.** △ aus $(h'+h)$, γ, ϱ.

Analysis. Führt durch 149 zu △ aus γ, ϱ, $(a+b)$, siehe 1356.

1399. Fig. 50. und Fig. 50. a. **Aufgabe.** △ aus $(a+b+h+h')$, γ, c.

Analyſis. Das △ DCE des Lehrſatzes 148 läßt ſich nach 644 mittelſt $(a+b+h+h')$ und γ zeichnen, und beſtimmt einzeln $(a+b)$ oder CD, und $(h'+h)$ oder DE, weshalb man die Aufgabe: △ aus $(a+b)$, γ, c, ſiehe 642, zu löſen hat.

1400. Aufgaben. △ aus $(a+b+h+h')$, γ, r.
△ aus $(a+b+h+h')$, γ, ϱ.

Analyſis. Führt wie in 1399 zu 795 und 1356.

1401. Aufgabe. △ aus $(a+b+h+h')$, r, c.

Analyſis. Durch c und r ergiebt ſich nach 321 γ; man hat alſo 1399 zu verzeichnen.

1402. Fig. 50. und Fig. 50. a. **Aufgabe.** △ aus $[(a+b)-(h'+h)]$, γ, c.

Analyſis. Das △ DCE des Lehrſatzes 148 läßt ſich nach 645 mittelſt γ und $[(a+b)-(h'+h)]$ zeichnen, alſo $(a+b)$ oder CD beſtimmen, weshalb ſich die Aufgabe auf △ aus $(a+b)$, γ, c (642) reduzirt.

1403. Aufgaben.
△ aus $[(a+b)-(h'+h)]$, γ, r.
△ aus $[(a+b)-(h'+h)]$, γ, ϱ.

Analyſis. Führt wie in 1402 zu 795 und 1356.

1404. Aufgabe. △ aus $[(a+b)-(h'+h)]$, c, r.

Analyſis. Führt durch 321 zu 1402.

1405. Fig. 51. und Fig. 51. a. **Aufgabe.** △ aus $[(a-b)+(h'-h)]$, γ, c.

Analyſis. Das △ DCE des Lehrſatzes 151 läßt ſich nach 644 mittelſt γ und $[(a-b)+(h'-h)]$ zeichnen, alſo $(a-b)$ oder CD beſtimmen, weshalb ſich die Aufgabe auf △ aus $(a-b)$, γ, c (643) reduzirt.

1406. Aufgaben.
△ aus $[(a-b)+(h'-h)]$, γ, r.
△ aus $[(a-b)+(h'-h)]$, γ, ϱ.

Analyſis. Führt wie in 1405 zu 795 und 1386.

1407. Aufgabe. △ aus $[(a-b)+(h'-h)]$, c, r.

Analyſis. Führt durch 321 zu 1405.

1408. Fig. 51. und Fig. 51. a. **Aufgabe.** △ aus $[(a-b)-(h'-h)]$, γ, c.

Analysis. Das △ DCE des Lehrsatzes 151 läßt sich nach 645 mittelst γ und $[(a-b)-(h'-h)]$ zeichnen, also $(a-b)$ oder CD bestimmen, weshalb sich die Aufgabe auf △ aus $(a-b)$, γ, c (643) reduzirt.

1409. **Aufgaben.**

△ aus $[(a-b)-(h'-h)]$, γ, ϱ.

△ aus $[(a-b)-(h'-h)]$, γ, r.

Analysis. Führt wie in 1408 zu 1386 und 795.

1410. **Aufgabe.** △ aus $[(a-b)-(h'-h)]$, c, r.

Analysis. Führt durch 321 zu 1408.

1411. Fig. 235. **Aufgabe.** △ aus $(b+c)$, α, m. (Vergl. 567).

Analysis. Legt man $m = AD$ in α fest, so ergeben sich die gleichen ⊥⊥ DF und DE, der zu denselben gehörende ⊙ um D, und $CF+EB = (b+c)-(AF+AE)$. Zieht man die a ∓ Tangente NQ, und legt ferner durch D zu b und c die ∓∓ DG und DI, so entstehen, da ND und QD die ∠ bei N und Q halbiren, die ▽▽ CG und BI. Hieraus folgt $NC = NG$, und $QB = QI$. Nun ist aber auch $NF = NH$, und $QE = QH$, folglich muß d. S. $CF = GH$, und $BE = IH$, also $CF+BE$ oder $(b+c)-(AF+AE) = GI$ sein. Ferner ist noch im △ DGI ∠ GDI $= \alpha$ (∓ Schenkel) und die Höhe DH gegeben, also läßt sich nach 788 zunächst △ GDI, und hierauf schließlich auch das gesuchte △ ABC zeichnen.

Anmerkung 1). Aus der Analysis folgt das Gesetz, daß in jedem △ AQN drei durch den Mittelpunkt D des ⊙ im △ den Seiten ∓ gezogene Linien $GI = CF+EB$ bestimmen.

Anmerkung 2.) Durch ähnliche Hilfsmittel lassen sich die Aufgaben 1388 und 1389, die erstere auf die letztere, und umgekehrt, zurückführen.

1412. Fig. 235. **Aufgabe.** △ aus (b — c), α, m. (Vergl. 567).

Analysis. Durch gleiche Schlüsse wie in 1411 ergiebt sich CF — BE = GH — HI. Da nun AF = AE, also CF — BE = (b — c) ist, muß deshalb GH — HI = (b — c) sein. Es ist aber noch im △ DGI ∠ GDI = α, und die Höhe ⊥H = DF bekannt, folglich läßt sich dieses △ DGI nach 1384, und damit auch das verlangte △ ABC zeichnen.

Anmerkung. Oertlich genommen konnten die Aufgaben 1411 und 1412 auch eingekleidet werden:

durch einen Punkt in der Halbirungslinie eines ∠ eine Linie zu legen, welche eine bestimmte Summe oder Differenz der Schenkel abschneidet. Diese Auffassung führt zu einem bekannten Linien-Aufgabensystem, siehe 1940 u. s. w.

1412. a. Fig. 235. a. **Aufgabe.** △ aus b, β, (a + b).

Analysis. Sucht man (a + b) als gerade Linie zu benutzen, und legt deshalb △ ADC so in die Verlängerung von BC, daß CE = AD = b, und daher CF = CA = b, ∠ CFE aber = γ wird, so ergiebt sich, da ∠ CFE + ∠ FCE = R ist, auch ∠ ACD + ∠ FCE = R, weshalb ∠ ACF ebenfalls = R sein muß, folglich A, C, und F festliegen. Nun hat man aber ferner durch b und β nach 320 einen Kreisort für B, und durch FC und ∠ FEC = R einen zweiten gleichfalls C durchlaufenden Kreisort für E, also kann, da BE = (a + b) gegeben ist, die Aufgabe durch 372 gelöst werden.

1412. b. Fig. 235. a. **Aufgabe.** △ aus b, β, (a — b).

Analysis. Schließt man ähnlich wie in 1412. a, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1608, da CB — CE = (a — b), und sowohl der ∠ B, als der ∠ E gegeben ist.

1413. Fig. 23. Aufgabe. △ aus α, $(b+c)$, $(p-q)$.

Analysis. Beschreibt man um A mit AB oder c eine Kreislinie, und verlängert AC bis G, so ergiebt sich nach 139 $CE = (p-q)$, und $CG = (b+c)$. Nun ist $\angle GEB = \frac{1}{2} \angle GAB = R - \frac{\alpha}{2}$, also muß der Supplement $\angle CEG = R + \frac{\alpha}{2}$ sein. Hiemit zeigt sich aber das △ CGE bestimmt, und es kann nach der Konstruktion desselben das verlangte △ ABC abgeleitet werden.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Gesetz,

daß in jedem △ $\angle CEG = \angle CDB = R + \frac{\alpha}{2}$ ist.

1414. Fig. 23. Aufgabe. △ aus α, $(b-c)$, $(p-q)$.

Analysis. Beschreibt man um A mit AB oder c eine Kreislinie, so ergiebt sich nach 139 $CE = (p-q)$, und $CD = (b-c)$. Nun ist $\angle DEB + \angle DGB$ oder $\angle DEB + \frac{1}{2}\alpha = 2R$, und deshalb $\angle DEB = 2R - \frac{1}{2}\alpha$, folglich muß der Supplement $\angle CED = \frac{1}{2}\alpha$ sein. Hiemit zeigt sich aber das △ CDE bestimmt, und es kann nach der Konstruktion desselben das verlangte △ ABC abgeleitet werden.

Anmerkung 1.) Aus der vorstehenden Analysis folgt das Gesetz,

daß in jedem △ $\angle CED = \frac{\alpha}{2}$ ist.

Anmerkung 2.) Nimmt man Proportionen zu Hilfe, so ergiebt sich für die vorstehende Aufgabe und 1413 folgende Analysis. Nach 209 ist $b^2 - c^2 = p^2 - q^2$, oder $(b+c)(b-c) = a(p-q)$,

also $b+c : p-q = a : b-c$,

und $b-c : p-q = a : b+c$,

weshalb $a : (b-c)$ für 1413, und $a : (b+c)$ für 1414 gegeben ist. Mittelst dieser Verhältnisse und α läßt sich aber

die Gestalt, und hierauf auch die Größe des verlangten △ ABC bestimmen.

1415. Bemerkung. Will man den Anfänger noch mehr an das Aufsuchen neuer Gesetze, Daten ꝛc. gewöhnen, so hat man dazu nur Aufgaben zu wählen, die ein früher unbenutztes Element enthalten. Bei den folgenden Aufgaben sind deshalb die Radien der 3 ⊙⊙ am △: ϱ', ϱ'', ϱ''' unter den Bedingungen aufgenommen.

1416. Fig. 236. Aufgabe. △ aus m, $(\beta-\gamma)$, ϱ'.

Analysis. ∠ (m h) ist nach 145 $= \frac{\beta-\gamma}{2}$. Da nun $\varrho' \perp$ h ist, muß auch ∠ AMG $= \frac{\beta-\gamma}{2}$ sein, womit, da zugleich ϱ' bekannt ist, MU, und da UA = m gegeben ist, auch AM gezeichnet werden kann, woraus die Auflösung genügend hervorgeht.

Anmerkung. Aus der Analysis folgt das Gesetz, daß ∠ GMA $= \frac{\beta-\gamma}{2}$, ∠ HNB $= \frac{\alpha-\gamma}{2}$ ist, u. s. w.

1417. Fig. 236. Aufgabe. △ aus h, m, ϱ'''.

Analysis. Durch h und m ist das zugehörige △ bestimmt, also die Lage von CQ′ gegeben. Wäre nun die Lage AO ebenfalls bekannt, so hätte man nur zwischen beide Linien ϱ''' oder OQ′ zu schieben. Aber ∠ OAI = ∠ OAQ = ∠ NAH, und ∠ WAE = WAH, also ist ∠ WAO = R, folglich die Lage von AO bekannt, und hiedurch mittelst 79 die Aufgabe lösbar.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich, daß die Verbindungslinien von den Mittelpunkten O, M, N der ⊙⊙ am △ die ⩝spitzen A, B, C durchlaufen, und ferner,
daß die Verbindungslinien derselben Mittelpunkte mit dem Centrum W des ⊙ im △, also die verlängerten Halbirungslinien m, m′, m″ von α, β, γ die Höhen des △ MNO bilden.

1418. Fig. 236. Aufgabe. △ aus a, ϱ'', ϱ'''.

Analysis. Da nach 373 die gemeinschaftlichen Tangenten zweier ⊙⊙, welche die Centrale nicht schneiden, z. B. DS und ES′, gleich sind der von beiden begrenzten Linie CB, so verfällt man durch Analogie darauf, dieselbe, von zwei anderen gemeinschaftlichen Berührungslinien RI und HQ begrenzte Linie CB oder a, mit diesen Tangenten RI und HQ zu vergleichen. HQ besteht aus den Stücken HA und AQ. Von diesen ist AQ = SC = CG: denn CQ und AS sind beide nach 339 $= \frac{a+b+c}{2}$, weshalb gleiche Reste bleiben, wenn man CA fortnimmt. Auf dieselbe Art ergiebt sich, daß AR oder AH = BS′ = BG ist. Folglich hat man AH + AQ oder HQ = BG + GC = a. Zeichnet man demnach eine Linie HQ = a, und errichtet die beiden ⊥⊥ QO = ϱ''' und HN = ϱ'', so stellen sich die Mittelpunkte der ⊙⊙ um O und N fest, und es muß sich durch Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten R′Q′, und RI nach 318, das verlangte △ ABC ergeben.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Gesetz,

1) daß sich stets BQ′ = CR′, BS′ = AR ꝛc. ergiebt, also auch

2) die in den Seiten des △ liegenden Entfernungen zweier ∠spitzen B und C von den Berührungspunkten I und H der ⊙⊙ am △, welche die Gegenseiten berühren, gleiche Größe haben, d. h. BI ist = CH, CG = AI ꝛc.;

3) daß jede gemeinschaftliche Berührungslinie zweier ⊙⊙ am △, welche die Centrale durchschneidet, derjenigen Seite des △ gleich ist, deren Verlängerungen, ohne die Centrale zu treffen, jene beiden ⊙⊙ ebenfalls berühren, z. B. HQ oder RI = BC = a.

1419. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus (a + b), ϱ', ϱ''.

Analyſis. Sucht man wegen der Bedingung (a + b) die Seiten a und b als eine Linie, und doch gemeinſchaftlich mit den gegebenen ⊙⊙ von ϱ' und ϱ'' zu betrachten, ſo ergiebt ſich auf demſelben Wege wie in 1418 zugleich RI oder HQ = CB = a, und IS′ = AC = b, alſo RS′ = (a + b). Hiedurch ſtellen ſich aber die Punkte N und M als Endpunkte der ⊥⊥ ϱ' und ϱ'' feſt, ſo daß die Auflöſung mit der Konſtruktion der beiden gemeinſchaftlichen Tangenten HS und R′G nach 318 vollendet werden kann.

Anmerkung. Aus der vorſtehenden Analyſis ergiebt ſich das folgende Geſetz:

Jede gemeinſchaftliche Berührungslinie zweier ⊙⊙ am △, welche die Centrale nicht durchſchneidet, hat mit der Summe zweier Seiten des △, von denen keine in jene Berührungslinie fällt, dieſelbe Größe, z. B. QS iſt = (a + c).

1420. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus (a — b), ϱ, ϱ'''.

Analyſis. Sucht man die Linien a und b mit den ⊙⊙ von ϱ und ϱ''' in Verbindung zu betrachten, ſo wird man wie in 1418 bemerken, daß IS′ = AC = b iſt. Nun kennt man aber ES′ = BC = a (nach 373), folglich muß IE = (a — b) ſein. Da nun ϱ und ϱ''' gegeben ſind, beſtimmen ſich durch die Punkte W und O mit den zugehörigen ⊙⊙ nach 318 die Tangenten FQ′ und DQ, und hiedurch das geſuchte △ ABC.

Anmerkung. Aus der vorſtehenden Analyſis ergiebt ſich folgendes Geſetz:

Die gemeinſchaftliche Berührungslinie des ⊙ im △ und eines ⊙ am △, welche die Centrale durchſchneidet, hat mit dem Unterſchiede zweier Seiten des △, von denen keine in die genannte Tangente fällt, dieſelbe Größe; z. B. iſt GF = AC — AB = (b — c).

1421. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus ϱ'', ϱ''', $(\beta-\gamma)$.

Analyſis. Nach 145 iſt ∠ (mh) oder ∠ UAG′ $= \frac{\beta-\gamma}{2}$. Nun iſt nach 1417 ∠ UAY = R, folglich muß ∠ UYA ebenfalls $= \frac{\beta-\gamma}{2}$ ſein, weshalb man nur zwiſchen die Schenkel dieſes ∠ nach 79 OQ′ und R′N, oder ϱ''' und ϱ'' zu ſchieben hat, um die Mittelpunkte der ⊙⊙ um O und N, und mittelſt der gemeinſchaftlichen Tangenten R′Q′, RI und HQ nach 318 auch das verlangte △ ABC feſtzuſtellen.

Anmerkung. Aus der vorſtehenden Analyſis ergiebt ſich das Geſetz:

die Halbirungslinie jedes Außen∠ eines △ bildet mit der nicht den Scheitel deſſelben treffenden Seite einen ∠, der mit dem halben Unterſchiede beider an dieſer Seite liegenden inneren ∠ des △ gleiche Größe hat.

1422. Fig. 237. **Aufgaben.**

△ aus a, r, ϱ'''. } (Analogieen zu 824.)
△ aus a, r, ϱ''. }

Analyſis. Verlängert man DA, ſo ergiebt ſich nach 1417, daß ∠ DAF, welchen AD mit AF oder der Lage von m bildet, alſo auch ∠ EAF = R iſt, folglich EF ein Durchmeſſer ſein muß, weshalb ſich EC = EB, und ∠ ECB $= R - \frac{\alpha}{2}$ beſtimmt. Hieraus folgt, daß ∠ ECD = ∠ ECB − ∠ DCB $= R - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$ iſt. Nun bildet aber ∠ CBA das Supplement zu β, iſt daher $= 2R - \beta$, und deshalb ∠ EDC als dritter ∠ des △ CED ebenfalls $= \frac{\beta}{2}$, folglich muß EC = EB = ED ſein, womit ſich der Halbmeſſer eines Kreisorts für D gegeben zeigt, da man den Mittelpunkt E nach der Feſtſtellung

von a in dem mit r beschriebenen ⊙ als Endpunkt eines ⊥ a stehenden Durchmessers desselben, und hiedurch auch den Radius EB zeichnen kann. Die um ϱ''' von der Lage a entfernte ≠ bildet ferner einen zweiten Ort für D, also läßt sich dieser Punkt, und schließlich durch ED auch A bestimmen, womit △ ACB festgestellt ist. Durch eine ähnliche Analysis ergiebt sich derselbe ⊙ um E als Ort für den Mittelpunkt G des zu ϱ'' gehörenden ⊙, weshalb der Punkt G, sobald ϱ'' gegeben ist, durch die um ϱ'' von der Lage a entfernte ≠ festgestellt, und hiemit das verlangte △ ABC abgeleitet werden kann.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich,

daß mittelst a und r, oder a und α ein Kreisort für die Mittelpunkte der beiden ⊙⊙ am △, welche b und c selbst berühren, gezeichnet werden kann.

1423. Aufgabe. △ aus $(b+c)$, ϱ''', $(\beta-\gamma)$.

Analysis 1). Fig. 237. Analogie zu Analysis 1) von 1387. Verbindet man B mit H, so ergiebt sich ∠ CHB $= \frac{\alpha}{2}$, da der Centri∠ CEB $= \alpha$ ist. Hieraus folgt aber CH $= (b+c)$, und ∠ CBH (nach 143) $= R + \frac{\beta-\gamma}{2}$, weshalb nach 320 und 1422 ein Ort für D bekannt ist. Den zweiten Ort giebt die um ϱ''' von CH entfernte ≠, folglich läßt sich D, also auch die an den ⊙ um D führende Tangente CN mit B, und die Lage der Berührungslinie BA feststellen, woraus die Zeichnung des verlangten △ ABC hervorgeht.

Analysis 2). Fig. 236. Wie in 1419 findet sich $R'Q' = (b+c)$, und wie in 1421 ∠ $R'YN = \frac{\beta-\gamma}{2}$, also das △ $NR'Y$ bestimmt, weshalb man nach der Konstruktion desselben nur $R'Q' = (b+c)$ abzuschneiden, und in

Q' einen ⊥ zu errichten hat, um den zweiten Mittelpunkt O festzustellen. Mittelst dieser Punkte O und N, und dem zugehörigen ⊙⊙ muß sich aber durch 318 das verlangte △ ABC konstruiren lassen.

Anmerkung. Aus der Analyst 1) ergiebt sich, daß eine nach 320 über der Summe zweier Seiten mittelst des Unterschiedes ihrer Gegen∠ konstruirbare Kreislinie einen Ort für die Mittelpunkte der beiden ⊙⊙ am △ bildet, welche diese Seiten selbst berühren.

2tes Kapitel.

Vierecks-Aufgaben aller Art.

1424. Fig. 238. Aufgabe. ▱ aus c, d, (a+b), ∠ A, ∠ C.

Analysis. Bestimmt man AG = (a+b), AF = (d+c), so ergiebt sich FG mittelst △ AFG. Nun ist aber $\angle FCG = \frac{\angle D}{2} + \angle C + \frac{\angle B}{2} = 2R - \frac{\angle A - \angle C}{2}$, folglich hat man nach 320 einen Ort für C. Der zweite Ort ergiebt sich, wenn man um D eine Kreislinie mit c beschreibt, u. s. w.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1425. Aufgabe. ▱ aus c, d, (a—b), ∠A, ∠C.

Analysis. Fall 1). Fig. 239. a ist > b, d > c. Bestimmt man AG = (a—b), AF = (d—c), so ergiebt sich FG mittelst △ AFG. Nun ist aber $\angle FCG = \angle C - \angle DCF - \angle GCB = \angle C - R + \frac{\angle D}{2} - R + \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C - \angle A}{2}$, folglich hat man nach 320 einen Ort

für C; der zweite ergiebt sich, wenn man um D eine Kreislinie mit c beschreibt u. s. w.

Fall 2.) Fig. 239. a. b ist $>$ a, c $>$ d. Bildet man die Analysis Fig. 239. a. von C aus, wie in Fall 1) von A, so ergiebt sich über FG ein Ort für A durch $\angle FAG = \frac{\angle A - \angle C}{2}$, und ein zweiter Ort aus D durch d u. s. w.

Fall 3.) Fig. 239. b. a ist $>$ b, c $>$ d. Bestimmt man $AG = (a-b)$, $AF = (c-d)$, so ergiebt sich FG mittelst $\triangle$ AFG. Nun ist aber $\angle FCG = \angle FCD - \angle GCD = R - \frac{\angle D}{2} - \angle C + R - \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle A - \angle C}{2}$; folglich hat man nach 320 einen Ort für C; der zweite ergiebt sich, wenn man um D eine Kreislinie mit c beschreibt, u. s. w.

Fall 4.) Fig. 239 c. b ist $>$ a, d $>$ c. Die Analysis Fall 2) paßt, auf Fig. 239. c. angewandt, auch für diesen Fall.

Zusatz. Es sind in allen 4 Fällen 2 verschiedene Resultate möglich.

1426. Fig. 52. Aufgabe. $\square$ aus e, e', (a + b), $\angle$ (e e'), $\angle$ (a e).

Analysis. Durch e, e', $\angle$ (e e') ergiebt sich das 162 angeführte $\square$ DBFG. In diesem läßt sich $\triangle$ BCF nach 637 konstruiren, da FC + CB = (a + b), FB = e, $\angle$ CFB = $\angle$ (a e) gegeben ist, u. s. w.

1427. Aufgabe. $\square$ aus e, e', (a — b), $\angle$ (e e'), $\angle$ (a e).

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1426; nur ist 638 statt 637 zu benutzen.

1428. Fig. 52. Aufgabe. $\square$ aus e, e', (a + b), $\angle$ (e e'), $\angle$ (a e').

Analysis. Durch e, e', $\angle$ (e e') ergiebt sich das 162 angeführte $\square$ DBFG. In diesem läßt sich $\triangle$ BFC

nach 637 konstruiren, da FC + BC = (a + b), FB = e, ∠ CFB = ∠ (e e′) − ∠ (a e′) gegeben ist, u. s. w.

1429. Aufgabe. □ aus e, e′, (a — b), ∠ (e e′), ∠ (a e′).

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1428; nur ist 638 statt 637 zu benutzen.

1430. Fig. 52. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ (e e′), (e + e′), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Zieht man CF ∥ a, und BF ∥ e, so zeigt sich △ DCF aus ∠ DCF = (∠ B + ∠ C), DC = c, CF = a bestimmt, also DF gegeben. Mittelst DF, DB + BF = (e + e′), und ∠ DBF = ∠ (e e′) kann man aber ferner △ DBF nach 642 zeichnen, folglich läßt sich auch das gesuchte □ ABCD bestimmen.

1431. Aufgabe. □ aus a, c, (e — e′), ∠ (e e′), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1430; nur ist 643 statt 642 zu benutzen.

1432. Fig. 52. Aufgabe. □ aus e, e′, (a + c), ∠ (a e), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Zieht man CF ∥ a, BF ∥ e, so zeigt sich □ DBFC aus DB = e′, BF = e, ∠ CFB = ∠ (a e), FC + CD = (a + c), und ∠ DCF = (∠ B + ∠ C) bestimmt. Da nun die Konstruktion desselben mittelst ähnlicher Hülfsmittel wie in 672 vorgenommen werden kann, läßt sich auch das geforderte □ ABCD konstruiren.

1433. Aufgabe. □ aus e, e′, (a — c), ∠ (a e), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Ergiebt sich wie in 1432.

1434. Fig. 52. Aufgabe. □ aus e, e′, ∠ A, ∠ C und der Summe der aus B und D auf e gefällten Höhen.

Analysis. e, e′ und die Summe der Höhen bestimmen das 162 angeführte □ DBFG, da sich jene Summe als Höhe dieses □ ergiebt. Nun ist ferner ∠ GCF = ∠

A, und ∠ DCB = ∠ C gegeben, also läßt sich der Punkt C mittelst doppelter Anwendung des 320 angeführten Orts bestimmen, u. s. w.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis geht hervor, daß nicht bloß e, e′, ∠ (ee′), sondern auch e, e² und die Summe der beiden aus den Endpunkten der einen Diagonale auf die andere gefällten Höhen das 162 angeführte ▱ bestimmen.

1435. Fig. 52. Aufgabe. △ aus e, ∠ (ee′), ∠ A, (∠ C + ∠ D), und der Summe der auf B und D auf e gefällten Höhen.

Analysis. e, ∠ (ee′) und die Summe der Höhen bestimmen das 162 angeführte ▱ DBFG, da sich jene Summe als Höhe dieses ▱ ergiebt. Nun ist ferner ∠ GCF = ∠ A, und ∠ GCB = (∠ C + ∠ D) gegeben, also läßt sich der Punkt C mittelst doppelter Anwendung des 320 angeführten Orts bestimmen, u. s. w.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis geht hervor, daß nicht bloß e, e′, ∠ (ee′), sondern auch e, ∠ (ee′) und die Summe der aus B und D auf e gefällten Höhen das 162 angeführte ▱ bestimmen.

1436. Fig. 240. Aufgabe. △ aus e, e′, (a + b), ∠ B, und der Summe der aus C und D auf e gefällten Höhen.

Analysis. e, e′ und die Summe der Höhen bestimmen das 162 angeführte ▱ DBFG, da sich jene Summe als Höhe FI dieses ▱ ergiebt. Nun ist ferner △ BCF durch FB = e, FC + CB = (a + b), und ∠ BCF = ∠ B konstruirbar, folglich läßt sich der Punkt C zeichnen, u. s. w.

Auflösung. Ziehe BF = e, eine um die gegebene Summe der Höhen FI entfernte ∥ DG zu BF, schneide FG = e′ ab, und vollende ▱ FD. Dann beschreibe über

FB nach 320 einen ⊙, dessen Abschnitt BHF den $\frac{\angle B}{2}$ faßt, schneide FH = (a + b) ab, lege mittelst 72 die Spitze C des △ HCB fest, und ziehe die ∦ ∦ BA und DA zu FC und GC, so ist das gesuchte ▱ ABCD gezeichnet.

Zusatz. Es sind 4 verschiedene Resultate möglich.

1437. Aufgabe. ▱ aus e, e', (a — b), ∠ B und der Summe der aus B und D auf e gefällten Höhen.

Analysis ꝛc. Ergiebt sich ähnlich wie in 1436.

1438. Fig. 240. Aufgabe. ▱ aus e, (a + b), ∠ (ee'), ∠ B und der Summe der aus B und D auf e gefällten Höhen.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 1436, nur daß sich hier das ▱ DBFG mittelst FB = e, ∠ FBD = ∠ (ee'), und FI = der Summe der Höhen bestimmt.

1439. Aufgabe. ▱ aus e, (a — b), ∠ (ee'), ∠ B und der Summe der aus B und D auf e gefällten Höhen.

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 1438.

1440. Fig. 241. Aufgabe. ▱ aus a, c, (∠ B + ∠ C), ∠ (be), ∠ (de').

Analysis. Da (∠ B + ∠ C) den ∠ (ac) bestimmt, und a und c gegeben sind, man aber nach der in den g. Betr. §. 29. bemerkten Analogie a und c als Diagonalen e und e', und ∠ (ac) als den von denselben gebildeten ∠ (ee') betrachten kann, so läßt sich vermuthen, daß mittelst einer 162 analogen Konstruktion sich ein für die Analysis der ▱ Aufgaben vortheilhaftes ▱ zeichnen läßt. Zieht man deshalb, statt durch B und D, hier durch C und D ∦ ∦ mit a, bestimmt DG und CF = a, und verbindet B mit G und F, so bildet DGFC das analoge ▱, in welchem DG = a, DC = c, und ∠ CDG = ∠ (ac) ist, während sich zugleich ∠ GBD = ∠ (de'), und ∠ CBF = ∠ (be) ergiebt. Diese Lage der gegebenen Stücke führt nun wirklich zur Konstruktion des

geforderten ▱, da sich mittelst a, c und ∠ (ac) = 2R — (∠B+∠C) das ▱ DGFC konstruiren läßt, und mittelst der Seiten DG, CF und ihren Gegen ∠ (de′) und (be) Punkt B nach 320 festgestellt werden kann, also schließlich nur durch C und D ∓∓ zu FB und GB zur Bestimmung des vierten Punktes A von dem geforderten ▱ ABCD zu legen sind.

Anmerkung 1). Eben so bildet ▱ aus a, c, ∠ (ac), e, e′ eine Analogie zu ▱ aus e, e′, ∠ (ee′), a, c indem sich ▱ DF aus a, c, ∠ (ac), und hierauf Punkt B mittelst e und e′ bestimmen läßt. Doch kann die Aufgabe auch auf einem anderen Wege gelöst werden.

Anmerkung 2). Aus der vorstehenden Analysis folgt der

Hilfssatz: daß sich durch a, c, ∠ (ac) analog mit 162 ein zur Analysis der ▱ Aufgaben vortheilhaftes ▱ bestimmt.

1441. Fig. 241. Aufgabe. ▱ aus a, c, (b+e), ∠ (ce), (∠B+∠C). (Analogie zu 1428.)

Analysis. Schließt man wie in 1440, und zieht deshalb DG und CF ∥ und ∓ a ꝛc., so zeigt sich ▱ DF durch a, c und ∠ GDC = 2R — (∠B+∠C) bestimmt, während sich ∠ CFB = ∠ CAB = ∠ (ac) + ∠ (ec), und CB + BF = (b+e) ergiebt, woher △ CBF nach 637 konstruirt werden kann, u. s. w.

1442. Aufgabe. ▱ aus a, c, (e—b), ∠ (ce), (∠B+∠C). (Analogie zu 1429.)

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1441; nur ist 638 statt 637 zu benutzen.

1442. a. Fig. 255. Aufgabe. ▱ aus e, e′, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

Analysis. Nach 320 ergiebt sich durch e′ und ∠ A der ⊙ um △ ADB. Verlängert man b und c bis zu der Peripherie desselben, so bestimmen sich mittelst der ∠ D und B die Sehnen AI und AN. Legt man diese Sehnen in dem

für B nach 320 gegeben; folglich läßt sich nach Feststellung dieses Punktes mittelst a das geforderte □ ABCD zeichnen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Der Anfänger wird vielleicht die nach 320 mittelst ∠ (be') und ∠ (de) gegebenen Oerter über c beschreiben, und nun die Hilfsaufgabe bilden; ∓ der gemeinschaftlichen Sehne zweier ⊙⊙ zwischen die Peripherieen derselben eine Linie a zu schieben. Diese Aufgabe wäre jedoch auch nur gelöst, wenn man entweder die Sehne um a verlängerte, und wie in der vorstehenden Analysis verführe, oder wenn man 1587 benutzte.

1449. Fig. 34. Aufgabe. □ aus a, c, ∠ (be), ∠ (de'); (c ist > a).

Analysis. Sucht man zugleich das 171 und das 169 angeführte △ zu benutzen, so findet sich DH = CF = a, ∠ DBH = ∠ (de'), ∠ FBC = ∠ (be), folglich läßt sich durch wiederholte Konstruktion des Orts 320 über DH und CF Punkt B feststellen, und hierauf das verlangte □ ABCD ableiten.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1449. a. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus b, d, ∠ (be), ∠ (be'). (Vergleiche 1808.)

Analysis. Durch b, ∠ (be) und ∠ (be') ist △ BCE bestimmt. Da nun dieses △ = △ AED sein muß, damit AB ∓ CD ist, zeigt sich aber auch △ AED aus der Fläche, ∠ (ee') und d nach 873 konstruirbar, folglich muß sich durch Zusammensetzung beider △△ das verlangte □ ABCD ergeben.

1450. Fig. 119. Aufgabe. □ aus e, e', ∠ (be), ∠ (de). Analogie zu 1449. a. (Vergleiche 1809.)

Analysis. Verlängert man b und d bis zum Durchschnittspunkt G, so zeigt sich △ AGC durch e, ∠ (be), ∠ (de) konstruirbar. Nun ist △ AGC = △ GBD, folglich kennt man von dem letzteren e', ∠ G und die Fläche, weshalb sich durch die fernere Zeichnung dieses △ nach 873 das verlangte □ ABCD ergeben muß.

1451. Fig. 242. **Aufgabe.** □ aus b, d, ∠ (ee'), (∠ C + ∠ D).

Analysis. Benutzt man beide △△ BHC und BDF aus 169 und 171, so zeigt sich das erstere durch b, d, (∠ C + ∠ D) bestimmt, und es kömmt nur darauf an: das andere so zu zeichnen, daß sich CF = DH, und ∠ DBF = ∠ (ee') ergiebt. Wenn aber CF = DH werden soll, muß sich, sobald man HC in N halbirt, NF = ND ergeben, folglich für das △ DBF, BN = t, ∠ DBF = α, ∠ BNF = ∠ (ta) sein, aus welchen Stücken △ BDF mittelst 123 konstruirt werden kann.

Auflösung. Konstruire △ BHC aus HB = d, BC = b, und ∠ HBC = 2R — (∠ C + ∠ D), halbire CH in N, verlängere BN um sich selbst bis G, beschreibe über BG den Ort 320 mittelst 2R — ∠ (ee'), verlängere HC bis D, und ziehe BA ∦ CD, DA ∦ HB, so bildet ABCD das verlangte □.

Beweis. Zieht man BF ∦ DG, so ergiebt sich, da NB = NG ist, ND = NF, also auch CF = DH oder AB, wegen der Halbirung von HC in N. Nun ist aber zugleich CF ∦ AB, folglich muß auch AC ∦ BF ∦ DG, und deshalb ∠ DEC = ∠ (ee') sein, während sich DA = d, und ∠ BCD + ∠ ADC = (∠ C + ∠ D) aus der Parallelität von BH und AD folgern läßt.

1452. Fig. 242. **Aufgabe.** □ aus e, e', ∠ (ee'), (∠ C + ∠ D). (Analogie zu 1451.)

Analysis. Benutzt man beide △△ BHC und BDF aus 169 und 171, so zeigt sich das letztere durch e, e', ∠ (ee') bestimmt, und es kömmt nur darauf an: das andere so zu zeichnen, daß sich CF = HD, und ∠ HBC = 2R — (∠ C + ∠ D) bestimmt. Wenn aber CF = DH werden soll, muß sich auch, sobald man DF in N halbirt, NH = NC ergeben, folglich für das △ HBC, BN = t, ∠ CBH = α, ∠ BNC = ∠ (ta) sein, aus welchen Stücken dasselbe nach

123 und 320 konstruirt, und hierauf das verlangte □ ABCD abgeleitet werden kann.

1453. Fig. 34. Aufgabe. □ aus c, (e + e'), ∠ (e e'), ∠ (a e).

Analysis. Zieht man BF ∦ e, so ergiebt sich ∠ DFB = ∠ (a e), ∠ DBF = ∠ (e e'), FB + BD = (e + e'), also läßt sich △ DBF nach 644 zeichnen u. s. w.

1454. Aufgabe. □ aus c, (e — e'), ∠ ee', ∠ (ae).

Analysis. Ergiebt sich ganz wie in 1453, nur ist 645 statt 644 zu benutzen.

1455. Fig. 243. Aufgabe. □ aus a, (b + c + d), ∠ A, ∠ B.

Analysis. Verlängert man c nach einer Seite um b, und nach der anderen um d, so ergiebt sich OI = (b + c + d), $\angle I = \frac{\angle C}{2} = R - \frac{\angle B}{2}$, $\angle O = R - \frac{\angle A}{2}$, weshalb □ ABIO nach 97 konstruirt werden kann, und zur Feststellung des verlangten □ ABCD nur 2 mal 72 anzuwenden ist.

1456. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus (a + b + c + d), h, ∠ A, ∠ B.

Analysis. h und ∠ A, h und ∠ B bestimmen d und b nach 114. (a + b + c + d) und (b + d) geben ferner (a + c); man hat also □ aus d, (a + c) ∠ A, ∠ B (686) zu verzeichnen.

1457. Fig. 34. Aufgabe. □ aus (b + d + c — a), h, ∠ (de), (∠ C + ∠ D).

Analysis. Durch (b + d + c — a), h und 2R — (∠ C + ∠ D) ist das 169 angeführte △ BHC bestimmt, welches nach 1389 konstruirt, und hierauf das verlangte □ ABCD mittelst ∠ (de) = ∠ HBF abgeleitet werden kann.

1458. Fig. 34. Aufgabe. □ aus (a + c + e + e'), h, ∠ (ee'), ∠ (de).

Analysis. Durch (a + c + e + e'), h und ∠ (e e') ist das 171 angeführte △ DBF bestimmt, welches nach 1389

konstruirt, und hierauf das verlangte □ ABCD mittelst ∠ (de) = ∠ HBF abgeleitet werden kann.

1459. Fig. 242. **Aufgabe.** □ aus (b — d), (c — a), (∠ C — ∠ D), ∠ (ee′).

Analysis. Nach 167 und 142 läßt sich durch (b — d), (c — a), (∠ C — ∠ D) △ BHC zeichnen. Der übrige Theil der Analysis ergiebt sich wie in 1451.

1460. Fig. 242. **Aufgabe.** □ aus (b + d + c — a), h, (∠ C + ∠ D), ∠ (ee′).

Analysis. Durch (b + d + c — a), h und 2R — (∠ C + ∠ D) ist das 169 angeführte △ BHC bestimmt, welches nach 1389 konstruirt werden kann. Der übrige Theil der Analysis ergiebt sich ganz wie in 1451.

1461. Fig. 242. **Aufgabe.** □ aus (a + c + e + e′), h, (∠ C + ∠ D), ∠ (ee′).

Analysis. Durch (a + c + e + e′), h und ∠ (ee′) ist das 171 angeführte △ DBF bestimmt, welches nach 1389 konstruirt werden kann. Der übrige Theil der Analysis ergiebt sich ganz wie in 1452.

1462. Fig. 244. **Aufgabe.** ▱ im ⊙ aus a, c, ∠ (ee′), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Schließt man wie in 1440, und zieht deshalb DG und CF = und ∓ a ꝛc., so zeigt sich □ DF durch a, c, und ∠ CDG = 2R — (∠ B + ∠ C) bestimmt, während sich ∠ (ee′) = ∠ (ae) = ∠ CFB ergiebt. Daher kann mittelst der beiden ⩤ CDB und CFB Punkt B gezeichnet werden, und es ist zur Vollendung des gesuchten ▱ ABCD nur eine ∓ durch B zu CF, und eine zweite durch D zu GB zu legen.

1463. Fig. 244. **Aufgabe.** ▱ im ⊙ aus a, c, ∠ (ee′), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Nach 1440 ergiebt sich durch a, c, (∠ B + ∠ C) □ DF. ∠ (ee′) = ∠ (ae) + ∠ (ae′). ∠ (ae) ist aber = ∠ CDG + ∠ GDB (Peripherie⩤), und ∠ (ae′) = ∠ GDB (Wechsel⩤), also muß ∠ CDG + 2 ∠ GDB

$= \angle (ee')$ sein, woher sich die Lage von DB bestimmen läßt. Dasselbe gilt für FB, da $\angle (ae) = \angle CFG + \angle GFB$ (AF ein $\square$), und $\angle (ae') = \angle (ce)$ (Peripherie$\measuredangle$) $= \angle GFB$ ($\doteqdot$ Schenkel ist, also $\angle (ee')$ auch $= \angle CFG + 2 \angle GFB$ sein muß, u. s. w.

Auflösung. Konstruire $\square$ DF aus c, a, $2R - (\angle B + \angle C)$, zeichne $\angle CDI = \angle CFH = \angle (ee')$, ziehe die Halbirungslinien FB und DB der $\measuredangle$ GDI und GFH, und lege $BA \doteqdot GD$, $DA \doteqdot BG$, so bildet ABCD das geforderte $\square$ im $\odot$.

1464. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus a, c, ϱ, $\angle$ A.

Analysis. Zeichnet man nach 336 $\angle$ A um den $\odot$ mit ϱ, setzt $AB = a$ ab, und zieht aus B eine zweite Tangente, so hat man nach 375 zwischen die festgestellten Lagen von b und d die Seite c als Berührungslinie an den $\odot$ mit ϱ zu legen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1465. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus a, c, $\angle$ A, $\angle$ B.

Analysis. Legt man a mit den $\measuredangle$ A und B fest, so ergiebt sich ϱ durch 281, und es ist deshalb die vorhergehende Aufgabe zu lösen.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1466. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus a, ϱ, $\angle$ C, $\angle$ D.

Analysis. $\angle$ C und $\angle$ D bestimmen $\angle$ (bd). Schiebt man in diesen $\angle$ nach 306 den $\odot$ mit ϱ, so hat man zur Feststellung von c mittelst $\angle$ C 282, und zur Konstruktion von a 375 anzuwenden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1466. a. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus e, ϱ, $\angle$ A, $\angle$ C.

Analyſis. Durch ∠ A und ρ ergiebt ſich nach 336 AO, durch ∠ C und ρ CO, folglich läßt ſich △ AOC, von welchem außer jenen beiden Stücken noch e gegeben iſt, zeichnen, und mittelſt 272 das geſuchte ▱ ABCD beſtimmen.

1467. Fig. 245. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus a, b, ∠ A, ∠ D.

Analyſis. Legt man a und ∠ A feſt, ſo ergiebt ſich durch b ein ⊙ um B. Da nun (d — c) = a — b nach 294 gegeben iſt und = AF beſtimmt werden kann, hat man nur zwiſchen die Lage von d und die Kreislinie um B eine Linie DC zu legen, welche ſich = DF ergiebt, und um ∠ D gegen die Lage d geneigt iſt. Dieſe Hilfsaufgabe iſt 973 gelöſt.

Zuſatz. Das 2te Reſultat entſpricht der Aufgabe 1473.

1468. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus a, c, ∠ A, ∠ D.

Analyſis. 1) Fig. 241. Schließt man wie in 1440, ſo zeigt ſich ▱ DF durch a, c und den mittelſt ∠ A und ∠ D gegebenen ∠ (ac) beſtimmt, alſo GC und ∠ CGB bekannt, da ∠ DGB = ∠ A iſt. Nun muß aber GB + CB = (d + b) = (a + c) ſein, alſo läßt ſich △ GCB nach 637 konſtruiren, und hierauf das geforderte ▱ ABCD ableiten, wenn man durch B und D ∓ zu GD und BG zieht.

Analyſis 2.) Fig. 246. Setzt man die Summe von a und c an ∠ D = DG ab, und legt an DG das vierte gegebene Stück ∠ DGH = ∠ A, ſo kömmt es, da (b + d) = a + c ſein muß, nur darauf an: GA = BC, und BA ∓ GH, alſo durch die GA ∓ gezogene Linie, BH = BC zu beſtimmen. Nun iſt aber ▱ CDGH durch c, ∠ D, a + c, ∠ A, a konſtruirbar, alſo CH gegeben, folglich hat man nur 72 und die Zeichnung einer H durchlaufenden ∓ zu DG anzuwenden, um den Punkt B feſtzuſtellen, worauf ſich das geforderte ▱ ABCD ergiebt, wenn man BA ∓ HG legt.

1469. Fig. 247. Aufgabe. ▭ in und um ⊙ aus b, r.

Analysis. Als ▱ um ⊙ muß $a+c=b+d$, und als ▭ im ⊙ $b=d$ sein, also ist $\frac{a+c}{2}=b$ gegeben. Legt man zwischen die Mitten von a und c den ⊥ QS, so ergiebt sich deshalb QB + SC, oder, wenn man CN ∥ QS zieht, QN + QB, d. h. $AN=\frac{a+c}{2}=b$. BC oder b läßt sich aber in den ⊙ mit r festlegen, und eine N durchlaufende Kreislinie über BC, als Durchmesser genommen, beschreiben, also hat man nur durch B eine in beiden Kreislinien endigende Länge AN = b nach 372 zur Feststellung der Lage von AB zu legen, wodurch sich das verlangte ▭ ABCD ergiebt, wenn man schließlich CD ∥ BA zeichnet.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1470. Um den Anfänger an das Aufsuchen neuer Gesetze, Daten, ꝛc. noch mehr zu gewöhnen, sind im Folgenden einige anders als gewöhnlich bedingte Figuren-Aufgaben zusammengestellt.

Aufgabe. ▱ aus a, b, c, e so zu zeichnen, daß sich ein ⊙ beschreiben läßt, welcher e, e′ und die Verlängerungen von a und c berührt.

Analysis. Fig. 248. $e = QC + AH$,
$e' = DQ + BH$, also ist
$e - e' = c - a$, und deshalb
$e' = a + e - c$ gegeben. Durch a, b, e läßt sich aber das eine, und mittelst b, c, e′ das andere △ des gesuchten ▱ ABCD zeichnen.

1471. Fig. 249. **Aufgabe.** ▱ aus a, b, c, e′ so zu konstruiren, daß sich ein ⊙ beschreiben läßt, welcher b, c und die Verlängerungen von a und d berührt.

Analysis. $a + BQ = d + DO$,
$QC = CO$, also ist
$a + b = d + c$, und deshalb
$d = a + b - c$ gegeben.

Durch b, c, e' läßt sich aber das eine, und mittelst a, d, e' das andere △ des gesuchten ▱ ABCD zeichnen.

1472. Fig. 250. Aufgabe. ▱ aus a, c, ∠A, ∠B so zu konstruiren, daß sich a—c = b—d ergiebt.

Analysis. Zieht man durch A und C ∦ zu c und d, und schneidet AH = AI, CN = CI ab, so muß sich, da a—c = b—d bedingt ist, BN = BH = a—c, also Punkt N bestimmen. In dem △ ICN ist aber ∠ ICN = 2R—(∠A+∠B) bekannt, folglich läßt sich die Lage von NI, und hiedurch auch Punkt I zeichnen, da sich derselbe in einer um A mit c beschriebenen Kreislinie befindet. Nach der Feststellung dieses Punktes I ergiebt sich schließlich das gesuchte ▱ ABCD, wenn man IC ∦ AD, und CD ∦ IA zieht.

1473. Fig. 251. Aufgabe. ▱ aus a, d, ∠B, ∠C so zu konstruiren, daß sich a—b = d—c ergiebt. (Vergleiche 1467.)

Analysis. Bestimmt man BA = BH, und AD = DO, so muß △ COH gleichschenklig werden, da a—b = d—c bedingt ist, und es ergiebt sich mittelst des Punktes H und des ∠C die Lage von HO nebst der → von OD. Nun ist aber OD = d, und die mit AD oder d um A beschriebene Kreislinie gegeben, also hat man nur OD nach 94 mit der bekannten → zwischen die festliegende krumme und gerade Linie zu schieben, um D, und hiemit zugleich das geforderte ▱ ABCD zu konstruiren.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1474. Fig. 249. Aufgabe. ▱ aus a, c, ∠A, ∠B so zu konstruiren, daß sich ein ⊙ beschreiben läßt, welcher b, c und die Verlängerungen von a und d berührt, also ∠C erhaben bestimmt.

Analysis. Legt man a und die ∠ A und B fest, so ergiebt sich der zu dem ▱ gehörende ⊙ nach 276, weshalb man nur schließlich die Seite c als Tangente an diesen ⊙ zwischen die gegebenen Lagen von d und b nach 375 zu legen hat.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn $\angle A + \angle B \geq 2R$ ist.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1475. Fig. 52. **Aufgabe.** $\square$ aus a, e', $\angle (ee')$, $\angle (ce')$ so zu konstruiren, daß sich ein $\odot$ beschreiben läßt, welcher e, e' und die Verlängerungen von a und c berührt.

Analysis. Zeichnet man das 162 angeführte $\square$ DBFG, so ergiebt sich, da nach dem in 1470 entwickelten Gesetz im $\square$ ABCD $e - e' = c - a$ ist, im $\square$ BDCF, $BF - BD = DC - FC$, und $DB = e'$, $CF = a$, $\angle DBF = \angle (ee')$, $\angle BDC = \angle (ce')$. Im $\square$ DCFG bestimmt sich aber $DG - GF = DC - CF$, und es ist in demselben $GF = e'$, $CF = a$, $\angle DGF = \angle (ee')$, $\angle CDG = 2R - [\angle (ee') + \angle (ce')]$ gegeben. Mittelst der genannten Bedingungen läßt sich nun jedes dieser beiden $\square\square$ DBFC und DGCF konstruiren; $\square$ DBFC nämlich nach 1472, und $\square$ DGCF nach 1473, worauf schließlich das gesuchte $\square$ ABCD festgestellt werden kann.

1476. Fig. 252. **Aufgabe.** $\square$ aus a, c, $\angle A$, $\angle D$ so zu konstruiren, daß sich ein $\odot$ beschreiben läßt, welcher b, c und die Verlängerungen von a und d berührt.

Analysis. Zieht man durch C und A $\nparallel\nparallel$ zu a und b, so ergiebt sich ein $\square$ AB'CD, in welchem $B'C = a$, $CD = c$, $\angle ADC = \angle D$, und $\angle CND = \angle A$ ist. Nach 1471 muß im $\square$ ABCD $a + b = c + d$, also auch im $\square$ AB'CD $B'C + B'A = DC + DA$, oder $CD - B'A = B'C - DA$ sein, folglich wird der $\odot$, welcher nach 276 die mittelst CD, $\angle CND$ und $\angle D$ bestimmbaren Lagen DE, DA, CB' berührend gezeichnet werden kann, auch die Verlängerung von AB' tangiren, wie sich durch Umkehrung des 1470 entwickelten Gesetzes leicht erweisen läßt. Nun ist aber durch $CB' = a$ Punkt B' gegeben, also läßt sich durch 272 das $\square$ AB'CD vollenden, und hierauf das gesuchte $\square$ ABCD

ableiten, wenn man durch A und C ∥∥ zu B′C und AB′ legt.

1477. Fig. 253. Aufgabe. ▱ aus a, c, ϱ, ∠ (ee′) so zu konstruiren, daß der mit ϱ beschriebene ⊙ e, e′ und die Verlängerungen von a und c berührt.

Analysis. Legt man in ∠ (ee′) den ⊙ um O mit ϱ nach 336 fest, so erfordert die weitere Feststellung des gesuchten ▱ ABCD die zweimalige Lösung der Hilfsaufgabe: eine Berührungslinie an den ⊙ um O so zu legen, daß ein zwischen die Schenkel des Nebenwinkels von BEC fallender Abschnitt derselben eine vorgeschriebene Länge erhält (AB = a, DC = c).

Insofern diese Aufgabe eine Analogie zu 375 bildet, läßt sich vermuthen, daß auch hier ein zwischen den Schenkeln des gegebenen ∠ und der festzustellenden Tangente liegender Berührungskreis zur Auflösung führen wird. Da aber CD = c in den Neben∠ von BEC fallen soll, muß die Lage des erwähnten ⊙ sich in dem Scheitel∠ von BEC um Q ergeben, und es ist deshalb

DN − CT = DR − CR = c, } also durch Addition
− DI + CS = − DH + CH = c, }

IN + ST = 2c, und IN = TS = c, woher die Punkte S und I, und der ⊙ um Q gezeichnet werden können, und die Anwendung von 318 DC bestimmen muß. In derselben Art, wie sich eben die Feststellung von DC = c ergab, läßt sich aber auch AB = a zeichnen, und folglich die Konstruktion des gesuchten ▱ ABCD mittelst der Verbindung von B mit C, und A mit D vollenden.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

1478. Aufgabe. △ aus f^a, a, $(b^2 - c^2)$.

Analysis. Durch a und $(b^2 - c^2)$ ergiebt sich nach 211 ein Ort für A; f^a und a bestimmen aber h nach 185, folglich stellt sich A, und damit △ ABC durch 79 fest.

1479. Aufgabe. △ aus f^a, h, $(b^2 - c^2)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1478.

1480. Aufgabe. △ aus f^a, a, $(b^2 + c^2)$.

Analysis. Durch a und $(b^2 + c^2)$ ergiebt sich nach 220 ein Ort für A; f^a und a bestimmen aber h nach 185, folglich läßt sich A, und damit △ ABC durch 79 feststellen.

1481. Aufgabe. △ aus f^a, h, $(b^2 + c^2)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1480.

1482. Aufgabe. △ aus f^a, α, $(a + b + c)$.

Analysis. f^a und $(a + b + c)$ bestimmen ϱ nach 342; man hat also △ aus ϱ, α, $(a + b + c)$ nach 1357 zu verzeichnen.

1483. Aufgabe. △ aus f^a, ϱ, α.

Analysis. f^a und ϱ bestimmen $(a + b + c)$ nach 342; man hat also 1357 zu verzeichnen.

1484. Aufgabe. △ aus f^a, ϱ, a.

Analysis. f^a und ϱ bestimmen $(a + b + c)$ nach 342, $(a + b + c)$ und a geben $(b + c)$; man hat also △ aus a, ϱ, $(b + c)$, siehe 1354, zu konstruiren.

1485. Aufgabe. △ aus f^a, a, $(b + c)$.

Analysis. f^a und $(a + b + c)$ bestimmen ϱ nach 342; man hat also △ aus a, ϱ, $(b + c)$, siehe 1354, zu konstruiren.

1486. Aufgabe. △ aus f^a, h, $(a + b + c)$.

Analysis. f^a und h bestimmen a nach 185, f^a und $(a + b + c)$ aber ϱ nach 342; durch a und $(a + b + c)$ erhält

man endlich (b + c), hat also △ aus a, ϱ, (b + c) nach 1354 zu konstruiren.

1487. Aufgabe. △ aus f^2, h, ϱ.

Analysis. f^2 und h bestimmen a nach 185, f^2 und ϱ (a + b + c) nach 342; durch a und (a + b + c) erhält man aber (b + c), hat also △ aus a, ϱ, (b + c) nach 1354 zu konstruiren.

1487. a. Aufgabe. △ aus f^2, ϱ, (a + b).

Analysis. f^2 und ϱ bestimmen nach 342 (a + b + c), (a + b + c) und (a + b) aber c, folglich hat man △ aus c, ϱ, (a + b), siehe 1354, zu konstruiren.

1488. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, e, e′, ∠ C.

Analysis. Durch f^2, e und e′ läßt sich nach 194 das 162 angeführte ▱ BFGD verzeichnen, also ∠ BFG = ∠ (ee′) bestimmen, womit die Aufgabe auf 835 reduzirt ist.

1489. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, e, e′, ∠ D.

Analysis. Führt wie in 1488 zu 836.

1490. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, ∠ C, ∠ D.

Analysis. Führt wie in 1488 zu 837.

1491. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, ∠ A, ∠ C.

Analysis. Führt wie in 1488 zu 838.

1492. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, ∠ (de), ∠ (be).

Analysis. Führt wie in 1488 zu 664.

1493. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, a, ∠ (be′).

Analysis. Führt wie in 1488 zu 665.

1494. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, e, ∠ (ee′), ∠ C.

Analysis. Durch f^2, e und ∠ (ee′) läßt sich nach 695 das 162 angeführte ▱ DGFB verzeichnen, also e′ bestimmen, womit die Aufgabe auf 835 reduzirt ist.

1495. Fig. 52. **Aufgabe.** □ aus f^a, a, e, ∠ (ee'), ∠ D.

Analyſis. Führt wie in 1494 zu 836.

1496. Fig. 52. **Aufgabe.** □ aus f^a, e, ∠ (ee'), ∠ C, ∠ D.

Analyſis. Führt wie in 1494 zu 837.

1497. Fig. 52. **Aufgabe.** □ aus f^a, e, ∠ (ee'), ∠ A, ∠ C.

Analyſis. Führt wie in 1494 zu 838.

1498. Fig. 52. **Aufgabe.** □ aus f^a, e, ∠ (ee'), ∠ (de), ∠ (be).

Analyſis. Führt wie in 1494 zu 664.

1499. Fig. 52. **Aufgabe.** □ aus f^a, e, ∠ (ee'), a, ∠ (be').

Analyſis. Führt wie in 1494 zu 665.

1500. Fig. 254. **Aufgabe.** □ aus f^a, a, c, ∠ A, ∠ B.

Analyſis. a, ∠ A und ∠ B beſtimmen △ ABN, weshalb △ DNC aus der Fläche = f^a + △ ABN, c und ∠ N nach 873 konſtruirt werden kann, und ſchließlich die Punkte A und B des geſuchten □ mittelſt a und ∠ A nach 94 feſtzuſtellen ſind. Iſt ∠ A + ∠ B < 2R, ſo ergiebt ſich der Schneidungspunkt von b und d auf der Seite von c, alſo die Fläche des zu beſtimmenden △ gleich der Fläche des gegebenen △ — f^a. ∠ A + ∠ B = 2R giebt endlich die □ Aufgabe 714.

1501. Fig. 254. u. 254. a. **Aufgabe.** □ aus f^a, a, (b + c + d), ∠ A, ∠ B.

Analyſis. Fall 1) ∠ A + ∠ B iſt > 2R. a, ∠ A und ∠ B beſtimmen △ ABN, weshalb △ DNC aus der Fläche = f^a + △ ABN, ∠ N und dem Umfange = (b + c + d) + AN + NB nach 1482 konſtruirt, und hierauf a durch ∠ A nach 94 zwiſchen CN und DN, zur Vollendung des geſuchten □ ABCD, geſchoben werden kann.

Fall 2) Fig. 254. a. ∠ A + ∠ B iſt < 2R. a,

∠ A und ∠ B bestimmen △ ABN, und hiedurch die Fläche des △ DNC = △ ABN — f^2, nebst einem ∠ N desselben △. Beschreibt man nun zur ferneren Bestimmung dieses △ NCD in dasselbe einen Kreis, so ergiebt sich c = IC + OD, und deshalb IB + OA = (b + c + d), also NI + NO = NB + NA — (b + c + d) bekannt, woher der konstruirte Kreis gegeben ist, und △ NCD nach 1483 festgestellt werden kann.

1502. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, (a + b), ∠ (ae).

Analysis. Führt wie in 1488 zu 1426.

1503. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, (a — b), ∠ (ae).

Analysis. Führt wie in 1488 zu 1427.

1504. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, (a + b), ∠ (ae′)

Analysis. Führt wie in 1488 zu 1428.

1505. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e′, (a — b), ∠ (ae′).

Analysis. Führt wie in 1488 zu 1429.

1506. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, e, (a + e′), (∠ B + ∠ C).

Analysis. Zieht man CF ∓ a, und BF ∓ e, so zeigt sich △ DCF aus ∠ DCF = (∠ B + ∠ C), DC = c, CF = a bestimmt, also DF gegeben. Mittelst DF, DB + BF und der Fläche DBF = f^2, ($\frac{1}{4}$ ▱ BFGD), kann man aber ferner △ DBF nach 1485 zeichnen, folglich läßt sich auch das gesuchte ▱ ABCD bestimmen.

1507. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, (a + b), ∠ (ee′), ∠ (ae).

Analysis. Führt wie in 1494 zu 1426.

1508. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, (a — b), ∠ (ee′), ∠ (ae).

Analysis. Führt wie in 1494 zu 1427.

1529. Fig. XXI. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus f^2, e, e', $\angle$ (be).

Analysis. Führt wie in 1488 zu 856.

1530. Fig. XXI. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus f^2, e, r, $\angle$ (ee').

Analysis. Führt wie in 1494 zu 852.

1531. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus f^2, e, $\angle A$, $\angle$(ee').

Analysis. Führt wie in 1494 zu 854.

1532. Fig. XXI. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus f^2, e, $\angle$ (be), $\angle$ (ee').

Analysis. Führt wie in 1494 zu 856.

1533. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus f^2, $(a+b+c+d)$, $\angle A$, $\angle B$.

Analysis. Verbindet man den Mittelpunkt O des in dem $\square$ liegenden Kreises mit den $\measuredangle$spitzen desselben, so ergeben sich 4 $\triangle\triangle$, welche die Seiten des $\square$ zu Grundlinien, und die gleiche Höhe ϱ haben, weshalb die Summe ihrer Flächen oder $f^2 = \frac{\varrho(a+b+c+d)}{2}$ sein muß, und sich ϱ nach 185 bestimmen läßt. Legt man nun um den zu ϱ gehörenden $\odot$ die $\measuredangle$ A und B nach 336, so ergiebt sich a, und hiedurch auch $c = \frac{a+b+c+d}{2} - a$, da nach 294 $a+c = b+d = \frac{a+b+c+d}{2}$ sein muß, woher nur schließlich zur Feststellung von c die Hilfsaufgabe 375 anzuwenden ist.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: die Fläche, der Umfang und der Halbmesser des Kreises im $\square$ stehen bei jedem $\square$ um $\odot$ in solcher Beziehung, daß sich mittelst zwei von den genannten Stücken das dritte bestimmt.

1534. Fig. XXII. **Aufgabe.** ▱ um ⊙ aus f^2, a, ϱ, ∠ A.

Analysis. f^2 und ϱ bestimmen (a + b + c + d) nach 1533. Nun ist aber a + c = b + d, folglich kennt man a + c, und da a gegeben ist auch c; man hat also ▱ um ⊙ aus a, c, ϱ, ∠ A, siehe 1464, zu verzeichnen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: bei jedem ▱ um ⊙ stehen die Fläche, der Halbmesser des ⊙ im ▱ und die Summe zweier Gegenseiten in solcher Beziehung, daß aus zweien dieser Stücke das dritte abgeleitet werden kann, d. h. man hat die Gleichung $f^2 = (a+c)\varrho = (b+d)\varrho$.

1535. Fig. XXII. **Aufgabe.** ▱ um ⊙ aus f^2, a, c, ∠ A.

Analysis. Durch f^2 und (a + c) ergiebt sich ϱ nach 1534; man hat also ▱ um ⊙ aus a, c, ϱ, ∠ A, siehe 1464, zu verzeichnen.

1536. Fig. XXII. **Aufgabe.** ▱ um ⊙ aus f^2, a, ∠ A, ∠ B.

Analysis. Legt man a nebst ∠ A und ∠ B fest, so ergiebt sich ϱ nach 281; durch f^2 und ϱ bestimmt sich aber nach 1534 (a + c), folglich kennt man, da a gegeben ist, auch c, und kann die Zeichnung des geforderten ▱ durch Feststellung dieser Seite nach 375 vollenden.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1537. Fig. XXX. **Aufgabe.** ▭ um ⊙ aus f^2, b, d.

Analysis. Durch f^2 und (b + d) ergiebt sich ϱ nach 1534; man hat also 869 zu verzeichnen.

1538. Fig. 247. **Aufgabe.** ▭ in und um ⊙ aus f^2, ϱ.

Analysis. Durch f^2 und ϱ ergiebt sich (b + d) nach 1534; nun ist aber b = d, also hat man nur zwei ∗ Tan-

genten an den ⊙ mit ϱ zu legen, und nach 95 und 282 b und d festzustellen.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich, von denen aber je zwei $\cong$ sind.

1539. Wie im vorhergehenden Kapitel sind nachstehend auch hier einige Aufgaben zur besonderen Uebung des Schülers im Auffinden neuer Gesetze, Daten ꝛc. zusammengestellt.

Aufgabe. Fig. VI. △ aus f^2, α, ϱ'.

Analysis. Durch α und ϱ' bestimmt sich $(a+b+c)$ nach 339; man hat also △ aus α, $(a+b+c)$, f^2 nach 1482 zu konstruiren.

1540. Fig. VI. Aufgabe. △ aus f^2, ϱ, ϱ'.

Analysis. f^2 und ϱ bestimmen $(a+b+c)$ nach 342. Durch $(a+b+c)$ und ϱ' bestimmt sich aber α nach 339; schiebt man also noch den ⊙ mit ϱ in $\angle\ \alpha$ nach 306, und zieht eine gemeinschaftliche Tangente nach 318, so ergiebt sich das verlangte △.

1541. Fig. 236. Aufgabe. △ aus f^2, a, ϱ'.

Analysis. Die Fläche des △ ABC ist = △ MCA + △ MBA − △ MBC, welche △△ dieselbe Höhe ϱ' und die Grundlinien b, c und a haben, also einem △ gleich sein müssen, dessen Grundlinie $(b+c-a)$, und dessen Höhe ϱ' ist. Verwandelt man also △ ABC = f^2 in ein anderes mit der Höhe ϱ', so ergiebt sich die Grundlinie = $(b+c-a)$ oder 2AE. Nun ist aber ES′ = a nach 373 gegeben, folglich AS′, und mittelst ϱ' auch α bekannt, so daß nach der, mittelst AE möglichen Feststellung des ⊙ um W, durch 318 die Zeichnung des verlangten △ ABC beendigt werden kann.

Anmerkung. Aus der Analysis der vorstehenden Aufgabe ergiebt sich das

Datum: wenn 2 von den 3 Stücken f^2, ϱ', $(b+c-a)$ gegeben sind, ist auch das dritte bestimmt.

1542. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus f^2, $(b+c)$, ϱ'.

Analysis. Durch f^2 und ϱ' bestimmt sich wie in 1541 $EA + AD = (b+c-a)$. Zieht man diese Länge von $b+c$ ab, so ergiebt sich $CD + BE = a$, womit die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt ist.

1543. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus f^2, ϱ', β.

Analysis. Durch ϱ' und β bestimmt sich nach 336 BG, und durch ϱ' und f^2 nach 1541 AD, welches Datum zu benutzen versucht werden muß. Da nun $DQ = FQ'$ ist, so läßt sich vermuthen, daß $DA = BQ'$, und $AQ = BF$ sein wird. Dies findet sich aber auch bestätigt, da nach 373 $DA + AQ = AI + IB$ ist, folglich, wenn man $AQ = AI$ von beiden Summen fortnimmt, $DA = BI = BQ'$ übrig bleibt. Es ist daher GQ', und damit auch der ⊙ um O mittelst der Lage von BM gegeben, so daß man, nach der Zeichnung desselben, nur die gemeinschaftliche Tangente SQ nach 318 zu konstruiren hat, um das verlangte △ ABC zu erhalten.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich,

1) daß in jedem △ die Entfernung des Berührungspunkts Q' eines ⊙ am △ von dem Endpunkt B derjenigen △seite, welche diesen ⊙ geradezu tangirt, eben so groß ist, als der Abstand des zweiten Endpunkts A derselben △seite von einem Berührungspunkt D des Kreises im △.

2) daß in jedem △ der von einer ∠spitze B und dem Berührungspunkt I eines ⊙ am △ begrenzte Abschnitt einer Seite mit demjenigen Abschnitt derselben Seite gleiche Größe hat, welcher in dem zweiten Endpunkt A dieser Seite und in dem Berührungspunkt E des ⊙ im △ endigt.

1544. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus f^2, ϱ', b.

Analysis. Der Versuch ϱ' und b verbunden zu betrachten wird auf dem in 1418 dargestellten Wege $GQ' = AC = b$ ergeben. Durch f^2 und ϱ' ist AD nach 1541 bekannt. Diese Linie mit $Q'G$ in Verbindung gesetzt zeigt wie in 1543 $AD = BQ'$, also $GB = GQ' - BQ' = b - AD$ gegeben. Durch GB und ϱ' ist aber die Lage von AS', und mittelst dieser und BQ' der $\odot$ um O bekannt, folglich bestimmt sich schließlich das verlangte $\triangle$ ABC, wenn man nach 318 die gemeinschaftliche Tangente SQ zeichnet.

1545. Fig. 249. Aufgabe. $\square$ aus f^2, e, $(a+b)$, $\angle$ D so zu konstruiren, daß sich ein $\odot$ beschreiben läßt, welcher b, c und die Verlängerungen von a und d berührt.

Analysis. Nach 1471 ist $a+b = d+c$, folglich läßt sich $\triangle$ CDA aus e, $\angle$ D und $(d+c)$ nach 642 zeichnen. Hiedurch ergiebt sich aber die Fläche des $\triangle ABC = f^2 - \triangle ACD$, so daß auch dieses $\triangle$ durch Hilfe von e und $(a+b)$ nach 1485 festgestellt werden kann, womit die Zeichnung des gesuchten $\square$ ABCD vollendet ist.

1546. Fig. 249. Aufgabe. $\square$ aus f^2, a, c, $\angle$ C so zu konstruiren, daß sich ein $\odot$ beschreiben läßt, welcher b, c und die Verlängerungen von a und d berührt.

Analysis. f^2 ist $= \triangle ABM + \triangle ADM - \triangle MBC - \triangle MDC$, welche $\triangle\triangle$ dieselbe Höhe ϱ, und die Grundlinien a, d, b, c haben, also einem $\triangle$ gleich sein müssen, dessen Grundlinie $a + d - b - c$ und dessen Höhe ϱ ist. Nun muß aber nach 1471 $a+b = d+c$, und deshalb auch $a - c = d - b$ sein, folglich ergiebt sich $f^2 = \varrho(a-c)$, und hiedurch ϱ nach 185. Stellt man daher den $\odot$ mit ϱ im $\angle$ C nach 336 fest, und bestimmt $CD = c$, so erhält man die Lage von d, während die Lage von b gegeben ist, so daß man schließlich zwischen beide Lagen die Seite a, mittelst der in 1477 entwickelten Hilfsaufgabe, zu legen hat, um die Zeichnung des gesuchten $\square$ ABCD zu vollenden.

1547. Fig. 249. **Aufgabe.** $\square$ aus f^2, a, $\angle$ A, $\angle$ B so zu konstruiren, daß sich ein $\odot$ beschreiben läßt, welcher b, c und die Verlängerungen von a und d berührt.

Analysis. Legt man a und die $\angle$ A und B fest, so ergiebt sich nach 281 der $\odot$ um M. Durch ϱ und f^2 erhält man aber nach dem in 1546 entwickelten Gesetz (a — c), also auch c, da a gegeben ist, folglich hat man nur zur Feststellung der letzten Seite c des gesuchten $\square$ ABCD 375 anzuwenden.

1548. Fig. 248. **Aufgabe.** $\square$ aus a, c, $\angle(ee')$ und $\triangle$ DEC — $\triangle$ AEB $= f^2$ so zu konstruiren, daß sich ein $\odot$ beschreiben läßt, welcher e, e' und die Verlängerungen von a und c berührt.

Analysis. Nach dem in 1541 entwickelten Gesetz ist, wenn ϱ den Radius des $\odot$ um M bedeutet, $\triangle$ EDC $= \frac{1}{2}\varrho$(c + CE — DE), und $\triangle$ AEB $= \frac{1}{2}\varrho$(a + BE — AE), also $\triangle$ EDC — $\triangle$ AEB, oder f^2, einem $\triangle$ gleich, dessen Höhe ϱ und dessen Grundlinie c + CE — DE — a — BE + AE $=$ c — a + e — e' bildet. Nun ist aber nach dem in 1470 entwickelten Gesetz c — a $=$ e — e', folglich muß $f^2 = \varrho$(c — a) sein, und es läßt sich nach 185 ϱ bestimmen, wodurch die Aufgabe auf 1477 zurückgeführt ist.

4tes Kapitel.

Kreis-Aufgaben.

1549. **Aufgabe.** $\odot$ aus $K_{\mu\alpha}$, L_ε (Bezeichnung 938).

Analysis. Wie in 938 ergiebt sich ϱ, weshalb $\odot$ aus K_μ, L_ε, ϱ, 925, zu konstruiren ist.

1550. **Aufgabe.** $\odot$ aus $K_{\alpha\mu}$, K'_ε (Bezeichnung 938).

Analysis. Wie in 938 ergiebt sich ϱ, weshalb $\odot$ aus K_μ, K'_s, ϱ, 926, zu konstruiren ist.

1551. Aufgabe. $\odot$ aus $K_{\alpha\mu}$, L_β (Bezeichnung 938).

Analysis. Wie in 938 ergiebt sich ϱ, weshalb $\odot$ aus K_μ, L_β, ϱ, 934, zu konstruiren ist.

1552. Aufgabe. $\odot$ aus $K_{\alpha\mu}$, K'_β (Bezeichnung 938).

Analysis. Wie in 938 ergiebt sich ϱ, weshalb $\odot$ aus K_μ, K'_β, ϱ, 935, zu konstruiren ist.

1553. Fig. 257. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, P.

Analysis. Errichtet man in H, der Mitte von s, einen $\perp$, so trifft dieser I, die Mitte von s', und bestimmt, insofern derselbe mittelst $L \neq L'$ gegeben ist, die gegenseitige Lage der Endpunkte E und F von s und s', weshalb durch 73 $\mu F = \varrho$, und ein Ort $L'' \neq L$ für μ bestimmt werden kann, den man schließlich zur Feststellung dieses Punkts mit dem erhaltenen Radius ϱ von P aus zu schneiden hat.

Zusatz. Es ergeben sich 2 gleiche Resultate.

1554. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, L''.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 79.

1555. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, K.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 307.

1556. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, $L''_{s''}$.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 908.

1557. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, $K_{s''}$.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 911.

1558. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, L_α.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 927.

1559. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, K_α. (Bezeichnung 928.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 928.

1560. Aufgabe. $\odot$ aus $L_s \neq L'_{s'}$, P_b.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 941.

1561. Aufgabe. ⊙ aus $L_a \nparallel L'_{a'}$, K_b.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1553 mit Hilfe von 948.

1562. Fig. 258. u. Fig. 258. a. **Aufgabe.** ⊙ aus K, L_μ, P in L.

Analysis. Berühr. v. A. Zieht man $M\mu$ und PD durch den Berührungspunkt B, so ergiebt sich (wegen = Wechsel ∠) MD ∦ L, weshalb die Punkte D und B, und daher auch μ festgestellt werden können.

Berühr. v. J. Es paßt dieselbe Analysis, wenn man statt Wechsel∠ Gegen∠ liest, aber für Fig. 258. a.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

Determination. Liegt P im Durchschnittspunkt einer von den beiden ⊥ zu L an K gezogenen Tangenten, so ist die Aufgabe überhaupt unmöglich. Ist P in L zwischen diesen beiden Durchschnittspunkten gegeben, so ist nur eine doppelte Berührung von Außen möglich. Befindet sich aber P in L, außerhalb der zwischen jenen Durchschnittspunkten bestimmten Linie, so ist sowohl eine Berührung v. A. als eine Berührung v. J. möglich.

Anmerkung. Die vorstehende Aufgabe reduzirt sich eigentlich auf △ MPμ aus $a = MP$, $(b - c) = r$, $\beta =$ ∠ MPμ, oder △ aus a, (b — c), γ, weshalb sich für dieselbe leicht eine zweite Analysis bilden ließe.

1563. Fig. 259. und 259. a. **Aufgabe.** ⊙ aus L_a, K, P in K.

Analysis. Ber. v. A. Fällt man aus μ einen ⊥ auf L, und verlängert denselben bis F, so ergiebt sich ∠ $DF\mu = \frac{\alpha}{2}$, und deshalb ∠ $D\mu F = 2R - \alpha$. Zieht man nun DG durch P, so bestimmt sich MG ∦ Dμ, also auch, wenn man IH ⊥ L durch M zieht, ∠ $IMG = 2R - \alpha$ (∦ Schenkel), und ∠ $GMH = \alpha$. Folglich läßt sich der Punkt G, und schließlich auch μ bestimmen.

Auflösung. Fälle aus M einen ⊥ auf L, zeichne ∠ $HMG = \alpha$, ziehe durch P aus G und M gerade Linien,

und lege durch D eine ∥ zu MG, so ergiebt sich die gesuchte Kreislinie, wenn man einen ⊙ um μ mit $P\mu$ zeichnet.

Ber. v. J. Die vorstehende Analysis und Auflösung paßt auch für diesen Fall, wenn man statt $\angle$ HMG $= \alpha$, $\angle$ HMG $= 2R - \alpha$ liest, und die Fig. 259. a benutzt.

1564. Aufgabe. ⊙ aus L_a, K, P in L.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1563, nur daß hier der Berührungspunkt zuletzt bestimmt werden muß.

1565. Fig. 260. Aufgabe. ⊙ aus P_b, L, P′ in L. (359)

Analysis 1). Denkt man sich um P mit b einen ⊙ beschrieben, so wird derselbe von dem gesuchten recht $\angle$ durchschnitten, weshalb sich durch P_b und P′ nach 363 ein Ort für μ bestimmen läßt. Den zweiten giebt der in P′ auf L errichtete $\perp$.

Analysis 2) Schneidet man $\mu D = \mu P$ ab, so bestimmt sich $\triangle \mu BP \cong \triangle \mu DP'$, also $P'D = b$, wonach sich D, und folglich auch μ, wenn man $\triangle DP\mu$ benutzt, nach 72 in dem in P′ auf L errichteten $\perp$ feststellen läßt.

1566. Fig. 260. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K, P′ in K. (359)

Analysis. Zieht man in P′ eine Tangente an K, so ergiebt sich die Aufgabe 1565 zu lösen.

1567. Aufgabe. ⊙ aus P′, P″, P_b. (359)

Analysis. P′ und P″ bestimmen nach 72 einen Ort für μ, P′ oder P″ und P_b nach 363 den zweiten.

Anmerkung. Eine bessere Analysis erhält man durch den Tangentensatz.

1568. Aufgabe. ⊙ aus P, $P'_{b'}$, $P''_{b''}$. (359)

Analysis. P und $P'_{b'}$ bestimmen den einen, P und $P''_{b''}$ den zweiten Ort für μ nach 363.

Anmerkung. Wie in 1567.

1569. Aufgabe. ⊙ aus K_d, L, P in L.

Analysis. K_d und P bestimmen nach 366 einen Ort für μ. Den zweiten bildet der in P auf L errichtete $\perp$.

Anmerkung. Eine beſſere Analyſis erhält man durch den Sehnenſatz.

1570. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K′, P in K′.

Analyſis. Zieht man an K′ in P eine Berührungslinie, ſo erhält man 1569 zu löſen.

Anmerkung. Wie in 1569.

1571. Aufgabe. P, P′, K_d. (Vergl. 1209).

Analyſis. K_d und P beſtimmen nach 366 einen Ort für μ. Der zweite ergiebt ſich durch PP′ nach 72.

1572. Aufgabe. P, K_d, $K'_{d'}$. (Vergl. 1211.)

Analyſis. K_d und P beſtimmen nach 366 den einen, und $K'_{d'}$ und P, gleichfalls nach 366, den zweiten Ort für μ.

1572. a. Aufgabe. ⊙ aus P′, P″, K_d. (Vergl. 1227).

Analyſis. P_b und P′ beſtimmen nach 363 den einen, P″ und K_d nach 366 den zweiten Ort für μ.

1572. b. Aufgabe. ⊙ aus P, P′, K^d. (Bezeichnung 955. a.)

Analyſis. P und K^d beſtimmen nach 369. a. den einen, P und P′ nach 72 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet μP.

Zuſatz. Es ſind zwei Reſultate möglich.

1572. c. Aufgabe. ⊙ aus P, P'_b, K^d. (Bezeichnung 955. a.)

Analyſis. P und K^d beſtimmen nach 369. a. den einen, P und P'_b nach 363 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet μP.

Zuſatz. Wie in 1572. b.

1572. d. Aufgabe. ⊙ aus P, K_d, $K'^{d'}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analyſis. P und $K'^{d'}$ beſtimmen nach 369. a. den einen, und P und K_d nach 366 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet μP.

Zuſatz. Wie in 1572. b.

1573. Fig. 261. und 261. a. **Aufgabe.** ⊙ aus K_b, L, P in L. (360)

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu BB′ oder b, und beschreibt einen dieselbe berührenden konzentrischen ⊙ um μ, so ergiebt sich $PP' \perp L$, und $= B'B'' = r$, weshalb eine P′ durchlaufende Linie $L' \mp L$ gegeben ist, und sich die Aufgabe auf 1565 reduzirt.

1574. Fig. 262. **Aufgabe.** Gegeben K, L, P in L; man soll einen ⊙ zeichnen, welcher L in P berührt, und K so durchschneidet, daß zwei aus M und μ nach einem Durchschnittspunkt D gezogene Linien einen $\angle \alpha$ einschließen.

Analysis 1). Sucht man den gegebenen Radius r, und α mit P verbunden zu betrachten, und zeichnet deshalb $\angle \mu PE = \alpha$, $PE = r$, so ergiebt sich ME, und, wenn man F, die Mitte dieser Linie, mit μ verbindet, $\triangle MD\mu F \cong \triangle P\mu FE$, also $\angle MF\mu = \angle EF\mu$, und es läßt sich deshalb ein Ort für μ bestimmen. Den zweiten Ort giebt der in P auf L errichtete $\perp$.

Analysis 2.) Errichtet man in D einen $\perp$ auf $D\mu$, so ergiebt sich $\angle MDB = \alpha - R$ oder $= R - \alpha$, also auch der aus M auf DB gefällte $\perp$ und BD, welche Linie sowohl den um M durch MB gegebenen ⊙ als den gesuchten berührt. Hiedurch reduzirt sich aber die Aufgabe auf 1573.

1575. **Aufgabe.** K_b, K′, P in K′. (360)

Analysis. Legt man in P an K′ eine Berührungslinie, so ergiebt sich 1573 zu konstruiren.

1576. Fig. 262. **Aufgabe.** Gegeben K, K,′ P in K′; man soll einen ⊙ zeichnen, welcher K′ in P berührt, und K so durchschneidet, daß zwei aus M und μ nach einem Durchschnittspunkt D gezogene Linien den $\angle \alpha$ einschließen.

Analysis. Legt man an K′ in P eine Berührungslinie, so erhält man 1574 zu lösen.

1577. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K_d. (359.)

Analysis. K_d und P_b bestimmen nach 368 den einen, und K_d und $P'_{b'}$, gleichfalls nach 368, den zweiten Ort für μ; der Radius des gesuchten ⊙ ergiebt sich aber als Kathete des von μP und b bestimmten △.

Anmerkung. Nach 2087 läßt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', P'' reduziren. Eine 3te Auflösung ergiebt sich, wenn man mit b und b' ⊙⊙ um P und P' zeichnet, einen dritten die letzteren beiden ⊙⊙ beliebig schneidenden ⊙ konstruirt, die entstandenen gemeinschaftlichen Sehnen verlängert, u. s. w., siehe die Anmerkung von 362, und 368.

1578. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, $K'_{d'}$. (359).

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 1577.

Anmerkung. Wie in 1577.

1578. a. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K^d. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. P_b und K^d bestimmen nach 369. b. den einen, und P_b und $P'_{b'}$ nach 362 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet die Tangente, welche aus μ nach dem um P mit b gezeichneten ⊙ führt.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1578. b. Aufgabe. ⊙ aus K^d, $K'_{d'}$, $K''_{d''}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. K^d und $K'_{d'}$ bestimmen nach 369. d den einen, und $K'_{d'}$ und $K''_{d''}$ nach 367 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet der von μ bis K reichende ⊥ auf μM.

Zusatz. Wie in 1578. a.

1578. c. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K^d, $K'_{d'}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. P_b und K^d bestimmen nach 369. b den einen, und K^d mit $K'_{d'}$ nach 369. d. den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet die Tangente, welche aus μ nach dem um P mit b gezeichneten ⊙ führt.

Zusatz. Wie in 1578. a.

1573. Fig. 261. und 261. a. **Aufgabe.** ⊙ aus K_b, L, P in L. (360)

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ zu BB′ oder b, und beschreibt einen dieselbe berührenden konzentrischen ⊙ um μ, so ergiebt sich $PP' \perp L$, und $= B'B'' = r$, weshalb eine P′ durchlaufende Linie $L' \mp L$ gegeben ist, und sich die Aufgabe auf 1565 reduzirt.

1574. Fig. 262. **Aufgabe.** Gegeben K, L, P in L; man soll einen ⊙ zeichnen, welcher L in P berührt, und K so durchschneidet, daß zwei aus M und μ nach einem Durchschnittspunkt D gezogene Linien einen $\angle \alpha$ einschließen.

Analysis 1). Sucht man den gegebenen Radius r, und α mit P verbunden zu betrachten, und zeichnet deshalb $\angle \mu PE = \alpha$, $PE = r$, so ergiebt sich ME, und, wenn man F, die Mitte dieser Linie, mit μ verbindet, $\triangle MD\mu F \cong \triangle P\mu FE$, also $\angle MF\mu = \angle EF\mu$, und es läßt sich deshalb ein Ort für μ bestimmen. Den zweiten Ort giebt der in P auf L errichte $\perp$.

Analysis 2.) Errichtet man in D einen $\perp$ auf $D\mu$, so ergiebt sich $\angle MDB = \alpha - R$ oder $= R - \alpha$, also auch der aus M auf DB gefällte $\perp$ und BD, welche Linie sowohl den um M durch MB gegebenen ⊙ als den gesuchten berührt. Hiedurch reduzirt sich aber die Aufgabe auf 1573.

1575. **Aufgabe.** K_b, K′, P in K′. (360)

Analysis. Legt man in P an K′ eine Berührungslinie, so ergiebt sich 1573 zu konstruiren.

1576. Fig. 262. **Aufgabe.** Gegeben K, K′ P in K′; man soll einen ⊙ zeichnen, welcher K′ in P berührt, und K so durchschneidet, daß zwei aus M und μ nach einem Durchschnittspunkt D gezogene Linien den $\angle \alpha$ einschließen.

Analysis. Legt man an K′ in P eine Ber[illegible], so erhält man 1574 zu lösen.

1577. Aufgabe. ⊙ **aus** P_b, $P'_{b'}$, K_d. (359.)

Analysis. K_d und P_b bestimmen nach 368 den einen, und K_d und $P'_{b'}$, gleichfalls nach 368, den zweiten Ort für μ; der Radius des gesuchten ⊙ ergiebt sich aber als Kathete des von μP und b bestimmten △.

Anmerkung. Nach 2087 läßt sich die Aufgabe auf ⊙ **aus** P, P′, P″ reduziren. Eine 3te Auflösung ergiebt sich, wenn man mit b und b′ ⊙⊙ um P und P′ zeichnet, einen dritten die letzteren beiden ⊙⊙ beliebig schneidenden ⊙ konstruirt, die entstandenen gemeinschaftlichen Sehnen verlängert, u. s. w., siehe die Anmerkung von 362, und 368.

1578. Aufgabe. ⊙ **aus** P_b, K_d, $K'_{d'}$. (359).

Analysis. Ergiebt sich ähnlich wie in 1577.

Anmerkung. Wie in 1577.

1578. a. Aufgabe. ⊙ **aus** P_b, $P'_{b'}$, K^d. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. P_b und K^d bestimmen nach 369. b. den einen, und P_b und $P'_{b'}$ nach 362 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet die Tangente, welche aus μ nach dem um P mit b gezeichneten ⊙ führt.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1578. b. Aufgabe. ⊙ **aus** K^d, $K'_{d'}$, $K''_{d''}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. K^d und $K'_{d'}$ bestimmen nach 369. d den einen, und $K'_{d'}$ und $K''_{d''}$ nach 367 den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet der von μ bis K reichende ⊥ auf μM.

Zusatz. Wie in 1578. a.

1578. c. Aufgabe. ⊙ **aus** P_b, K^d, $K'_{d'}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. P_b und K^d bestimmen nach 369. b den einen, und K^d mit $K'_{d'}$ nach 369. d. den zweiten Ort für μ. Den Radius bildet die Tangente, welche aus μ nach dem um P mit b gezeichneten ⊙ führt.

Zusatz. Wie in 1578. a.

1579. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, $P''_{b''}$ oder: gegeben K, K′, K″; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß die aus demselben nach K, K′, K″ führenden 6 Berührungslinien gleiche Länge erhalten. (359.)

Analysis. P_b und $P'_{b'}$ bestimmen nach 362 den einen, und P_b und $P''_{b''}$, gleichfalls nach 362, den zweiten Ort für μ; der Radius des gesuchten ⊙ ergiebt sich aber als Kathete des von μP und b bestimmten △.

Anmerkung 1.) Nach 2083 läßt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P′, P″ reduziren; am besten ist aber die folgende Auflösung. Beschreibe um P, P′, P″ ⊙⊙ mit b, b′, b″; zeichne eine beliebige diese 3 ⊙⊙ schneidende Kreislinie, verlängere die enstandenen gemeinschaftlichen Sehnen, und fälle aus zwei von den 3 hiedurch bestimmten Durchschnittspunkten einen ⊥ auf diejenige Centrale, deren Kreislinien von den Sekanten dieses Durchschnittspunkts getroffen werden, so ist der Mittelpunkt μ des gesuchten ⊙ bestimmt. Der Halbmesser ergiebt sich endlich, wenn man aus dem zuletzt genannten Punkt μ eine Tangente an einen von den um P, P′, P″ gezeichneten ⊙⊙ legt.

Beweis. Folgt aus der Anmerkung von 362.

Anmerkung 2). Schneiden sich alle drei um P, P′, P″ mit b, b′, b″ gezeichneten ⊙⊙, so schneiden sich auch die drei bestimmten gemeinschaftlichen Sehnen in einem Punkt. Derselbe müßte auch durch die Konstruktion von Anmerkung 1) hervorgehen, ersetzt also den Mittelpunkt μ. In die Stelle eines von jenen drei ⊙⊙ ⊥ durchschnittenen ⊙, läßt sich nur eine von jedem derselben halbirte Kreislinie zeichnen, siehe 1904. d.

1580. Aufgabe. ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, $K''_{d''}$.

Analysis. K_d und $K'_{d'}$ bestimmen nach 367 den einen und K_d und $K''_{d''}$, gleichfalls nach 367, den zweiten Ort für μ; der Radius des gesuchten ⊙ ergiebt sich aber als Kathete des von $M\mu$ und r bestimmten △.

Anmerkung. Nach 2085 läßt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P′, P″ reduziren. Am besten wird die Auflösung, wenn man nach der Anmerkung von 367 einen K, K′, K″ beliebig schneidenden ⊙ zeichnet, die entstandenen gemeinschaftlichen Sehnen verlängert u. s. w.

1581. Fig. 236. Aufgabe. Um die drei Winkelspitzen eines festliegend gegebenen △ 3 sich berührende ⊙⊙ so zu konstruiren, daß zwei dieser ⊙⊙ vom dritten umschlossen werden. (Vergl. 986.)

Analysis. Man denke sich den umschließenden ⊙ um A, und die umschlossenen um B und C beschrieben. Nach 301. 1) müssen die Berührungspunkte in die Seiten fallen, weshalb die in denselben errichteten ⊥⊥ GM, SM und S′M gemeinschaftliche Tangenten bilden. Verbindet man nun den Durchschnittspunkt M zweier von diesen ⊥⊥ SM und S′M mit einer ∠spitze A, so ist α, wie sich leicht ergiebt, halbirt. Dasselbe zeigt sich durch Wiederholung bei einer 2ten ∠spitze C, in Beziehung auf die ⊥⊥ GM und SM, also treffen die drei Berührungslinien in einem gegebenen Punkte, nämlich dem Mittelpunkte eines ⊙ am △, zusammen. Aus diesem lassen sich nun die Berührungspunkte in den Seiten, und mittelst derselben die geforderten ⊙⊙, mit den Radien AS, CS, BS′, ableiten.

Zusatz. Es ergeben sich dreimal, drei der Aufgabe genügende ⊙⊙, da sich 3 Mittelpunkte von ⊙⊙ am △: M, N und O feststellen lassen. Faßt man also die Aufgabe ganz allgemein mit 986 zusammen, so zeigen sich 4mal drei ⊙⊙, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.

1582. Fig. 264. u. 264. a. Aufgabe. Gegeben L, L′, L″; man soll drei sich gegenseitig berührende ⊙⊙ mit den Radien ϱ, ϱ', ϱ'' so verzeichnen, daß ein Mittelpunkt μ in L, der zweite μ' in L′, der dritte μ'' in L″ fällt.

Analysis. Nach 301. 1) müssen bei der Berühr. v. A. die Seiten des $\triangle \mu\mu'\mu''$ $\varrho+\varrho'$, $\varrho'+\varrho''$, $\varrho''+\varrho$, und, wenn ein $\odot$ die beiden übrigen umschließt, $\varrho-\varrho'$, $\varrho'+\varrho''$ und $\varrho-\varrho''$ sein, weshalb man nur das gegebene $\triangle \mu\mu'\mu''$ in das von L, L', L'' bestimmte Dreieck einzuschreiben hat, welche Aufgabe nach Anmerkung 1391 oder nach 1989, Fall 2., gelöst werden kann.

1583. Fig. 263. **Aufgabe.** In gleicher Entfernung vom Scheitel M eines festliegenden $\angle$ sind 2 Punkte P und P' gegeben; man soll zwei $\odot\odot$ mit einer vorgeschriebenen Summe der Radien $(\varrho+\varrho')$ beschreiben, welche die Schenkel, der eine in P, der zweite in P', und sich untereinander v. A. berühren.

Analysis. Da $PM = P'M$ ist, und die $\odot\odot$ sich in B berühren, läßt sich vermuthen, daß BM die gemeinschaftliche Berührungslinie bildet. Schneidet man, um dies zu untersuchen, $P'E = P\mu$, $PF = P'\mu'$ ab, wodurch man $EM = \mu M$, und $FM = \mu' M$ erhält, so findet sich $\triangle M\mu' E \cong \triangle M\mu\mu' \cong \triangle M\mu F$ (drei $=$ Seiten), woraus $\angle B\mu' M = \angle P'\mu' M$, und $\angle B\mu M = \angle P\mu M$, also auch $\triangle B\mu' M \cong \triangle P'\mu' M$, und $\triangle B\mu M \cong \triangle P\mu M$ (2 Seiten und die eingeschlossenen $\measuredangle =$) hervorgeht, folglich $\angle \mu BM = \mu PM = R$, und demnach BM wirklich eine gemeinschaftliche Berührungslinie, und $=$ PM und P'M sein muß. Hieraus ergiebt sich ferner, wenn man um M mit MP einen $\odot$ beschreibt, daß die $=(\varrho+\varrho')$ gegebene Centrale eine Berührungslinie zu demselben bildet, während sie in den der Lage nach gegebenen $\perp\!\!\!\perp$ PG und P'G endigt, weshalb, da auch der $\odot$ um M bekannt ist, nur die Aufgabe 375 gelöst werden darf, um die gesuchten Mittelpunkte μ und μ' zu erhalten.

1584. Fig. 264. und Fig. 264. a. **Aufgabe.** Es ist das festliegende $\triangle ABC$ gegeben; man soll in dasselbe drei sich gegenseitig berührende $\odot\odot$

mit den Radien ϱ, ϱ', ϱ'' so beschreiben, daß der ⊙ mit ϱ die Seite a, der ⊙ mit ϱ' die Seite b, und der ⊙ mit ϱ'' die Seite c tangirt.

Analysis. Verbindet man die Mittelpunkte mit den Berührungspunkten in a, b, c, so bestimmen die erhaltenen $\perp\perp$ ϱ, ϱ', ϱ'' nach 79 die Lage der Linien L, L', L'', weshalb zur Lösung dieser Aufgabe 1582 zu verzeichnen ist.

5tes Kapitel.

Gemischte Aufgaben.

1585. Aufgabe. Gegeben K und K'; man soll eine Linie a mit bestimmter → zwischen K und K' legen.

I. MM' ist $> r + r'$.

Fig. 265. 1) a soll $\neq$ MM' fallen.

Analysis. Siehe g. Betr. §. 20.

Erster Fall. a ist $<$ MM'.

Auflösung. Bestimme M'G $=$ a, zeichne um G eine Kreislinie mit r', und lege durch A und B eine $\neq$ zu MM', so bildet AC oder BD die verlangte Linie a.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn MM' $-$ a $> r + r'$, oder $<$ als $r - r'$ ist.

Zweiter Fall. a ist $=$ MM'.

Ist nur möglich, wenn $r = r'$ ist. Dann genügt aber jede von K nach K' zu MM' $\neq$ gezogene Linie, und es wird allein die MM' $\neq$ Berührungslinie ganz außerhalb beider ⊙⊙ fallen. (Die Aufgabe geht also in diesem Falle in eine unbeschränkt unbestimmte über.).

Dritter Fall. a ist $>$ MM'.

Auflösung. Ergiebt sich wie im ersten Fall, und bildet ebenfalls 2 Resultate, welche aber nicht ganz außerhalb beider ⊙⊙ fallen.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn $a - MM' > r + r'$ oder $< r - r'$ ist.

Anmerkung. Die vorstehenden 3 Fälle enthalten die Konstruktion eines □ aus a, b, c, d.

1586. Fig. 266. 2) a soll nicht ≠ MM' fallen.

Analysis. Zieht man AG ≠ CM', und M'G ≠ AC, so zeigt sich M'G der Lage und Länge nach gegeben, und AG = r', weshalb eine, um den vorher bestimmten Punkt G beschriebene Kreislinie mit r' den Punkt A feststellt, durch welchen man schließlich eine ≠ AG zu GM' zu legen hat.

In der Auflösung lassen sich 3 Fälle wie in 1) unterscheiden, welche hier aber keine wesentliche Verschiedenheit ergeben.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

Anmerkung. Die vorstehende Abtheilung 2) enthält die Konstruktion eines ⏢ aus a = a, b = r', c = MM', d = r, $(\angle A + \angle D) = \rightarrow$ a gegen Lage MM'.

1587. II. MM' ist = r + r' (K und K' berühren sich v. A.).

Stimmt mit I. in Rücksicht der Abtheilungen, Analysis ꝛc. überein.

III. MM' ist < r + r' und > r − r'. (Es schneiden sich also K und K').

Stimmt mit I. in Rücksicht der Abtheilungen ꝛc., Analysis ꝛc. überein, z. B. Abtheilung 2) a soll nicht ≠ MM' fallen.

Dritter Fall. a ist > MM'.

Auflösung. Fig. 267. Lege die bestimmte → durch M', bestimme M'G = a, beschreibe um G eine Kreislinie mit GA = r', und lege durch A zu GM' die ≠ AC, so ist die verlangte Linie gezeichnet.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

Anmerkung 1). Die vorstehende Abtheilung enthält 2 △ Konstruktionen:

erstens: △ MAM'C aus $a = MA = r$, $c = M'C = r'$, e oder $d = MM'$, e' oder $b = AC = a$, und $\angle(ee')$ oder $\angle(bd) = \rightarrow AC$ gegen MM', siehe Anmerk. 1) 1440.

zweitens: △ AHCI aus $e = AC = a$, $e' = HI$, $\angle A = \angle HAI$, $\angle C = \angle HCI$, $\angle(ee') = \rightarrow AC$ gegen HI, siehe 838, weshalb diese △ Aufgaben auch ohne Benutzung des 162 angeführten ▱ gelöst werden können.

Anmerkung 2). Eine andere Analysis ergiebt sich für die vorstehende Aufgabe durch Analogie zu 1448. Zieht man nämlich, Fig. 268., durch C und I $\fallingdotseq$ zu AI und AC, und ferner durch C und H $\fallingdotseq$ zu AH und AC, so bestimmen sich, da $\rightarrow a$ und a gegeben sind, die Punkte O und N, und $\angle OCN = \angle HAI$, weshalb mittelst des bekannten $\angle HAI$ (durch Sehne HI) nach 320 C festgestellt werden kann u. s. w. Diese Analysis enthält eigentlich auf eine versteckte Weise die Benutzung des 1440 angeführten Hilfs▱, und es ergiebt sich auch durch nähere Betrachtung, daß △ HICA aus $a = HI$, $c = AC$, $\angle(de') = \angle HAI$, $\angle(be) = \angle HCI$, und $(\angle B + \angle C)$ $(\rightarrow a)$, also dieselbe Aufgabe wie in 1440, durch die gegebene Auflösung konstruirt worden ist.

1588. IV. MM' ist $= r - r'$. (K und K' berühren sich v. J.)

Stimmt in den Abtheilungen, Analysis ꝛc. mit I. überein.

V. MM' ist $= 0$, d. h. es sind zwei konzentrische Kreislinien K und K' gegeben; man soll eine Linie a zwischen K und K' mit bestimmter $\rightarrow$ legen.

Fig. 269. Auflösung. Bestimme MG in der gegebenen $\rightarrow = a$, beschreibe um G einen ⊙ mit r', und lege durch den Schneidungspunkt A eine $\fallingdotseq AC$ zu GM, so bildet AC die verlangte Linie.

Zusatz. Es sind 4 Resultate möglich.

Determination. $r + r'$ bildet ein Maximum, und $r - r'$ ein Minimum für a.

1589. Fig. 270. Aufgabe. P und K sind auf derselben Seite einer Linie L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß PX und die von X nach K führende Tangente XB gleiche $\measuredangle$ mit L bilden.

Analysis. Verlängert man BX, und fällt aus P auf L einen $\perp$, so ergiebt sich PD = DE, also Punkt E, und mittelst der von E nach K führenden Tangente X in L.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

Anmerkung. Diese und die folgenden Aufgaben bilden Analogieen zu 765 bis 773, insofern nur $\odot\odot$ statt Punkte unter die Bedingungen aufgenommen sind.

1590. Fig. 270. a. Aufgabe. P und K sind auf verschiedenen Seiten einer Linie L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß XP und die von X nach K führende Tangente XB mit L gleiche $\measuredangle$ bilden.

Auflösung. Die von P nach K führenden Tangenten bestimmen 2 Punkte X und X′ in L, daß sich die gleichen $\measuredangle$ als Scheitel$\measuredangle$ ergeben. Es bestimmen sich aber noch 2 Punkte X″ und X‴ so in L, daß die gleichen $\measuredangle$ L zum gemeinschaftlichen Schenkel erhalten, wenn man analog 1589 den auf L gefällten $\perp$ PD um sich selbst bis E verlängert, und die beiden von E nach K führenden Tangenten bis L auszieht.

1591. Aufgabe. Gegeben P und K, und eine beliebige Menge von Linien L, L′, L″, L‴, L^{IV}.....; man soll X in L, X′ in L′, X″ in L″ u. s. w. so bestimmen, daß die gebrochene, als Tangente an K endigende Linie PXX′ X″ X‴ X^{IV}..... mit L, L′, L″, ... gleiche $\measuredangle$ bildet.

Auflösung. Ergiebt sich, wenn man von P ausgeht, ganz wie in 770, 771, 772; nur muß aus dem letzten, durch

Verlängerung eines Perpendikels um sich selbst bestimmten Punkte, eine Tangente an K gezogen werden.

1592. Fig. 42. **Aufgabe.** K und K′ sind auf derselben Seite einer Linie L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß zwei von X nach K und nach K′ führende Tangenten XB und XB′ mit L gleiche $\measuredangle$ bilden.

Analysis. In Rücksicht auf die 1589 angeführte Analysis wird man durch Analogie darauf geleitet, so wie dort, Fig. 270, P nach E verlegt wurde, hier, Fig. 42, die Kreislinie K, in gleichem Abstande von L, um M′ dergestalt zu verzeichnen, daß MM′ $\perp$ L steht, und dann zu den $\odot\odot$ um M und M′ eine gemeinschaftliche Tangente, statt der in jener Aufgabe von E nach K führenden Berührungslinie, zu ziehen. Die nähere Untersuchung dieser Konstruktion zeigt, daß sich wirklich hiedurch X ergiebt.

Auflösung. Fälle aus M einen $\perp$ MD auf L, verlängere MD um sich selbst bis M′, beschreibe um M′ einen $\odot$ mit r, und ziehe an denselben und K′ eine gemeinschaftliche Tangente BB′ nach 318, so ergiebt sich X in L.

Beweis. $\triangle$ MBXD ist $\cong \triangle$ M′DXB, also $\measuredangle$ BXD $=\measuredangle$ BXD $=\measuredangle$ B′XX′.

Zusatz. Es ergeben sich 4 Punkte in L, da man 4 gemeinschaftliche Tangenten an K und K′ legen kann.

1593. Fig. 271. **Aufgabe.** K und K′ sind auf verschiedenen Seiten einer Linie L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß zwei von X nach K und K′ führende Tangenten XB und XB′ mit L gleiche $\measuredangle$ bilden.

Auflösung. Die 4 gemeinschaftlichen Tangenten, welche an K und K′ nach 318 gezogen werden können, bestimmen 4 Punkte so in L, daß sich die gleichen $\measuredangle$ als Scheitel $\measuredangle$ ergeben. Außerdem erhält man aber noch 4 Punkte so in L, daß die gleichen $\measuredangle$ diese Linie zum gemeinschaftlichen Schenkel erhalten. Analysis, Auflösung und Beweis von

1592 passen wörtlich zur Bestimmung dieser Punkte, wenn man Fig. 271 benutzt, und 1590 statt 1589, Fig. 270. s. statt Fig. 270 liest.

1594. Fig. 272. **Aufgabe.** Gegeben K und K′ zwischen L und L′; man soll einen Punkt X in L, und einen Punkt X′ in L′ so bestimmen, daß sowohl XX′ und die von X′ nach K′ führende Tangente X′B′ mit L′, als auch X′X und die von X nach K führende Berührungslinie XB mit L gleiche ∢ bilden.

Die Analogie dieser Aufgabe mit 767 führt zu der folgenden

Auflösung. Verlängere den auf L gefällten ⊥ MD um sich selbst bis M, beschreibe um M einen ⊙ K mit r, bestimme in derselben Art durch K′ und L′ K′, und lege nach 318 eine gemeinschaftliche Tangente BB′ an K und K′, so bestimmen sich in L und L′ die gesuchten Punkte X und X′.

Beweis. Ergiebt sich ganz wie in 1592.

Zusatz. Wegen der 4 möglichen gemeinschaftlichen Tangenten ergeben sich 4 die Bedingungen erfüllenden Punkte in L, und eben so 4 in L′.

1595. Aufgabe. Gegeben K, K′ und eine beliebige Menge von Linien, L, L', L'', L''', L^{IV}.....; man soll X in L, X′ in L′, X″ in L″ u. s. w. so bestimmen, daß die gebrochene K und K′ in den Berührungspunkten B und B′ tangirende Linie $BXX'X''X'''X^{IV}$..... B′ mit L, L', L'', L''', L^{IV}.... gleiche ∢ bildet.

Auflösung. Fälle aus M einen ⊥ auf L, verlängere denselben um sich selbst bis M, beschreibe um M eine K gleiche Kreislinie K, bestimme in derselben Art in Bezug auf K und Lage L′ K′, in Bezug auf K′ und L″ K″, in Bezug auf K″ und L‴ K‴ u. so fort, bis man die letzte Linie, z. B. L^{VI}, benutzt hat. Hierauf ergiebt sich die übrige

Konstruktion folgendergestalt. Ziehe an K' und den zuletzt bestimmten ⊙ K^{VI} eine gemeinschaftliche Tangente $B'B^{VI}$ nach 318, so findet sich mittelst dieser Tangente X^{VI} in L^{VI}, ziehe aus X^{VI} eine Tangente an K^{V}, und bestimme hiedurch X^{V} in L^{V}, ziehe aus X^{V} eine Tangente an K^{IV}, und bestimme hiedurch X^{IV} in L^{IV}, stelle in denselben Art die Punkte X''', X'', X', X fest, und ziehe endlich aus X eine Tangente XB an K, so bildet $BXX'X''\ldots\ldots X^{V}X^{VI}B'$ die verlangte Linie.

Beweis. Folgt aus 1592 und 1593.

Zusatz. Es ergeben sich 4 die Aufgabe erfüllende gebrochene Linien, da in jeder Linie L, L' u. s. w. 4 Punkte X, X' &c. bestimmt werden können.

1596. Fig. 273. Aufgabe. △ aus α, β so in den Ring zweier konzentrischen Kreislinien K und K' einzuschreiben, daß eine ∠spitze X in K', die zweite Y in K, und die dritte auf einen in K' gegebenen Punkt P fällt.

Analysis. Durch $\angle PXY = \alpha$ ist die zugehörige Sehne PS bekannt. Da nun $\angle PYS = \alpha + \beta$ ist, ergiebt sich nach 320 ein Ort für Y; es läßt sich also dieser Punkt in K, und hiedurch das verlangte △ PXY bestimmen.

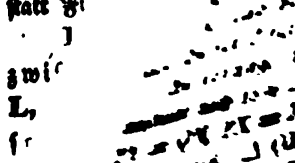
Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate PXY und PX'Y' möglich.

1597. Fig. 274. Aufgabe. △ aus α, β so in den Ring zweier konzentrischen Kreislinien K und K' einzuschreiben, daß eine ∠spitze X in K, die zweite Y in K', und die dritte auf einen in K gegebenen Punkt P fällt.

Analysis. Durch $\angle PXS = 2R - \alpha$ ist die zugehörige Sehne PS bekannt. Da nun $\angle PYS = 2R - (\alpha + \beta)$ sein muß, ergiebt sich nach 320 ein Ort für Y u. s. w.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

1598. Fig. 275. Aufgabe. △ aus α, β so in den Ring zweier konzentrischen Kreislinien K



1592 pas[illegible] zwei ∠ spitzen X und
man Fig[illegible] auf einen in K gegebe-
statt Fi[illegible]

[illegible] beliebigen Punkt Q in K',
zwi[illegible] QNO mit den ∠ α und β, bestimme
L, [illegible] so bildet PXY das verlangte △.
[illegible] △ MPY, also ist ∠ MNQ
[illegible] △ MPX, also ist ∠ MNO =
[illegible] folgt ∠ QNO = ∠ YPX, und daher
[illegible] PYX, weshalb sich in dem letzteren △ wirk-
[illegible] β befinden.

[illegible] Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

Bemerkung. Durch Benutzung der Aehnlichkeit er-
[illegible] der folgenden Analysis eine bessere Auf-
[illegible] vorhergehende Hilfskonstruktion des △ NQO.

Durch α und β ist die Gestalt des verlangten △ PXY
[illegible] 402, also auch das Verhältniß PY : PX bekannt. Wenn
[illegible] ∠ YPX = β, PY : PX, und der festliegende Punkt
P gegeben sind, so muß, da der Endpunkt X des einen Schen-
kels in einer festliegenden Kreislinie K' endigt, sich nach 586
ein Ort für den Endpunkt Y des anderen Schenkels bestimmen
lassen. Hiedurch ergiebt sich nun die Lage von Y, und damit
auch die Lage des gesuchten △ PXY.

1599. Fig. 32. Aufgabe. Gegeben K, K'; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß zwei aus demselben nach K und K' führende Berührungslinien XB und XB' den ∠ α einschließen, und XB = b wird.

Fall 1) Beide Tangenten treffen nicht die Centrale MM'.

Analysis. 1) BX = b, und BM bestimmen MX und ∠ B'XM = α — ∠ BXM; hiemit reduzirt sich aber die Aufgabe auf 659 a, da im ⏢ MM'B'X drei Linien, XM, MM', M'B', und 2 ∠ M'B'X, MXB' gegeben sind.

Fall 2) Beide Tangenten treffen die Centrale MM'.

Die Analysis des 1sten Falls paßt wörtlich, wenn man + statt —, und 660 statt 659 a. liest.

Fall 3) Nur Tangente b trifft die Centrale MM'.

Die Analysis des ersten Falls paßt wörtlich auch für diesen, wenn man + statt — liest.

Fall 4). Nur die unbestimmte Tangente trifft die Centrale MM'.

Die Analysis des 1sten Falls paßt wörtlich, wenn man 660 statt 659. a. liest.

Analysis 2)' Siehe g. Betr. §. 14.

1600. Fig. 276., 276. a. und 276. b. Aufgabe. Gegeben K, K'; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe beider aus demselben nach K und K' gezogenen Tangenten, d. h. XB + XB' = s, und der eingeschlossene ∠ bei X = α ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M und M' ∥ ∥ zu BX und B'X, und fällt aus dem Schneidungspunkt N auf die zuletzt genannten Linien die ⊥⊥ NG und NF, so ergiebt sich ▱ GXFN, durch GN = r, FN = r', ∠ X = α, und die rechten ∠ bei G und F, weshalb man GX und XF erhält, und folglich MN + M'N = BG + B'F = s — GX — XF Fig. 276., oder, Fig. 276. a., = s + GX + XF, oder, Fig. 276. b., = s + GX — XF bestimmen kann. Nun ist aber im △ MNM' auch ∠ MNM' = α, und MM' bekannt, also läßt sich dasselbe nach 642 konstruiren, und hierauf die Lage der gesuchten Tangenten ableiten.

1601. Fig. 276., 276. a. und 276. b. Aufgabe. Gegeben K, K'; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Differenz beider aus demselben nach K und K' gezogenen Tangenten, d. h. XB — XB' = d, und der eingeschlossene ∠ bei X = α ergiebt.

Analysis. Die Analysis zu 1600 paßt wörtlich auch für diese Aufgabe, wenn man dort überall d statt s ließ, MN

und XF durchgängig entgegengesetzte Vorzeichen giebt, und 643 statt 642 benützt.

1602. Fig. 277. und 277. a. **Aufgabe.** Gegeben K, K'; man soll einen ⊙ mit ϱ so feststellen, daß die gemeinschaftlichen Berührungslinien XB und XB' den $\angle \alpha$ einschließen, und sich $BX = b$ ergiebt.

Analysis. $\square XG\mu F$ ist durch ϱ und α bestimmt, also auch GX, und deshalb $GB = b \mp GX$ gegeben. Zieht man daher ≠≠ durch μ zu XB und XB', so ergeben sich zwei diese ≠≠ berührende ⊙⊙ K und K' durch Addition oder Subtraktion zwischen r und r' mit ϱ. Nun ist aber $B\mu = BG$, und $\angle B\mu B' = \alpha$ bekannt, also hat man 1599 zu lösen, u. s. w.

Anmerkung. Es mögen die Tangenten $M\mu$ und $M'\mu$ schneiden oder nicht, so können folgende 3 Lagen der Tangenten vorgeschrieben sein:

1) Beide Tangenten XB und XB' sollen die Centrale MM' durchschneiden.
2) Nur eine der beiden Tangenten soll die Centrale durchschneiden.
3) Beide Tangenten XB und XB' sollen die Centrale MM' nicht durchschneiden.

Die Analysis bleibt sich im Wesentlichen bei allen diesen Lagen gleich.

1603. Fig. 277. und 277. a. **Aufgabe.** Gegeben K, K'; man soll einen ⊙ mit ϱ so feststellen, daß die gemeinschaftlichen Berührungslinien XB und XB' den $\angle \alpha$ einschließen, und sich $XB + XB' = s$ ergiebt.

Analysis. $\square XG\mu F$ ist durch ϱ und α bestimmt, also auch $GX + XF$, und deshalb $GB + FB' = s \mp 2GX$ gegeben. Zieht man daher ≠≠ durch μ zu XB und XB', so bestimmen sich 2 diese ≠≠ berührende ⊙⊙ K und K' durch Addition oder Subtraktion zwischen r und r' mit ϱ.

Nun ist aber $\mathfrak{B}\mu + \mathfrak{B}'\mu = GB + FB'$, und $\angle\, \mathfrak{B}\mu\mathfrak{B}' = \alpha$ bekannt, also hat man 1600 zu verzeichnen, u. s. w.

Anmerkung. Wie in 1602.

1604. Fig. 277. und 277. a. Aufgabe. Gegeben K, K'; man soll einen $\odot$ mit ϱ so feststellen, daß die gemeinschaftlichen Berührungslinien XB und XB' den $\angle\, \alpha$ einschließen, und sich $XB - XB' = d$ ergiebt.

Analysis. Zieht man $\ddagger\ddagger$ durch μ zu XB und XB', so bestimmen sich 2 diese $\ddagger\ddagger$ berührende $\odot\odot$ K und K' durch Addition oder Subtraktion zwischen r und r' mit ϱ. Nun ist aber $\mathfrak{B}\mu - \mathfrak{B}'\mu = BG - B'F = d$ gegeben, da $XG = XF$ ist, und ferner $\angle\, \mathfrak{B}\mu\mathfrak{B}' = \alpha$ bestimmt, folglich hat man 1601 zu verzeichnen, u. s. w.

Anmerkung. Wie in 1602.

1605. Fig. 278. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß die Summe der Abstände dieses Punkts, als eine einzige gerade Linie genommen, von den zu XY aus P' und P'' unter $\angle\, \alpha$ und β geneigten Linien die Länge s erhält. ($\angle\, P'XY = \alpha$, $\angle\, P''YX = \beta$, $XY = s$).

Analysis. Durch Linie PP' und $\angle\, \alpha$ ist ein Ort für X, durch Linie PP'' und $\angle\, \beta$ ein Ort für Y nach 320 gegeben; man hat also 372 zu lösen.

Anmerkung. Diese und die folgenden Aufgaben bilden Erweiterungen zu 748 und 753 bis 758.

1606. Fig. 279. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß die Summe der Abstände dieses Punkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β aus P' und P'' gezogenen Linien, zwischen welche P nicht fallen soll, die Länge s erhält. ($\angle\, P'XY = \alpha$, $\angle\, P''YX = \beta$, $PY + PX = s$).

Analysis. Durch Linie PP′ und $2R - \alpha$ ist ein Ort für X, durch PP″ und β ein Ort für Y nach 320 gegeben, und es bestimmen sich hiedurch die Mittelpunkte O und O′. Fällt man aus denselben die $\perp\perp$ OD und O′D′ auf XY, so ergiebt sich $PD + PD' = \frac{s}{2}$; man hat also in Beziehung auf $\frac{s}{2}$ und die 3 Punkte P, O, O′ 754 zu konstruiren.

1607. Fig. 279. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß sich der Unterschied der Abstände dieses Punkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β durch P′ und P″ gezogenen Linien, zwischen welche P nicht fallen soll, $= d$ ergiebt. ($\angle P'XY = \alpha$, $\angle P''YX = \beta$, $XY = d$).

Analysis. Ergiebt sich wie in 1606; nur ist das zweitemal, — statt +, $\frac{d}{2}$ statt $\frac{s}{2}$, und 755 statt 754 zu lesen.

1608. Fig. 278. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß sich der Unterschied der Abstände dieses Punkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β durch P′ und P″ gezogenen Linien, zwischen welche P fallen soll, $= d$ ergiebt. ($\angle P'XY = \alpha$, $\angle P''YX = \beta$, $PX - PY = d$).

Analysis. Durch Linie PP′ und α ist ein Ort für X, durch PP″ und β ein Ort für Y nach 320 gegeben, und es bestimmen sich hiedurch die Mittelpunkte O und O′. Fällt man aus denselben die $\perp\perp$ OD und O′D′ auf XY, so ergiebt sich $PD - PD' = \frac{d}{2}$; man hat also in Beziehung auf $\frac{d}{2}$ und die 3 Punkte O, O′, P 756 zu konstruiren.

1609. Fig. 278. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß sich die Abstände dieses Punkts von den gegen

XY mit den Neigungen α und β durch P' und P'' gezogenen Linien gleich groß ergeben (PX = PY).

Analysis. Durch Linie PP' und α ist ein Ort für X, durch PP'' und β ein Ort für Y nach 320 gegeben; man hat also 338 zu konstruiren.

1610. Fig. 278. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß sich 2 aus P' und P'' unter den Neigungen α und β gegen XY gezogene Linien P'X und P''Y gleich groß ergeben.

Analysis. Durch PP' und α ist ein Ort für X, durch PP'' und β ein Ort für Y nach 320 gegeben. Zieht man durch P' und Y $\fallingdotseq$ zu P''Y und P''P', so ergiebt sich P'N = P''Y, und deshalb ein $\triangle$ P'XN. Da nun P''Y gegen P'X um $2R - (\alpha + \beta)$ geneigt ist, muß auch $\angle$ NP'X $= 2R - (\alpha + \beta)$, und daher $\angle$ P'XQ $= \frac{\alpha + \beta}{2}$, folglich die zugehörige Sehne P'Q gegeben sein. Zugleich kennt man aber noch $\angle$ P'NQ $= 2R - \frac{\alpha + \beta}{2}$, also läßt sich mittelst P'Q nach 320 ein Ort für N bestimmen, und es ist zur Feststellung dieses Punkts nur 1585 zu konstruiren, da NY = und $\fallingdotseq$ P'P'' gegeben ist. Zieht man schließlich P''Y $\fallingdotseq$ P'N, so ergiebt sich Y, und hiemit die verlangte Linie XPY.

1611. Fig. 280. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß sich die Summe der Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY durch P und P' mit den Neigungen α und β gezogenen Linien, als eine einzige Linie genommen, = s ergiebt. ($\angle$ PXY = α, $\angle$ P'YX = β, XY = s)

Analysis. Verlängert man PX und P'Y, zieht durch M eine $\fallingdotseq$ zu XY, und durch X und Y $\fallingdotseq$ $\fallingdotseq$ zu BM, so bestimmen sich mittelst der $\measuredangle$ E und D, oder α und β, und

der ∥ XF und YG, oder r, die Linien EF und GD, also auch ED = s ± EF ± GD, weshalb man in Beziehung auf diese Länge, M, P und P′ nur 1605 zu konstruiren, und schließlich 282 anzuwenden hat.

1612. Fig. 281. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die Summe der Abstände dieses Punkts (als eine einzige Linie genommen) von den gegen XY unter den Neigungen α und β gezogenen Linien, von denen eine P′ durchschneidet, die andere K berührt, die Länge s erhält. ($\angle$ P′XY = α, BYX = β, XY = s).

Analysis. Zieht man MH ⊥ XY, so bestimmt sich GY = MH durch △ MBH, welches mittelst r und β gegeben ist. Man erhält also XG = s ∓ GY, und hat deshalb 1605 zu konstruiren.

1613. Fig. 282. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die Summe der Abstände dieses Punkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β an K und K′ gezogenen Tangenten, als eine einzige Linie genommen, = s ergiebt. ($\angle$ BXY = α, $\angle$ B′YX = β, YX = s)

Analysis. Zieht man MH und M′H′ ⊥ YX, so bestimmen sich die △△ MBH und M′B′H′ mittelst r und α, r′ und β, also auch GX und G′Y, wodurch sich GG′ mittelst Addition oder Subtraktion dieser Linien mit s ergiebt, und die Aufgabe folglich durch 1605 gelöst werden kann.

1614. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe der Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β an K′ und K″ gezogenen Tangenten, als eine einzige Linie genommen, = s ergiebt.

Analysis. Legt man zu XY eine ∥ durch M, und verlängert nach derselben die an K′ und K″ liegenden Tangenten, so reduzirt sich die Aufgabe ganz wie in 1611 auf 1613.

1615. Fig. 283. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß sich die Summe der Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β durch P und P′ gezogenen Linien, zwischen welche der Berührungspunkt nicht fallen soll, $= s$ ergiebt. ($\angle PXY = \alpha$, $\angle P'YX = \beta$, $BY + BX = s$).

Analysis. Verlängert man PX und P′Y, und zieht ∥ ∥ durch M, X, Y zu XY und BM, so bestimmen sich die △△ XEF und YGD durch r, α und β, weshalb $MD + ME = s + GD - EF$ gegeben ist, und in Beziehung auf M P, P′, α, β, und $MD + ME$ 1606 zur Lösung der Aufgabe konstruirt werden muß.

1616. Fig. 281. Aufgabe. Gegeben $\mathfrak{P}$, P′, K; man soll eine Linie XY so durch $\mathfrak{P}$ legen, daß die Summe der Abstände dieses Punkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β gezogenen Linien, von denen eine P′ durchschneidet, die andere K berührt, zwischen welche aber $\mathfrak{P}$ nicht fallen soll, sich $= s$ ergiebt. ($\angle P'XY = \alpha$, $\angle BYX = \beta$, $\mathfrak{P}X + \mathfrak{P}Y = s$).

Analysis. Zieht man MH ∥ XY, so bestimmt sich $GY = MH$ durch △ MBH, welches mittelst r und β gegeben ist. Man erhält also $\mathfrak{P}X + \mathfrak{P}G = s \pm GY$, und hat deshalb 1606 zu konstruiren.

1617. Fig 282. Aufgabe. Gegeben $\mathfrak{P}$, K, K′; man soll eine Linie XY so durch $\mathfrak{P}$ legen, daß sich die Summe der Abstände dieses Punkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β an K und K′ gezogenen Tangenten, zwischen welche $\mathfrak{P}$

nicht fallen soll, = s ergiebt. ($\angle BXY = \alpha$, $\angle B'YX = \beta$, $\mathfrak{P}X + \mathfrak{P}Y = s$).

Analysis. Zieht man MH und M'H' $\perp$ XY, so bestimmen sich die $\triangle\triangle$ MBH und M'B'H' mittelst r und α, r' und β, also auch GX und G'Y, wodurch sich $\mathfrak{P}G + \mathfrak{P}G'$ durch Addition und Subtraktion jener Linien mit s ergiebt, und die Aufgabe folglich durch 1606 gelöst werden kann.

1618. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe der Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β an K' und K'' gezogenen Tangenten, zwischen welche der Berührungspunkt nicht fallen soll, = s ergiebt.

Analysis. Legt man durch M eine $\perp$ zu XY, und verlängert nach derselben die an K' und K'' liegenden Tangenten, so reduzirt sich die Aufgabe ganz wie in 1615 auf 1617.

1619. Fig. 283. Aufgabe. Wie 1615, nur ist der Unterschied d statt der Summe der Abstände s gegeben. ($\angle PXY = \alpha$, $\angle P'YX = \beta$, BY — BX = d).

Analysis. Ganz wie in 1615 ergiebt sich MD — ME = d + GD + EF, weshalb man zur Lösung der Aufgabe 1607 zu konstruiren hat.

1620. Fig. 281. Aufgabe. Wie 1616, nur ist der Unterschied d statt der Summe der Abstände s gegeben. ($\angle P'XY = \alpha$, $BYX = \beta$, $\mathfrak{P}X - \mathfrak{P}Y$ = d).

Analysis. Wie in 1616 ergiebt sich $\mathfrak{P}X - \mathfrak{P}G =$ d $\pm$ GY, weshalb die Aufgabe durch 1607 gelöst werden kann.

1621. Fig. 282. Aufgabe. Wie 1617, nur ist der Unterschied d statt der Summe der Abstände

s gegeben. ($\angle$ BXY $= \alpha$, B′YX $= \beta$, $\mathfrak{P}$X — $\mathfrak{P}$Y $=$ d)

Analysis. Die Analysis 1617 paßt wörtlich für diese Aufgabe, wenn man d statt s, — statt +, 1607 statt 1606 liest.

1622. Aufgabe. Wie 1618, nur ist der Unterschied d statt der Summe der Abstände s gegeben.

Analysis. Die Analysis 1618 paßt wörtlich für diese Aufgabe, wenn man 1619 statt 1615, und 1621 statt 1617 liest.

1623. Fig. 280. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß sich der Unterschied der Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY durch P und P′ mit den Neigungen α und β gezogenen Linien, zwischen welche der Berührungspunkt fallen soll, $=$ d ergiebt. ($\angle$ PXY $= \alpha$, $\angle$ P′YX $= \beta$, BX — BY $=$ d).

Analysis. Wie in 1611 ergeben sich die Linien GD und EF, also ME — MD $=$ d $+$ EF — GD, weshalb zur Auflösung der Aufgabe 1608 zu konstruiren ist.

1624. Fig. 281. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß der Unterschied der Abstände dieses Punkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β gezogenen Linien, von denen eine P′ durchläuft, die andere K berührt, und zwischen welche P fallen soll, sich $=$ d ergiebt. ($\angle$ P′XY $= \alpha$, $\angle$ BYX $= \beta$, PX — PY $=$ d).

Analysis. Wie in 1612 bestimmt sich PX — PG $=$ d $\pm$ GY, weshalb man 1608 zu konstruiren hat.

1625. Fig. 282. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich der Unterschied der Abstände dieses Punkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β an

K und K′ gezogenen Tangenten, zwischen welche P fallen soll, = d ergiebt. ($\angle BXY = \alpha$, $\angle B'YX = \beta$, $PX - PY = d$).

Analysis. Wie in 1613 ergiebt sich PG — PG′ mittelst Addition oder Subtraktion zwischen d und den mitgegebenen Stücken XG und YG′, weshalb die Aufgabe durch 1608 gelöst werden kann.

1626. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich der Unterschied der Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY unter den Neigungen α und β an K′ und K″ gezogenen Tangenten, zwischen welche der Berührungspunkt fallen soll, = d ergiebt.

Analysis. Legt man durch M eine ⊥ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe wie in 1623 auf 1625.

1627. Fig. 280. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß sich die Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β durch P′ und P″ gezogenen Linien gleich groß ergeben. ($\angle PXY = \alpha$, $\angle P'YX = \beta$, $BX = BY$).

Analysis. Wie in 1611 bestimmen sich die Linien EF und GD, also auch, da MF = MG ist, ME — MD = EF — GD. Hiemit ist aber die Aufgabe auf 1608 reduzirt.

1628. Fig. 281. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die Abstände dieses Punkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β gezogenen Linien, von denen eine P′ durchläuft, die andere K berührt, gleich groß ergeben. ($\angle P'XY = \alpha$, $\angle BYX = \beta$, $PX = PY$).

Analysis. Wie in 1612 ergiebt sich die Linie GY, also auch, da PX = PY ist, PX — PG = GY. Hiedurch ist die Aufgabe auf 1608 reduzirt.

1629. Fig. 282. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die Abstände dieses Punkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β an K und K' gezogenen Tangenten gleich groß ergeben. ($\angle$ BXY = α, $\angle$ B'YX = β, PX = PY).

Analysis. Wie in 1613 ergeben sich die Linien GX und G'Y; also auch, da PX = PY ist, PG' — PG = GX — G'Y, weshalb die Aufgabe durch 1608 gelöst werden kann.

1630. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Abstände des Berührungspunkts von den gegen XY mit den Neigungen α und β an K' und K'' gezogenen Tangenten gleich groß ergeben.

Analysis. Legt man durch M eine $\perp$ zu XY, so reduzirt sich die Aufgabe ganz wie in 1627 auf 1629.

1630. a. Fig. 417. und 417. a. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich der aus P' auf XY gefällte $\perp$ gleich der in XY liegenden Entfernung des Punktes P von dem zweiten aus P'' auf XY gefällten $\perp$ bestimmt. (P'X = PY)

Analysis. Legt man durch P und P' $\perp$ zu P'X und PX, so ergiebt sich PF = PY, also, wenn man PE $\perp$ PP'' errichtet, $\triangle$ PEF $\cong$ $\triangle$ PP''Y, da außerdem $\angle$ EPF = $\angle$ P''PY (gleiche Reste) sein muß. Es ist daher der $\perp$ PE = PP'' bekannt, und deshalb E und P'E, folglich auch die P'E $\perp$ Lage XY bestimmt.

1630. b. Fig. 418. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine P' P'' nicht schneidende Linie XY so

durch P legen, daß sich die Summe des aus P' auf XY gefällten ⊥ mit der in XY liegenden Entfernung des Punktes P von dem zweiten aus P'' auf XY gefällten ⊥ = s bestimmt. (P'X+PY=s).

Analysis. Nach 1630. a. wird man darauf geleitet $\mathfrak{P}\mathfrak{P} =$ und ⊥ PP'' zu errichten, und PE ∦ P''Y, $\mathfrak{P}$E ∦ XY zu legen. Hiedurch ergiebt sich △ $\mathfrak{P}$PE ≅ △ PP''Y (∠ $\mathfrak{P}$PE = ∠ P''PY), also PE, und die PE gleiche ∦ $\mathfrak{P}$Y' = PY, weshalb P'X + $\mathfrak{P}$Y' = s sein muß, folglich in Beziehung auf die Punkte P', P und $\mathfrak{P}$ 750 zu lösen ist.

1630. c. Fig. 419. Aufgabe. Wie 1630. b., nur soll XY P'P'' durchschneiden.

Analysis. Liest man in der Analysis von 1630. b. 749 statt 750, und benutzt die Fig. 419, so paßt dieselbe wörtlich auch für diese Aufgabe.

1630. d. Fig. 418. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine P'P'' nicht schneidende Linie XY so durch P legen, daß sich der Unterschied zwischen dem aus P' auf XY gefällten ⊥ und der in XY liegenden Entfernung des Punktes P von dem zweiten aus P'' auf XY gefällten ⊥ = d bestimmt. (P'X — PY = d).

Analysis. Liest man in der Analysis von 1630. b, — statt +, d statt s, 751 statt 750, so paßt dieselbe wörtlich auch für diese Aufgabe.

1630. e. Fig. 419. Aufgabe. Wie 1630. d, nur soll XY P'P'' durchschneiden.

Analysis. Liest man in der Analysis von 1630. b, — statt +, d statt s, 752 statt 750, so paßt dieselbe wörtlich auch für diese Aufgabe.

1630. f. Fig. 420. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die in XY liegende Entfernung dieses Punkts von einer durch P'' nach XY mit der Neigung β gezogenen Linie, oder PY, gleich der Länge einer

von P′ nach XY unter der Neigung α führenden Linie P′X bestimmt. (PY = P′X, $\angle$ X = α, $\angle$ Y = β.)

Analysis. Durch PP″ und $\angle$ β läßt sich nach 320 eine die Punkte P, P″ und Y durchlaufende Kreislinie zeichnen. Legt man durch P′ und Y $\nparallel\nparallel$ zu XY und XP′, so bestimmt sich $\angle$ PYE = 2R − α, also die Lage der Sehne PE, und ferner YD = P′X = PY, folglich $\angle$ PDE = $\frac{\alpha}{2}$, und $\angle$ P′DP ebenfalls = $\frac{\alpha}{2}$, weshalb sich mittelst PE, PP′ und diesen beiden $\measuredangle$ nach 320 2 Oerter für D, also auch dieser Punkt und die P′D $\nparallel$ Lage von XY bestimmen lassen.

1630. g. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll durch P eine Linie XY so legen, daß sich die $\perp$ XY an K gezogene Tangente gleich der in XY liegenden Entfernung des Punktes P von dem auf XY aus P′ gefällten $\perp$ ergiebt.

Analysis. Legt man durch M eine $\nparallel$ zu der Tangente, so reduzirt sich die Aufgabe für die Punkte P, M, P′ auf 1630. a.

1630. h. Fig. 421. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, K; man soll eine Tangente XY an K legen, deren $\perp$ Abstand von P der in XY liegenden Entfernung des Berührungspunkts von dem aus P′ auf XY gefällten $\perp$ gleich ist. (PX = BY).

Analysis. Legt man durch M und P $\nparallel\nparallel$ zu XY, PX und XY, und verlängert P′Y, so ergiebt sich DB = BY also DM − r = MF. Schneidet man daher DE = r ab, zieht durch E eine $\nparallel$ zu DP, und errichtet in M auf MP′ einen $\perp$, so ergiebt sich, da EM = MF, $\angle$ RME = $\angle$ P′MF ist, $\triangle$ RME $\cong$ $\triangle$ P′MF, also MR = MP′. Nun ist aber der aus R auf PD gefällte $\perp$ RB = DE = r, folglich bestimmt sich die Lage der gesuchten Linie, wenn man RM $\perp$ und = MP′ absetzt, einen K gleichen $\odot$ um R

zeichnet, an denselben aus P eine Tangente PB zieht, und zu dieser nach 282 an K die ∓ Berührungslinie XY legt.

1630. i. Fig. 422. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man soll durch P eine Linie XY so legen, daß sich der in XY liegende Abstand des Punktes P von einer ⊥ XY an K gezogenen Tangente gleich dem aus P' auf XY gefällten ⊥ ergiebt. (PY = P'X).

Analysis. Durch die Analysis von 1630. a. wird man darauf geleitet, den ⊙ K um M mit seinem Centrum in den ⊥ auf PM nach M, in gleichem Abstande von P, zu verlegen, so wie dort, Fig. 417., Punkt P'' gleichweit von P in den auf PP'' errichteten ⊥ nach E verlegt würde. Zieht man hierauf durch P' eine ∓ zu XY, und fällt auf dieselbe ⊥⊥ aus P und M, so ergiebt sich PE = P'X = PY, ∠ MPE = ∠ MPY, MP = MP, ∠ E = ∠ Y, also ▭ MPEB ≅ ▭ MPYB, weshalb MB = MB, also P'E Tangente an K sein muß, und die → von XY gefunden ist, folglich auch durch P die Lage dieser Linie bestimmt werden kann.

1630. k. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die ⊥ XY an K' gezogene Tangente gleich dem in XY liegenden Abstand des Berührungspunkts von dem aus P auf XY gefällten ⊥ ergiebt.

Analysis. Legt man durch M' eine ∓ zu dem ⊥ PX, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1630. h.

1630. l. Fig. 423. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Berührungslinie XY so an K legen, daß sich der aus P auf XY gefällte ⊥ gleich dem in XY liegenden Abstand des Berührungspunkts von der ⊥ XY an K' gezogenen Tangente bestimmt. (PX = BY).

Analysis. Legt man durch P und M ∓ ∓ zu XY, durch M und M' ∓ ∓ zu PX, und verlängert B'Y, so er-

giebt sich BG = BY, also GM — (r + r') = ME. Schneidet man daher GH = (r + r') ab, zieht durch H eine ∦ zu PG, und errichtet in M auf MM' einen ⊥ MR, so bestimmt sich ferner, da HM = ME, ∠ RMH = ∠ M'ME ist, △ RHM ≅ △ MM'E, also MR = MM'. Nun ist aber der aus R auf PG gefällte ⊥ RB = HG = r + r', folglich erhält man die Lage der gesuchten Linie, wenn man MR ⊥ und = MM' absetzt, eine Kreislinie K mit r + r' um R zeichnet, an dieselbe aus P eine Tangente PB zieht, und nach 282 eine derselben ∦ Berührungslinie XY an K legt.

1630. m. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich die ⊥ XY an K gezogene Tangente gleich dem in XY liegenden Abstand des Punktes P von der ⊥ XY an K' gelegten Berührungslinie ergiebt.

Analysis. Legt man durch M eine ∦ zu der Tangente von K, so reduzirt sich die Aufgabe für M, K' und P auf 1630. i.

1630. n. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine Tangente XY so an K legen, daß sich die ⊥ XY an K' gezogene Berührungslinie gleich dem in XY liegenden Abstand des Berührungspunkts (in K) von der ⊥ XY an K'' gezogenen Tangente bestimmt.

Analysis. Legt man durch M' eine ∦ zu der Tangente von K', so reduzirt sich die Aufgabe für M', K, K' auf 1630. l.

Anmerkung. Die Aufgaben von 1630. g. ab können doppelt gestellt werden, einmal, daß XY die Centrale schneiden soll, 2) daß dies nicht statt findet. In beiden Fällen bleibt die Analysis dieselbe, weshalb der erste Fall hier nicht beachtet ist.

1630. o. Fig. 422. **Aufgabe.** Gegeben P, P', K; man soll durch P eine P'M nicht schneidende Linie XY so legen, daß sich die Summe der ⊥ XY an

K gezogenen Tangente und der in XY liegenden Entfernung des Punktes P von dem auf XY aus P′ gefällten ⊥ = s ergiebt. (BY + PX = s).

Analysis. Legt man durch M eine ∓ MF zu BY, so ergiebt sich MF + PX = s, und es ist deshalb 1630. b. zu lösen.

1630. p. Fig. 421. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine PP′ nicht schneidende Tangente XY so an K legen, daß sich die Summe des ⊥ Abstandes derselben von P mit der in XY liegenden Entfernung des Berührungspunkts von dem aus P′ auf XY gefällten ⊥ gleich s ergiebt. (PX + BY = s).

Analysis. Verlängert man PX und P′Y, und zieht durch M eine ∓ zu XY, so ergiebt sich PG + MF = s + r (oder s − r, wenn XY auf der anderen Seite von GF lag), weshalb sich die Aufgabe auf 1630. b. reduzirt.

1630. q. Fig. 422. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll durch P eine P′M nicht schneidende Linie XY so legen, daß sich die Summe aus dem in XY liegenden Abstande des Punktes P von einer ⊥ XY an K gezogenen Tangente und dem aus P′ auf XY gefällten ⊥ = s ergiebt. (PY + P′X = s).

Analysis. Zieht man durch M eine ∓ MF zu BY, so ergiebt sich P′X + PF = s ∓ r, weshalb die Aufgabe durch 1630. b. gelöst werden kann.

1630. r. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine PM′ nicht schneidende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe aus der ⊥ XY an K′ gezogenen Tangente und dem in XY liegenden Abstande des Berührungspunkts von dem aus P auf XY gefällten ⊥ gleich s ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630. o.

1630. s. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine PM′ nicht schneidende Berührungslinie

XY so an K legen, daß sich die Summe des aus P auf XY gefällten ⊥ mit dem in XY liegenden Abstande des Berührungspunkts von der ⊥ XY an K′ gezogenen Tangente = s ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630. q.

1630. t. Aufgabe. Gegeben P, K, K′; man soll eine MM′ nicht schneidende Linie XY so durch P legen, daß sich die Summe aus der ⊥ XY an K gezogenen Tangente und dem in XY liegenden Abstande des Punktes P von der ⊥ XY an K′ gezogene Berührungslinie = s ergiebt.

Analysis. Zieht man durch M eine ∥ zu der an K liegenden Tangente, so reduzirt sich die Aufgabe auf 1630. q.

1630. u. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll eine M′M″ nicht schneidende Berührungslinie XY so an K legen, daß sich die Summe aus der ⊥ XY an K′ gezogenen Tangente und dem in XY liegenden Abstande des Berührungspunkts von der ⊥ XY an K″ gezogenen Tangente = s ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630 t.

1630. v. Aufgabe. Wie 1630. o., nur soll XY P′M durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. o. zu 1630. c.

1630. w. Aufgabe. Wie 1630. p., nur soll XY PP′ durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630. c.

1630. x. Aufgabe. Wie 1630. q, nur soll XY P′M durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. q. zu 1630. c.

1630. y. Aufgabe. Wie 1630. r., nur soll XY PM′ durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630. v.

1630. z. Aufgabe. Wie 1630. s., nur soll XY PM′ durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630. x.

1630. A. Aufgabe. Wie 1630. t., nur soll XY MM′ durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. t. zu 1630. x.

1630. B. Aufgabe. Wie 1630. u., nur soll XY M′M″ durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. p. zu 1630. A.

1630. C. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll durch P eine P′M nicht schneidende Linie XY so legen, daß sich der Unterschied zwischen der ⊥ XY an K gezogenen Tangente und der in XY liegenden Entfernung des Punktes P von dem auf XY aus P′ gefällten ⊥ = d ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. o. zu 1630. d.

1630. D. Fig. 421. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine PP′ nicht schneidende Tangente XY so an K legen, daß sich der Unterschied zwischen dem ⊥ Abstande derselben von P und der in XY liegenden Entfernung des Berührungspunkts von dem aus P′ auf XY gefällten ⊥ = d ergiebt. (PX — BY = d).

Analysis. Legt man durch M eine ∦ zu XY, so bestimmt sich PG — MF = d ± r, weshalb man 1630. d. zu lösen hat.

1630. E. Fig. 422. Aufgabe. Gegeben P, P′, K; man soll eine P′M nicht schneidende Linie XY so durch P legen, daß sich der Unterschied zwischen dem in XY liegenden Abstande des Punktes P von einer ⊥ XY an K gezogenen Tangente und dem aus P′ auf XY gefällten ⊥ gleich d ergiebt. (P′X — PY = d).

Analysis. Legt man durch M eine ∦ zu BY, so ergiebt sich P′X — PF = d ± r, weshalb die Aufgabe durch 1630. d. gelöst werden kann.

1630. F. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine PM' nicht schneidende Tangente XY so an K legen, daß sich der Unterschied zwischen der ⊥ XY an K' gezogenen Tangente und dem in XY liegenden Abstande des Berührungspunkts von dem aus P auf XY gefällten ⊥ gleich d ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. D. zu 1630. C.

1630. G. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine PM' nicht schneidende Tangente XY so an K legen, daß sich der Unterschied zwischen dem aus P auf XY gefällten ⊥ und dem in XY liegenden Abstande des Berührungspunkts von der ⊥ XY an K' gezogenen Tangente = d ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. D. zu 1630. E.

1630. H. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll eine MM' nicht schneidende Linie XY so durch P legen, daß sich der Unterschied zwischen der ⊥ XY an K gezogenen Tangente und dem in XY liegenden Abstande des Punktes P von der ⊥ XY an K' gelegten Berührungslinie = d ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. E. zu 1630. C.

1630. I. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll eine M'M'' nicht schneidende Tangente XY so an K legen, daß sich der Unterschied zwischen der ⊥ XY an K' gezogenen Tangente und dem in XY liegenden Abstande des Berührungspunkts von der ⊥ XY an K'' gelegten Tangente = d ergiebt.

Analysis. Führt wie in 1630. D. zu 1630. H.

1630. K. Aufgabe. Wie 1630. C., nur soll XY P'M durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. C. zu 1630. e.

1630. L. Aufgabe. Wie 1630. D, nur soll XY PP' durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. D. zu 1630. e.

1630. M. Aufgabe. Wie 1630. K., nur soll XY P'M durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. E. zu 1630. e.

1630. N. Aufgabe. Wie 1630. F., nur soll XY PM' durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. D. zu 1630 K.

1630. O. Aufgabe. Wie 1630. G., nur soll XY PM' durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. D. zu 1630. M.

1630. P. Aufgabe. Wie 1630. H., nur soll XY MM' durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. E. zu 1630. K.

1630. Q. Aufgabe. Wie 1630. I., nur soll XY M'M'' durchschneiden.

Analysis. Führt wie in 1630. D., zu 1630. P.

1630. R. Fig. 424. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll 2 einen $\angle\ \alpha$ bildende Linien PX und PY so von P ausziehen, daß sich die $\perp$ Abstände dieses Punkts von den aus P' und P'' auf PX und PY gefällten $\perp\perp$ gleich groß ergeben. (PX = PY).

Analysis. Da 757 einen einzelnen Fall dieser Aufgabe bildet, bei welchem nämlich $\angle\ \alpha = 2R$ ist, wird man darauf geleitet $\angle$ P''PD = α zu bestimmen, und P'X zu verlängern. Hiedurch ergiebt sich $\triangle$ PXD $\cong$ $\triangle$ P''PY, also PD = PP'', weshalb D und DP' gegeben ist, folglich der $\perp$ PX bestimmt werden kann.

1630. S. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll 2 einen $\angle\ \alpha$ bildende Linien PX und PY so von P aus ziehen, daß sich deren $\perp$ Abstände von P' und P'' gleich groß ergeben.

Analysis. Legt man durch P $\fallingdotseq$ zu den $\perp$ Abständen, so ergiebt sich der von diesen eingeschlossene $\angle = 2R - \alpha$. Zieht man ferner $\fallingdotseq\fallingdotseq$ durch P' und P'' zu PX und PY, so erhält man 1630. R. zu lösen.

1630. T. Fig. 425. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll 2 einen ∠ α bildende Linie PX und PY so von P aus ziehen, daß P' von PX eben so weit ⊥ absteht, als P von dem aus P'' auf PY gefällten ⊥. (P'X = PY).

Analysis. Da 1630. a. einen einzelnen Fall dieser Aufgabe bildet, bei welchem nämlich ∠ α = 2R ist, wird man darauf geleitet ∠ P'PP = α, und PP = PP' zu bestimmen. Hiedurch ergiebt sich △ PP'X ≅ △ PPX', weshalb PX' = P'X = PY sein muß, und die Aufgabe 1630. a. (Fig. 417. a.) zu lösen bleibt.

1630. U. Fig. 426. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll zwei einen ∠ α bildende Linien PX und PY so von P ausziehen, daß sich die in dieselben fallenden Abstände dieses Punkts von 2 unter den ∠ β und γ von P' und P'' gegen PX und PY geneigten Linien P'X und P''Y gleich groß ergeben. (PX = PY, ∠ XPY = α, ∠ P'XP = β, ∠ P''YP = γ).

Analysis. Bestimmt man ∠ P'PD = α und PD = PP', so erhält man △ PDY ≅ △ PP'X, folglich ∠ PYD = ∠ PXP' = β. Durch PP'', PD und die ∠ γ und β sind aber nach 320 2 Oerter für Y gegeben, also läßt sich dieser Punkt bestimmen, u. s. w.

1630. V. Fig. 426. Aufgabe. Wie 1630. U., nur soll P'X = P''Y werden.

Analysis. Führt wie in 1630. S. zu 1630. U.

1630. W. Fig. 427. Aufgabe. Wie 1630. U., nur soll P'X = PY werden.

Analysis. Bestimmt man ∠ P''PP = α, PP = PP'' und ∠ PY'P = γ, so ergiebt sich △ PP''Y ≅ △ PPY', weshalb sich PY' = PY = P'X ergiebt, und die Aufgabe nach 1630. f. gelöst werden kann.

1630. X. Fig. 428. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man soll 2 einen ∠ α bildende Tangenten,

DX und DY so an K legen, daß sich die ⊥ Abstände des Schneidungspunkts derselben von zwei ⊥ auf DX und DY an K′ und K″ gezogenen Berührungslinien gleich groß ergeben. (DX = DY, ∠ XDY = α).

Analysis. Da 1041 einen einzelnen Fall dieser Aufgabe bildet, bei welchem nämlich ∠ α = 2R ist, wird man darauf geleitet ∠ M″MM = α, MM″ = MM, und eine K″ gleiche Kreislinie K″ um M zu konstruiren. Zieht man hierauf durch M ∓∓ zu DY und DX, und legt an K′ und K″ eine gemeinschaftliche Tangente B′B″, so ergiebt sich □ MM″B″E ≅ □ MMB″F, da ∠ α = ∠ FME = ∠ MMM″ ist, also ∠ M″ME = ∠ FMM sein muß, und man außerdem MM″ = MM, M″B″ = MB″, ∠ E = ∠ F = R hat. Hieraus folgt ME = MF, also auch DY = DX. Da nun der ⊥ MF nach der vorhergehenden Konstruktion gegeben ist, kennt man also die ⟶ DX und DY, und kann diese Linien selbst nach 282 feststellen.

1630. Y. Fig. 428. Aufgabe. Wie 1630. X., nur sollen hier die ⊥ DX und DY an K′ und K″ gelegten Tangenten B′X und B″Y einander gleich werden. (B′X = B″Y, ∠ XDY = α)

Analysis. Legt man ∓∓ durch M, M′, M″ zu DX, DY, B′X, B″Y, so reduzirt sich die Aufgabe, in Beziehung auf die Punkte M, M′, M″, auf 1630. S.

1630. Z. Fig. 429. Aufgabe. Wie 1630. X., nur soll hier die ⊥ DX an K′ gezogene Tangente B′X = DY werden. (B′X = DY, ∠ XDY = α).

Analysis. Legt man durch M und Y ∓∓ zu DX, DY, DM, ferner durch H zu B″Y, und verlängert M″B″, so erhält man B″E = GH = BD, also mittelst α und r gegeben, und MH = DY = B′X. Nimmt man daher gleiche Stücke FX oder r und HY′ ab, so bleibt B′F, oder die ∓ M′N = MY′. Zieht man jetzt durch Y′ eine ∓ zu B″Y, so findet sich der Radius M″I der jene ∓ berührenden

Kreislinie um M'' bekannt, da IB'' = Y'G ist, also M''I = r'' — (r — BD) sein muß, weshalb sich die vorstehende Aufgabe auf eine einfachere, von diesem ⊙ und den Punkten M und M' bedingte, zurückführt. Bestimmt man zur Lösung derselben ∠ M'MQ = α = ∠ NMY', und MP, die Verlängerung von MQ, = MM', so reduzirt sich endlich auch diese Aufgabe auf eine andere: denn fällt man aus P den ⊥ PX', so zeigt sich △ PMX' ≅ △ M'MN, da außer PM = MM', ∠ PMX' = ∠ QMY' = ∠ M'MN ist, hieraus aber ⊥ PX' = M'N = MY' folgt, also 1630. i. zu konstruiren ist.

Anmerkung. So wie in 1630. X., Y., Z. die drei Elemente K, K', K'' gewählt sind, konnten P, P', K und P, K, K' gleichfalls zur Bildung ähnlicher Aufgaben benutzt werden. Wendet man dieselben Hilfsmittel wie bei 1630. X., Y., Z. an, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit auch für diese Aufgaben die Analysis.

1631. Fig. 284. Aufgabe. In einem festliegend gegebenen △ ABC soll eine ∓ XY so zu a gelegt werden, daß sich XY + a = der Summe der oberen Abschnitte AX und AY ergiebt.

Analysis. Da AX + AY = XY + a bedingt ist, muß AX + AY — XY = a sein. Hiedurch ist aber die Summe der beiden Berührungslinien AE und AF eines in das △ AXY beschriebenen Kreises, folglich auch dieser ⊙ selbst mittelst der feststellbaren Punkte E und F gegeben, so daß man nur schließlich 282 zur Verzeichnung von XY anzuwenden hat.

1632. Fig. 285. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden ∠ α ist ein beide tangirender ⊙ gegeben; man soll an denselben eine Berührungslinie XY innerhalb α ziehen, so daß sich AX + AY = s ergiebt.

Analysis. Fall 1). XY soll zwischen A und K fallen. Es ist AD + AE gegeben, und AX + AY = s bedingt, folglich hat man durch Subtraktion DX + EY, oder

$XY = AD + AE - s$, weshalb die Aufgabe mittelst 375 gelöst werden kann.

Fall 2) $X'Y'$ soll nicht zwischen A und K fallen.

Es ist $AD + AE$ gegeben, und $AX' + AY' = s$ bedingt, folglich hat man durch Subtr. $DX' + EY'$ oder $X'Y' = s - (AE + AD)$, weshalb die Aufgabe mittelst 375 gelöst werden kann.

1633. Fig. 236. **Aufgabe.** Zwischen den Schenkeln eines festliegenden $\angle \alpha$ ist ein beide tangirender $\odot$ um O gegeben; man soll an denselben eine die Schenkel des Neben$\angle$ von α durchschneidende Berührungslinie CQ' ziehen, so daß sich $CA - BA = d$ ergiebt.

Analysis 1). Nach 1418 ist $CA = GQ'$, $BA = GR'$, und deshalb, da gleichfalls nach 1418 $BQ' = GR'$ ist, $GB - GC = d$. Nun muß aber, ebenfalls nach 1418, CG der gegebenen Linie AI gleich sein, folglich hat man $GB = d + AI$, und $BC = d + 2AI$, wodurch sich die Aufgabe auf die 375 analoge Hilfsaufgabe, welche 1477 gelöst wurde, reduzirt.

Analysis 2). Nach 1418 ist $BI = CH$, also $AH - AI = d$, und deshalb $AH = d + AI$. Bestimmt man hienach H, errichtet in diesem Punkt einen $\perp$ auf AH, verlängert OA, beschreibt mit NH einen $\odot$ um N, und zieht nach 318 die gemeinschaftliche Tangente $R'Q'$, so muß sich $AC - AB = d$ ergeben.

1634. Fig. 285. **Aufgabe.** Zwischen den Schenkeln eines festliegenden $\angle \alpha$ ist ein beide tangirender $\odot$ gegeben; man soll an denselben eine Berührungslinie XY innerhalb α ziehen, so daß sich $AX + XY = s$ ergiebt.

Analysis. Fall 1). XY soll zwischen A und K fallen.

Es ist $AX + XB + BY + YA = AD + AE$ gegeben,

und $AX + XB + BY = s$ bestimmt,

folglich hat man durch $\mathfrak{S}$. $YA = AD + AE - s$, wodurch sich Y, und deshalb XY feststellen läßt.

Fall 2). X'Y' soll nicht zwischen A und K fallen.

Schneidet man $AG = s$ ab, so ergiebt sich $\angle X'Y'G = \frac{1}{2}AX'Y'$, $(\frac{1}{2}\gamma)$. Nun ist aber $\angle MY'X' = \frac{1}{2}AY'X'$, $(\frac{1}{2}\beta)$, folglich ergiebt sich $\angle MY'G = R - \frac{\alpha}{2}$, $(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta)$, und es läßt sich deshalb, da MG gegeben ist, nach 320 Y' bestimmen, und hierauf X'Y' verzeichnen.

Anmerkung 1). Als unörtliche Aufgabe genommen, fordert der erste Fall $\triangle$ aus α, $(a + b)$, ϱ', der zweite $\triangle$ aus α, $(a+b)$, ϱ.

Anmerkung 2). Der erste Fall läßt sich ebenfalls ganz analog mit dem zweiten lösen, und es ergiebt sich der dazu erforderliche Peripherie$\angle = \frac{\alpha}{2}$.

1635. Fig. 285. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden $\angle \alpha$ ist ein beide tangirender $\odot$ gegeben; man soll an denselben eine Berührunglinie XY innerhalb α ziehen, so daß sich $AX - XY = d$ ergiebt.

Analysis. Fall 1). X'Y' soll nicht zwischen A und K fallen.

Es ist $AX' - X'B' + AY' - Y'B' = AD + AE$ gegeben,
und $AX' - X'B' - Y'B' = d$ bestimmt,

---

also ergiebt sich durch G. $AY' = AD + AE - d$,
wodurch sich Y', und deshalb auch X'Y' feststellen läßt.

Fall 2). XY soll zwischen A und K fallen.

Schneidet man $AG' = d$ ab, so ergiebt sich $\angle XYG' = R - \frac{AXY}{2}$, $\left(R - \frac{\gamma}{2}\right)$. Nun ist aber $\angle MYX = R - \frac{AYX}{2}$, $\left(R - \frac{\beta}{2}\right)$, folglich ergiebt sich $\angle MYG' = R + \frac{\alpha}{2}$, $\left(2R - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$, und es läßt sich deshalb, da MG' gegeben ist, nach 320 Y bestimmen, und hierauf XY verzeichnen.

Anmerkung 1). Als unörtliche Aufgabe genommen, fordert der erste Fall △ aus (b — a), ϱ, α; der zweite Fall △ aus (b — a), ϱ′, α.

Anmerkung 2). Fall 1) dieser Aufgabe bildet eine Analogie zu Fall 1) 1634, und Fall 2) gleichfalls zu Fall 2) 1634.

Anmerkung 3). Fall 1) läßt sich in derselben Art wie Fall 2) lösen, und es ergiebt sich der dazu erforderliche Peripherie∠ $= \frac{\alpha}{2}$.

1636. Fig. 286. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden ∠ α (DAE) ist ein beide tangirender ⊙ gegeben; man soll an denselben eine die Schenkel des Neben∠ von α schneidende Berührungslinie ziehen, so daß sich AX + XY = s ergiebt.

Analysis 1).

Es ist AX — XB + BY — AY = AD + AE gegeben,
und AX — XB + BY = s bedingt,

also erhält man durch Subtr. AY = s — (AD + AE), wodurch sich Y, und deshalb auch die gesuchte Berührungslinie feststellen läßt.

Analysis 2). Schneidet man AG = s ab, so ergiebt sich ∠ XYG $= \frac{\angle YXA}{2}$. Nun ist aber ∠ MYX $= \frac{\angle AYX}{2}$, folglich bestimmt sich ∠ MYG $= R - \frac{\angle XAY}{2} = \frac{\alpha}{2}$, und es läßt sich deshalb, da MG gegeben ist, nach 320 Y bestimmen, und hierauf XY verzeichnen.

1637. Fig. 286. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden ∠ α (DAE) ist ein beide tangirender ⊙ gegeben; man soll an denselben eine die Schenkel des Neben∠ von α schneidende

Berührungslinie ziehen, so daß sich $XY - AX = d$ ergiebt.

Analysis. Schneidet man $AG' = d$ ab, so ergiebt sich $\angle XYG' = R - \frac{\angle YXA}{2}$. Nun ist aber $\angle MYX = \frac{\angle AYX}{2}$, folglich bestimmt sich $\angle MYG' = R - \frac{2R - \angle XAY}{2} = \frac{\angle XAY}{2} = R - \frac{\alpha}{2}$, und es läßt sich deshalb, da MG' gegeben ist, nach 320 Y, und hierauf XY zeichnen.

1638. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden $\angle \alpha$ ist ein beide tangirender $\odot$ gegeben; man soll an denselben eine die Schenkel des Neben$\angle$ von α schneidende Berührungslinie so ziehen, daß sich der zwischen diese Schenkel fallende Abschnitt derselben gleich a ergiebt.

Analysis. Siehe 1477.

1639. Fig. 236. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegend gegebenen $\angle SAS'$ soll eine Linie CB, deren Theile CF und FB einzeln bestimmt sind, so gelegt werden, daß, wenn man einen $\odot$ in das entstehende $\triangle ABC$ beschreibt, der gemeinschaftliche Endpunkt F beider vorgeschriebenen Linien einen Berührungspunkt für diesen $\odot$ bildet.

Analysis. Da $CF = CD$, $BF = BE$ ist, werden sich durch Abschneidung dieser Linien von den $\angle$spitzen B und C aus gleiche Reste AD und AE ergeben. Nach 1418 Anmerk. 2. findet eine ähnliche Relation wie hier für den $\odot$ im $\triangle$ für 2 $\odot\odot$ am $\triangle$ statt, bei welcher die gleichen Linien CH und BI von den $\angle$spitzen B und C auslaufen, und die Reste AH und AI in der $\angle$spitze A zusammentreffen. Da nun hienach sowohl $CD - BE$ als $AH - AI = AC - AB$

sein muß, und die Benutzung des gegebenen ∠ CAB ohnehin nothwendig ist, so giebt dies genügenden Grund die 4 Linien CD, AH, BE und AI gegen einander zu vergleichen. Die Ausführung hievon führt zu dem Resultat, daß CD = AH, BE = AI ist, da nach 373 FR′ = AC, FQ′ = AB sein muß, also durch Subtraktion der von C und B nach den ⊙⊙ um N und O führenden Tangenten-Paare gleiche Reste bleiben. Wenn aber AH = GF, AI = BF ist, so kann man die Punkte I und H feststellen. Mittelst derselben lassen sich ferner die beiden Radien IO und HN der ⊙⊙ am △ bestimmen, wenn man in H, I und A ⊥⊥ auf HA, IA und die Halbirungslinie AW des ∠ CAB errichtet. Beschreibt man demnach die erwähnten ⊙⊙ um O und N, so hat man nur schließlich nach 318 zu denselben die gemeinschaftliche Tangente R′Q′ zu ziehen, um die Linie CB festzustellen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Gesetz:

in jedem △ ist die von einer ∠spitze nach dem ⊙ im △ führende Tangente eben so groß, als die von einer anderen ∠spitze nach demjenigen ⊙ am △ führende Berührungslinie, welcher die zwischen beiden ∠spitzen liegende Seite selbst berührt.

1640. Fig. 236. Aufgabe. Es ist ein festliegender ∠ SAS′ gegeben; man soll außerhalb desselben einen Punkt Q′ so bestimmen, daß, wenn man eine denselben durchlaufende und die Schenkel des Neben∠ von SAS′ berührende Kreislinie beschreibt, und in Q′ an dieselbe eine Tangente legt, die beiden Abschnitte Q′C und Q′B vorgeschriebene Längen erhalten.

Analysis. Nach 1639 und 1418 ist BQ′ = BI = AE, CQ′ = CG + GQ′ = CS + AC = AS; es sind also die Punkte E und S gegeben. Mittelst derselben lassen sich die beiden Radien EW und SM der ⊙⊙ im und am

△ ABC bestimmen, wenn man in E und S ⊥⊥ errichtet, und die Halbirungslinie AM des ∠ SAS′ auszieht. Beschreibt man demnach die erwähnten ⊙⊙ um W und M, so hat man nur schließlich 318 zur Festellung des verlangten Punktes Q anzuwenden.

1641. Fig. 287. und 287. a. Gegeben K und K′; man soll einen Ort von der Eigenschaft bestimmen, daß sich die Summe jedes Paars aus einem beliebigen Punkte desselben an K und K′ gezogener Tangenten als Minimum ergiebt.

Stellt man sich einen solchen Punkt des gesuchten Orts vor, in welchem die beiden Tangenten als gerade Linie zusammentreffen, so bildete sich hiedurch eine gemeinschaftliche Tangente für K und K′, und zwar die MM′ durchschneidende DF (oder D′F′), da diese die kleinere ist. Nun bemerkt man aber bald, daß jedes Paar aus einem Punkt von DF an K und K′ gezogene Tangenten zusammengenommen = DF ist, folglich wäre diese Linie selbst der gesuchte Ort, wenn sich beweisen ließe, daß jedes sich nicht in DF vereinigende Tangentenpaar zusammengenommen, z. B. ON + OH, größer wäre als DF. Dies läßt sich aber zeigen: denn Fig. 287. ist

$$OG + OI > GI, \text{ also auch}$$
$$GH + OG + OI - IN > GI - IF + DG, \text{ und deshalb}$$
$$OH + ON > DF.$$

Eben so ist, Fig. 287. a,

$$IG > IO - OG, \text{ d. h.}$$
$$IF - FG > IN - ON - OG, \text{ und}$$
$$IF + ON + OG > IN + FG, \text{ oder}$$
$$ON + OG > FG, \text{ also auch}$$
$$GH + OG + ON > FG + GD, \text{ und deshalb}$$
$$OH + ON > DF.$$

1642. Fig. 288. und 288. a. Gegeben K und K′; man soll einen Ort von der Eigenschaft bestimmen, daß sich der Unterschied jedes Paars aus

einem beliebigen Punkte desselben an K und K' gezogener Tangenten als Maximum ergiebt.

Auf demselben Wege wie in 1641 gelangt man zu der Vermuthung, daß von den Verlängerungen der die Centrale nicht schneidenden gemeinschaftlichen Tangenten, also viermal, ein solcher Ort gebildet wird. Dies bestätigt sich in folgender Art:

Fall 1.) Fig. 288. Es ist $OS - OR < SR$;
oder $ON + NS - OH - HR < SQ + QT - RT$
also auch $ON - OH < QT$, oder $DB' - DB$.

Fall 2.) Fig. 288. a. Es ist $SR < SO + OR$,
oder $SQ - QT + TR < SN - ON + OH + HR$,
also auch $ON - OH < QT$ oder $DB' - DB$.

1643. Fig. 42. Gegeben K und K' auf derselben Seite einer Linie L; man soll einen Punkt X in L so bestimmen, daß sich die Summe zweier aus demselben an K und K' gelegten Tangenten, im Vergleich zu der Summe jedes anderen aus einem Punkte in L nach K und K' führenden Tangenten-Paars, als Minimum ergiebt.

Die vorgeschriebenen Bedingungen werden von 2 Punkten erfüllt, welche sich ergeben, wenn man die Aufgabe 1592 dadurch löst: daß zu den ⊙⊙ K' und K beide die Centrale M'M durschneidende Tangenten gezogen werden. (In Fig. 42. bildet X einen dieser Punkte.) Die Summe jedes anderen von einem Punkte in L auslaufenden Tangenten-Paars, z. B. $X'B'' + X'B'''$ ist $> XB + XB'$, da nach 1641 $X'B'' + X'B''' >$ als $XB + XB'$, d. h. größer als die MM' durchschneidende gemeinschaftliche Tangente BB' an K' und K sein muß.

Anmerkung. Es sind in so fern zur Bestimmung desselben Minimums zwei Punkte möglich, als sich zeigen läßt, daß die Summe des einen und des anderen zugehörigen Tangenten-Paars dieselbe Größe hat.

1644. Fig. 271. Gegeben K und K′ auf verschiedenen Seiten einer Linie L; man soll einen Punkt X in L so bestimmen, daß sich der Unterschied zweier aus demselben an K und K′ gelegten Tangenten, im Vergleich zu der Differenz jedes anderen von einem Punkte in L nach K und K′ auslaufenden Tangenten-Paars, als Maximum ergiebt.

Die vorgeschriebenen Bedingungen werden von 2 Punkten erfüllt, welche sich ergeben, wenn man die Aufgabe 1593 dadurch löst, daß zu den Kreisen K und K′ beide die Centrale MM′ nicht schneidende Tangenten gezogen werden. (In Fig. 271. bildet X‴ einen dieser Punkte). Der Unterschied jedes anderen von einem Punkte in L auslaufenden Tangenten-Paars z. B. $X'B''' - X'B''$ ist $<$ als $X''B^{V} - X''B^{IV}$, da nach 1642 $X'B''' - X'B''$, d. h. $X'B''' - X'B'' < X''B^{V} - X''B^{IV}$, also kleiner als die MM′ nicht schneidende gemeinschaftliche Tangente $B^{IV}B^{V}$ von K′ und K sein muß.

Anmerkung. Wie in 1643, aber Maximum statt Minimum, Differenz statt Summe gelesen.

1645. Fig. 271. Gegeben K und K′ auf derselben Seite einer Linie L; man soll einen Punkt X in L so bestimmen, daß sich der Unterschied zweier aus demselben an K und K′ gelegten Tangenten, im Vergleich zu der Differenz jedes anderen von einem Punkte in L nach K und K′ auslaufenden Tangenten-Paars, als Maximum ergiebt.

Folgt aus 1644.

1646. Fig 289. Lehrsatz. Zwei an zwei Kreislinien K und K′ gelegte Tangenten BO und B′O, welche sich in einem Punkte O einer dritten Kreislinie K″ vereinigen, bilden die kleinste Summe, wenn sie mit dem nicht zwischen diesel-

den fallenden Halbmesser M″O gleiche ∠ M″OB und M″OB′ bestimmen, und keine von den beiden MM′ durchschneidenden gemeinschaftlichen Tangenten an K und K′ K″ begegnet.

Beweis. Zieht man in O eine Berührungslinie IN an K″, ferner aus einem beliebigen Punkt D in K″ Tangenten DF und DE an K und K′, und aus I eine Tangente IG an K′, so ergiebt sich FD + DH > IF + IH, also auch FD + DE > FI + IG. Nun ist ∠ IOB = ∠ NOB, folglich muß IF + IG nach 1643 > BO + B′O, also auch BO + B′O nicht allein ein Minimum in Beziehung auf IN, wie dies 1643 gezeigt wurde, sondern auch in Beziehung auf K″ bilden.

1647. Bemerkungen. Anglog mit der 990 angeführten Analysis ergiebt sich die Lage von O durch Konstruktion einer K″ von Außen berührende Kurve, deren Gesetz ist, daß sich die Summe jedes Paars aus einem Punkte derselben nach K und K′ gezogenen Tangenten gleich groß ergiebt. Der Punkt in K″, welcher ein Maximum zweier aus demselben nach K und K′ führenden Tangenten bestimmt, wird ferner erhalten, wenn man eine demselben Gesetz unterworfene K″ von Innen berührende Kurve zeichnet. Die beiden Punkte in K″ endlich, welche ein Maximum oder ein Minimum der Differenz zweier aus demselben nach K und K′ führenden Tangenten bestimmen, lassen sich durch Konstruktion einer K″ von Außen oder von Innen berührenden Kurve feststellen, deren Gesetz ist, daß sich die Differenz jedes Paars aus einem Punkte derselben nach K und K′ gezogenen Tangenten gleich groß ergiebt.

1648. Lehrsatz. Eine von P nach K führende Tangente ist größer als der Unterschied und kleiner als die Summe jeder 2 Linien, welche von einem beliebigen außerhalb der Tangente liegenden Punkte, K berührend und P durchlaufend, gezogen werden können.

Beweis. Ergiebt sich ähnlich wie in 1641 und 1642.

1649. Aufgabe. Gegeben P und K auf derselben Seite von L; man soll ein ähnliches Minimum wie in 1643 bestimmen.

Analysis. Ergiebt sich durch Hilfe von 1589 und 1643.

1650. Aufgabe. Gegeben P und K auf verschiedenen Seiten von L; man soll ein ähnliches Maximum wie in 1644 bestimmen.

Analysis. Ergiebt sich durch Hilfe von 1590 und 1644.

1651. Aufgabe. Gegeben P und K auf derselben Seite von L; man soll ein ähnliches Maximum wie in 1645 bestimmen.

Analysis. Ergiebt sich durch Hilfe von 1650.

1652. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man soll ein 1646 ähnliches Minimum in Bezug auf einen Punkt in K' bestimmen.

Analysis. Ergiebt sich durch 1646 und 1589.

1653. Bemerkungen. Analog mit 1647 und 990 lassen sich die Punkte in K', welche zur Angabe des Minimums und Maximums der Summe und der Differenz zweier Linien erforderlich sind, von denen eine in P endigt, die andere K berührt, mittelst der Konstruktion zweier K' von A. oder von J. berührenden Kurven feststellen, deren Gesetz ist: daß sich die Summe oder die Differenz jeder zwei Linien, welche man aus einem beliebigen Punkte der Kurven in P endigend und K berührend ziehen kann, gleich groß ergiebt.

1654. Bemerkung. Durch Hilfe der am Schluß von 608 angegebenen Kurve läßt sich folgende hieher gehörige Aufgabe lösen:

Gegeben P, P', K; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die kleinste Summe für die 4 Linien, welche aus demselben in P und P' endigend und K berührend gezogen werden können, bestimmt. Da sich wie in 991 ergiebt, daß

eine Tangente, und die in P und P′ endigenden Linien 3 gleiche ∠, also jeden von 120° formiren, so erhält man durch PP′ nach 320 einen Ort für X, den anderen Ort kann man aber mittelst P, K und dem ∠ von 120° nach dem am Schluß von 608 gegebenen Andeutungen konstruiren, also X durch Hilfe einer besonderen Kurve feststellen.

1655. Fig. 290. **Aufgabe.** Gegeben P und P′; man soll über der Linie PP′ ein △ mit einem gegebenen Umfange so konstruiren, daß die Fläche desselben, im Vergleich zu allen übrigen mit demselben Umfange über PP′ konstruirten △△, ein Maximum bildet.

Analysis. Sei APP′ das verlangte △. Durch PP′ und den Umfang ist AP + AP′ bekannt. Da nun △ APP′ ein Maximum der Fläche bilden soll, und PP′ gegeben ist, kömmt es nur darauf an: die größte Höhe über PP′, oder was dasselbe ist, die möglichst weit von PP′ entfernte ⫩ so zu bestimmen, daß AP + AP′ die vorgeschriebene Größe erhält. Nimmt man GF als eine solche an, so müßte sich deshalb zeigen lassen, daß jeder in oder über dieselbe fallende Punkt F oder D, FP + FP′, oder DP + DP′ > als AP + AP′ bestimmte. Da sich jedoch in Bezug auf jeden außerhalb der ⫩ liegenden Punkt D stets ein Punkt E angeben läßt, welcher eine Summe EP + EP′ < DP + DP′ ergiebt, so käme es ferner allein darauf an, beweisen zu können: daß alle in GF fallenden Punkte F, E u. s. w. FP + FP′, EP + EP′ > als AP + AP′ bestimmen. Dies ist aber nach 773 nur möglich, wenn ∠ GAP = ∠ FAP′, also auch ∠ APP′ = ∠ AP′P ist: folglich muß das gesuchte △ ein durch PP′ und $\frac{AP + AP'}{2}$ gegebenes gleichschenkliges △ sein.

1656. Fig. 291. **Lehrsatz.** Von allen ecken mit denselben n—1 Seiten bildet die Fläche desjenigen, im Vergleich zu den übrigen, ein Maxi-

mum, welches mit seinen ∠spitzen in einer Kreislinie liegt, und den Durchmesser derselben zur Seite hat.

Analysis. Sei ABCDE das gesuchte neck mit den gegebenen Seiten AB, BC, CD, DE. Denkt man sich zunächst das ▱ BCDE und AB unveränderlich, so ergiebt sich das neck als Maximum, wenn △ ABC die grösste Fläche hat. Dies findet aber nach 778 statt, wenn ∠ ABE = R ist, also B in der Peripherie eines Halbkreises über AE liegt. Nimmt man ferner die △△ ABC und CDE unveränderlich an, so ergiebt sich dasselbe in Beziehung auf C. Durch Wiederholung dieser Untersuchung zeigt sich aber, daß auch alle übrigen Punkte in der Peripherie eines Halbkreises über AE liegen müßten, folglich läßt sich die Behauptung erweisen.

1657. Fig. 291. Lehrsatz. Von allen necken mit denselben Seiten bildet die Fläche desjenigen, im Vergleich zu den übrigen, ein Maximum, welches mit seinen ∠spitzen in der Peripherie eines Kreises liegt.

Beweis. Sei ABCDFGH das neck mit den gegebenen Seiten. Zieht man den Durchmesser AE, so ergiebt sich ein bestimmtes △DEF, und nach 1656 ABCDE + EFGHA, oder ABCDEFGH als Maximum. Denkt man sich nun das zugegebene △ DEF von allen möglichen Vielecken mit den Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FG ꝛc. abgenommen, so muß sich der grösste Rest bestimmen, wenn man jenes △ von dem grössten Vieleck also ABCDEFGH abnimmt, in welchem Fall sich wirklich das neck ABCDFGH ergiebt.

1658. Lehrsatz. Die Fläche eines regulären ecks bildet im Vergleich zu allen übrigen necken mit denselben Seiten ein Maximum.

Beweis. Folgt aus 1657.

1659. Fig. 236. Aufgabe. Es sind die Mittelpunkte M, N, O der 3 ⊙⊙ am △ gegeben; man

soll das von jedem dieser ⊙⊙ an einer Seite berührte △ zeichnen.

Analysis. Sei ABC das verlangte △. Wegen der Berührung des ⊙ um O muß ∠ OAI = ∠ HAN (= ∠ OAQ), ∠ OBE = ∠ FBM (= ∠ OBQ′) sein. Nun ist aber ∠ SAM = ∠ S′AM, ∠ R′BN = ∠ RBN, wegen der Berührungen der ⊙⊙ um N und M, folglich ergiebt sich ∠ MAO = ∠ NBO = R. Da nun aus ähnlichen Gründen sich ∠ OCM ebenfalls = R zeigt, so befinden sich die Spitzen des gesuchten △ ABC in den Schneidungspunkten der aus den ∠spitzen M, O und N auf die Gegenseiten gefällten Höhen.

Auflösung. Fälle aus M, N, O die ⊥⊥ MA, NB, OC, so ergeben sich die ∠spitzen A, B, C des verlangten △.

Beweis. Da die ▱▱ AOBW und ANCW ▱▱ im ⊙ sind, hat man ∠ BWO = ∠ BAO, und ∠ CWN = ∠ CAN. Nun ist aber ∠ BWO = ∠ CWN, also muß ∠ BAO = ∠ CAN = ∠ OAQ sein, d. h. NO halbirt den ∠ IAQ. Auf dieselbe Art ergiebt sich ∠ ABO = ∠ CBM = ∠ OBQ′, d. h. MO halbirt den ∠ ABQ′, und ferner ∠ BCM = ∠ ACN = ∠ MCS, d. h. MN halbirt den ∠ GCS. Wenn aber die Linien NO, MN, MO die genannten ∠ bei A, B, C halbiren, müssen auch die ⊙⊙ um O, M und N jeder drei Seiten des △ ABC nach 276 berühren, was zu beweisen war.

1660. Fig. 236. Aufgabe. Es ist ein △ MNO gegeben; man soll in dasselbe ein △ mit dem möglich kleinsten Umfange beschreiben.

Analysis. Sei ABC das verlangte △. Denkt man sich AB unveränderlich, so wäre nach 773 AC + CB ein Minimum, wenn sich ∠ ACN = ∠ BCM ergäbe. Denkt man sich AC unveränderlich, so bildete CB + BA ein Minimum, wenn man ∠ ABO = ∠ CBM fände. Vereinigt man also beide Bedingungen, so zeigt sich, daß AB+BC+CA

ein Minimum ist, wenn die Seiten dieses △ mit den Seiten des gegebenen gleiche ∠ bilden. Nach 1659 ergiebt sich aber ein solches △, wenn man die Höhen des gegebenen △ zeichnet, und deren Schneidungspunkte mit den Seiten, A, B und C verbindet.

1661. Aufgabe. In ein gegebenes Quadrat soll ein ▱ mit dem kleinstmöglichen Umfange so eingeschrieben werden, daß eine ∠spitze desselben in einen bestimmten Punkt fällt.

Analysis. Denkt man sich nach der Reihe jedes Paar aufeinanderfolgende Seiten des gesuchten ▱ unveränderlich, so ergiebt sich nach 773, daß jedes Paar Linien des ▱ mit den Seiten des ⊡ gleiche ∠ bilden muß. Dies wird erreicht, wenn man zunächst von dem bestimmten Punkte aus ‡‡ zu beiden Diagonalen des ⊡ zieht, und dasselbe hierauf in den entstehenden Durchschnittspunkten wiederholt (wodurch sich ein ▭ ergiebt).

1662. Fig. 292. **Aufgabe.** Es sind 4 in einer Kreislinie liegende Punkte F, G, H, I gegeben; man soll ein ▱ um ⊙ so konstruiren, daß sich um jeden dieser Punkte ein ⊙ zeichnen läßt, welcher eine Seite und die Verlängerung der anstoßenden beiden Seiten des gesuchten ▱ berührt.

Analysis. Sei ABCD das verlangte ▱ um ⊙. Wegen der Berührung des ⊙ um I muß ∠ CBI = ∠ ABH (= ∠ NBH), ∠ BCI = ∠ DCF (= ∠ FCR) sein. Nun ist ∠ MBA = ∠ MBC, und ∠ MCB = ∠ MCD, da ABCD ein ▱ um ⊙ sein soll, folglich ergiebt sich ∠ MBI = ∠ MCF = R. Aus ähnlichen Gründen zeigt sich aber ferner ∠ MDG ebenfalls = ∠ MAH = R, folglich befinden sich die Spitzen des gesuchten ▱ ABCD in den Schneidungspunkten der aus M auf die Seiten des ▱ IFGH gefällten ⊥⊥, und es kömmt nur noch auf die Bestimmung dieses Punktes an. Diese ergiebt sich

III. B. Zweiter Abschnitt.

Aufgaben, welche durch die Lehre von der Aehnlichkeit lösbar sind.

1stes Kapitel.

Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben.

1665. Fig. 294. **Aufgabe.** △ aus h, h′, h″.

Analysis. Nach 481 ist $a : b : c = h' : h : \frac{hh'}{h''}$, also nach 412 die Gestalt des verlangten △ gegeben, aus welcher sich die Größe durch eins von den gegebenen Stücken ableiten läßt.

Auflösung. Bestimme l so, daß $h'' : h = h' : l$ ist, zeichne ein △ ABC mit den Seiten $AC = h$, $CB = h'$, $BA = l$, ziehe $AE = h$ und $\perp BC$, und lege durch E eine $\fallingdotseq$ zu BC, so erhält man das verlangte △ ABC.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß der $\perp$ aus B auf $b = h'$, und der $\perp$ aus C auf $c = h''$ ist. Nach 480 hat man $AE : BD = AC : BC = AC : BC = h : h'$; nun ist $AE = h$, folglich muß $BD = h'$ sein. In derselben Art hat man $AE : CF = AB : BC = AB : BC = l : h'$. Nach der Konstruktion kann man aber statt $l : h'$, $h : h''$ setzen, wodurch sich $AE : CF = h : h''$, also auch $CF = h''$ ergiebt, da $AE = h$ gezeichnet ist.

1666. **Aufgabe.** △ aus $(h : h' : h'')$ (der Gestalt nach).

Analysis. Folgt aus 481 und 412.

1667. Fig. 295. Aufgabe. △ aus h, t, (a+b).

Analysis. Verlängert man a über C um $\frac{b}{2}$, so ergiebt sich △ ADF durch $DF = \frac{a+b}{2}$, DA=t, u. AE=h, weshalb es nach der Konstruktion dieses △ nur darauf ankäme, FC : CA = 1 : 2 festzustellen, welches erreicht wird, wenn man DH = (a + b) abschneidet, und AC ∦ DH zieht, u. s. w.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1668. Aufgabe. △ aus h, (a + b), ∠ (ta).

Analysis. Führt durch 114 zu 1667.

1669. Aufgabe. △ aus t, (a + b), ∠ (ta).

Analysis. Führt durch 114 zu 1667.

1670. Fig. 296. Aufgabe. △ aus h, t, (a — b).

Analysis. Schneidet man $CF = \frac{b}{2}$ ab, so ergiebt sich △ ADF durch $DF = \frac{a-b}{2}$, DA=t und AE = h, weshalb es nach der Konstruktion dieses △ nur darauf ankäme, FC : CA = 1 : 2 festzustellen. Dies wird erreicht, wenn man DH = (a — b) bestimmt und AC ∦ DH zieht, u. s. w.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1671. Aufgabe. △ aus h, (a — b), ∠ (ta).

Analysis. Führt durch 114 zu 1670.

1672. Aufgabe. △ aus t, (a — b), ∠ (ta).

Analysis. Führt durch 114 zu 1670.

1673. Fig. 297. Aufgabe. △ aus h, t', (a + b).

Analysis. Bestimmt man BG = (a+b), und zieht durch E_7 den Endpunkt von t', eine ∦ zu h, so ergiebt sich △ BEG aus BG = (a + b), BE = t' und $EF = \frac{h}{2}$, weshalb es nach der Konstruktion dieses △ nur darauf ankäme, EC : CG = 1 : 2 festzustellen. Dies wird aber erreicht,

wenn man $BH = \frac{a+b}{2}$ abschneidet, und $EC \fallingdotseq HB$ legt, u. s. w.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1674. Fig. 298. Aufgabe. $\triangle$ aus h, t', (a—b).

Analysis. Die Analysis 1673 paßt wörtlich für diese Aufgabe, wenn man (a — b) statt (a + b) liest, und Fig. 298 benutzt.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1675. Fig. 299. Aufgabe. $\triangle$ aus h, t'', (a + b).

Analysis. Zieht man durch E, den Endpunkt von t'', eine $\fallingdotseq$ zu a, und schneidet $HG = HC$ ab, so zeigt sich $\triangle$ ECG durch $EG = \frac{a+b}{2}$, $EC = t''$, und $FC = \frac{h}{2}$ bestimmt, weshalb man nach der Konstruktion desselben nur 72 zur Feststellung von H anzuwenden hat, u. s. w.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1676. Fig. 300. Aufgabe. $\triangle$ aus h, t'', (a—b).

Analysis. Die Analysis von 1675 paßt wörtlich für diese Aufgabe, wenn man (a — b) statt (a + b) liest, und Fig. 300 benutzt.

1677. Aufgabe. $\triangle$ aus b, t', (a : h), z. B. a soll = h werden.

Analysis. Mittelst b und (a : h) läßt sich nach der Festlegung von b durch 581 ein Ort für B bestimmen. Der zweite ergiebt sich, wenn man um die Mitte von b mit t' einen $\odot$ beschreibt, u. s. w,

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1678. Aufgabe. $\triangle$ aus b, β, (a : h).

Analysis. Durch b und (a : h) läßt sich nach der Festlegung von b durch 581 ein Ort für B bestimmen. Der zweite ergiebt sich mittelst b und β nach 320 u. s. w.

1679. Aufgabe. $\triangle$ aus b, h', (a : h).

Analysis. Ergiebt sich entweder wie in 1678 mittelst der Oerter 581 und 79, oder durch 480 und 462.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1680. Aufgabe. △ aus b, h″, (a : h).

Analysis. Durch b und (a : h) läßt sich nach der Festlegung von b nach 581 ein Ort für B bestimmen. Den zweiten Ort giebt die Lage der aus A an den um C mit h″ beschriebenen ⊙ führende Tangente, u. s. w.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1681. Aufgabe. △ aus b, r, (a : h).

Analysis. Trägt man b als Sehne in die mit r beschriebene Kreislinie, so bildet diese einen Ort für B; der zweite läßt sich mittelst b und (a : h) nach 581 bestimmen u. s. w.

1682. Aufgabe. △ aus b, t, (a : h).

Analysis. Durch b und (a : h) ergiebt sich, wenn man b gezeichnet hat, nach 581 ein Ort für B. Denkt man sich hierauf um A einen ⊙ mit t beschrieben, so erhält man durch 530 die Lage von a, u. s. w.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1683. Aufgabe. △ aus b, t″, (a : h).

Analysis. Durch b und (a : h) ergiebt sich, wenn man b gezeichnet hat, nach 581 ein Ort für B. Denkt man sich hierauf um C einen ⊙ mit t″ beschrieben, so ergiebt sich durch 530 die Lage von c u. s. w.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1684. Aufgabe. △ aus h′, h″, und a soll = h werden.

Analysis. Durch h′ : h″ ergiebt sich nach 482 (c : b). Dies Verhältniß und (a : h) = 1 : 1 bestimmen nach 595 die Gestalt des verlangten △, welcher die richtige Größe durch h′ oder h″ gegeben werden kann.

1685. Aufgabe. △ aus a, t′, (h′ : h″).

Analysis. (h′ : h″) bestimmt (c : b) nach 482. Durch a und (c : b) ergiebt sich nach 593 ein Ort für A. Beschreibt man um den Endpunkt B der festgelegten Linie a einen ⊙

mit t', so läßt sich schließlich die Lage von b, und hiedurch das verlangte △ ABC nach 530 zeichnen.

1686. Aufgabe. △ aus t, t', (h : h').

Analysis. (h : h') bestimmt nach 480 (b : a). Mittelst dieses Verhältnisses und (t : t') läßt sich die Gestalt des verlangten △ bestimmen, da über c zweimal der Ort 593 (für den Schwerpunkt und für die Spitze des △) gegeben ist, und nach 530 aus der Mitte von c eine Linie gezogen werden kann, welche von beiden Oertern in zwei sich wie 1 : 2 verhaltende Abschnitte getheilt wird. Aus der Gestalt folgt die Größe durch die Benutzung von t oder t'. Einfacher ergiebt sich die Gestalt des verlangten △ in folgender Art. Theile eine Linie 2t'' in drei gleiche Theile, konstruire den Ort 593 über dem zweiten Drittel für das Verhältniß (t : t'), und denselben Ort über der ganzen Linie für das Verhältniß (h : h'), verlängere die von dem Schneidungspunkt beider Oerter nach der Mitte von 2t'' führende Linie um sich selbst, und verbinde den Endpunkt der Verlängerung mit einem der beiden Endpunkte von 2t''.

1687. Aufgabe. △ aus t', t'', (h : h').

Analysis. Durch (h : h') hat man nach 482 (b : a); wird daher t'' um sich selbst verlängert, so bestimmt sich nach 123 über 2t'' durch (h : h') der Ort 593. Schneidet man denselben aus dem Schwerpunkt mit $\frac{2}{3}$t', verlängert die von dem Schneidungspunkt nach der Mitte von 2t'' führende Linie um sich selbst, und verbindet schließlich den Endpunkt der Verlängerung mit einem der beiden Endpunkte von 2t'', so ergiebt sich das verlangte △ ABC.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1688. Aufgabe. △ aus a, (h' : h''), (t' : t'').

Analysis. (c : b) = (h' : h'') und (t' : t'') bestimmen nach 593 zwei Oerter über a. Zieht man daher nach 530 aus der Mitte von a eine durch beide Oerter im Verhältniß 1 : 2 getheilte Linie, so bestimmen sich der Schwerpunkt und die Spitze des verlangten △ ABC u. s. w.

Anmerkung. Eine zweite Analysis und Auflösung ergiebt sich in derselben Art wie am Ende von 1686.

1689. Aufgabe. △ aus t, (b : c), (t′ : t″).

Analysis. Durch (b : c) und (t′ : t″) läßt sich die Gestalt des verlangten △ auf doppelte Art wie in 1686 bestimmen. Die Größe ergiebt sich schließlich durch t. Auf einem dritten Wege zeigt sich die Gestalt des verlangten △ bestimmbar, wenn man, Fig. 40., 123 auf t′ und t″ zugleich anwendet, da sich hiedurch in dem □ BCDE BD : EC = t′ : t″ und BC : ED = 1 : 2 ergiebt. Zieht man daher durch E eine ∓ EF zu BD, so bestimmt sich CF = 3 BC, und über CF der Ort 593 durch (t′ : t″). Nun ist aber über BC mittelst (b : c) derselbe Ort bekannt, folglich hat man zur Bestimmung der Spitze des gesuchten ähnlichen △, EA ∓ und = der beliebig angenommenen Linie BC nach 1585 zwischen beide Oerter zu schieben.

1690. Aufgabe. △ aus a, r, (bc).

Analysis. Durch r und (bc) ergiebt sich h, da nach 556 bc = 2rh ist; man hat daher △ aus a, r, h, oder △ aus a, α, h (788) zu konstruiren.

1691. Aufgabe. △ aus a, α, (bc).

Analysis 1). Durch a und α ergiebt sich nach 321 r; man hat also 1690 zu konstruiren.

Analysis 2). (bc) und α bestimmen f^2 nach 486, f^a und a ferner h nach 185; man erhält also △ aus a, α, h (786) zu verzeichnen.

1692. Aufgabe. △ aus h, α, (bc).

Analysis. Durch (bc) und h ergiebt sich r, da nach 556 bc = 2rh ist; man hat also △ aus h, a, r, oder △ aus a, h, α (788) zu konstruiren.

1693. Fig. 76. Aufgabe. △ aus h, m, s.

Analysis 1). Verlängert man m bis D, so erhält man die Sehne AD, da nach 563 2rh = m × AD ist,

folglich hat man nur AD in den ⊙ mit r zu legen, und hierauf △ AFE aus m und h festzustellen, u. s. w.

Analysis 2.) Durch h und m ergiebt sich $\beta - \gamma$ nach 146; man hat also △ aus r, h, $(\beta - \gamma)$, siehe 335, zu konstruiren.

1694. Aufgabe. △ aus h, m, (bc).

Analysis. Durch (bc) und h ergiebt sich r nach 557; man hat also 1693 zu verzeichnen.

1695. Aufgabe. △ aus α, (bc), (a + h).

Analysis. Durch α und (bc) ergiebt sich nach 486 f^a, also auch (ah). (a + h) und (ah) bestimmen aber a und h nach 458; man erhält also 788 zu konstruiren.

1696. Aufgabe. △ aus α, (bc), (a − h).

Analysis. Führt wie in 1695 durch 460 zu 788.

1697. Aufgabe. △ aus α, (bc), (a : h).

Analysis. Führt wie in 1695 durch 462 zu 788.

1698. Aufgabe. △ aus α, (bc), $(a^2 + h^2)$.

Analysis. Führt wie in 1695 durch 468. a. zu 788.

1699. Aufgabe. △ aus α, (bc), $(a^2 - h^2)$.

Analysis. Führt wie in 1695 durch 470 zu 788.

1700. Aufgabe. △ aus α, (bc), (a + b + c).

Analysis. Durch α und (bc) ergiebt sich f^a nach 486, durch f^a und (a + b + c) aber ϱ nach 342; also hat man △ aus α, ϱ, (a + b + c) (1357) zu konstruiren.

1701. Aufgabe. △ aus α, ϱ, [(b + c) : a].

Analysis. α und ϱ bestimmen (b + c − a) nach 1354, [(b + c) : a] und (b + c − a) ergeben ferner a nach 453, folglich läßt sich das verlangte △ nach 822 konstruiren.

1702. Aufgabe. △ aus α, ϱ, [(b + c) a].

Analysis. Ergiebt sich wie in 1701 durch 460.

1703. Aufgabe. △ aus α, ϱ, $[(b + c)^2 - a^2]$.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1701 durch 205.

1704. Aufgabe. △ aus α, ϱ, $[(b + c)^2 + a^2]$.

Analysis. α und ϱ bestimmen nach 1354 [(b + c) − a], also auch $[(b + c) - a]^2$, oder nach 204 $(b + c)^2 -$

$-2(b+a)a+a^2$. Zieht man diesen Werth von dem gegebenen $[(b+c)^2+a^2]$ ab, so erhält man $2(b+c)a$, oder $(b+c)a$ bekannt. Durch $(b+c)a$ und $[(b+c)-a]$ ergiebt sich aber endlich nach 460 a, folglich kann die Aufgabe schließlich durch 822 gelöst werden.

1705. Aufgabe. $\triangle$ aus α, (bc), $(b+c-a)$.

Analysis. α und $(b+c-a)$ bestimmen ϱ nach 1354, α und (bc) ferner f^a nach 486, ϱ und f^a aber $(a+b+c)$ nach 342; man erhält also α, ϱ, $(a+b+c)$, siehe 1357, zu verzeichnen.

1706. Fig 295. Aufgabe. $\triangle$ aus h, $t_{(m:n)}$, $(a+b)$.

Analysis. Zieht man $DG \parallel c$, so ergiebt sich $DC+CG : (a+b) = CD : CB = m : m+n$, also die Länge von $(DC+CG)$. Hieraus folgt, wenn $CG = CF$ gemacht wird, daß $\triangle$ ADF aus $DF = (DC+CG)$, $DA = t$ und $AE = h$ gezeichnet werden kann, und es kömmt deshalb nach Konstruktion dieses $\triangle$ nur darauf an $AC : CF = m+n : m$ festzustellen. Dies läßt sich aber erreichen, wenn man $DH = (a+b)$ abschneidet, und $AC \parallel DH$ zieht, u. s. w.

Zusatz. Es ergeben sich 2 verschiedene Resultate.

1707. Fig. 296. Aufgabe. $\triangle$ aus h, $t_{(m:n)}$, $(a-b)$.

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1706, wenn man $-$ statt $+$ ließt, und Fig. 296. benutzt.

1708. Fig. 301. Aufgabe. $\triangle$ aus $t_{(m:n)}$, $t_{(p:q)}$, α. [d. h. dieselbe Seite a soll von 2 (A durchlaufende) Transversalen so getheilt werden, daß sich einmal beide Abschnitte von a wie m : n, und das anderemal wie p : q bestimmen.]

Analysis. Führt man das Verhältniß $t_{(m:n)} : t_{(p:q)}$ ein, so ergiebt sich die Gestalt des verlangten $\triangle$, wenn man eine beliebige Linie $\mathfrak{BC}$ so theilt, daß $\mathfrak{CD} : \mathfrak{DB} = m : n$, und $\mathfrak{CE} : \mathfrak{EB} = p : q$ wird, über $\mathfrak{DE}$ mittelst $t_{(m:n)} : t_{(p:q)}$

den Ort 593, und über BC durch α den Ort 320 beschreibe, u. s. w.

1709. Fig. 302. Aufgabe. △ aus a, $t_{(m:n)}$, $t'_{(p:q)}$.

Analysis. Zieht man AD ∦ a, und verlängert t' bis D, so zeigt sich ▭ ADFB bestimmt, da von demselben AD, BF, BD durch die Proportionen

AD : a = q : p,

BF : a = m : m + n,

ED : t' = q : p gegeben sind, und AF = t außerdem bekannt ist. Dies ▭ läßt sich aber nach g. Betr. §. 26. zeichnen, und deshalb auch das verlangte △ konstruiren.

1709. a. Fig. 302. Aufgabe. △ aus a, $t'_{(m:n)}$, $t''_{(p:q)}$.

Analysis. Verlängert man t' und t'' bis zu der durch A zu a gezogenen ∦ GD, so zeigt sich ▭ GDBC bestimmt, da von demselben BD, CG, GD durch die Proportionen

BD : t' = m + n : n,

CG : t'' = p + q : q,

{AD : a = m : n}
{AG : a = q : p}

gegeben sind, und BC = a außerdem bekannt ist. Dies ▭ läßt sich aber nach g. Betr. §. 26. zeichnen, und deshalb auch das verlangte △ konstruiren.

1710. Aufgabe. △ aus h, r, (b + c).

Analysis. Durch h und r ergiebt sich (bc) nach 557, durch (b + c) und (bc) aber b und c nach 458; man hat also △ aus b, c, h zu konstruiren.

1711. Aufgabe. △ aus h, r, (b − c).

Analysis. Ergiebt sich wie in 1710, wenn man 460 statt 458 benutzt.

1712. Fig. 23. Aufgabe. △ aus h', h'', (β − γ).

Analysis. Bestimmt man AE = c, so ergiebt sich die Gestalt des △ AEC, da nach 139 ∠ CAE = (β − γ) sein muß, und CA : AE oder b : c = h'' : h' nach 480

gegeben ist. Aus der Gestalt des △ AEC läßt sich aber ferner die Gestalt des △ ABC ableiten, folglich ist derselben nur schließlich durch h' oder h'' die richtige Größe zu geben.

1713. Fig. 303. Aufgabe. △ aus a, m, r.

Analysis. Die Verlängerung von m trifft die Mitte D des Bogens BC, weshalb ∠ EBD = ∠ DAB, also auch △EDB ∼ △ADB, folglich m + ED : DB = DB : ED sein muß, durch welche Proportion sich ED bestimmen läßt, da BD gegeben ist.

Auflösung. Trage BC = a als Sehne in den ⊙ mit r, ziehe aus B eine Linie nach der Mitte D des Bogens BC, errichte in B auf dieselbe den ⊥ BF = m, zeichne über BF, als Durchmesser genommen, einen ⊙, ziehe die durch den Mittelpunkt gehende Sekante DG, und beschreibe mit dieser Länge um D eine Kreislinie, so bestimmt der Schnitt mit dem ⊙ um M die Spitze des gesuchten △ ABC.

Beweis. Da CB in D halbirt ist, muß ∠ EBD = ∠ DAB, also △ EBD ∼ △ ABD, und deshalb

AD : DB = DB : ED sein. Nun ist aber

DG : DB = DB : DH, folglich hat man

DH = ED, also auch HG oder FB oder m = EA, während a und r geradezu verzeichnet sind.

Zusatz. Es ergeben sich 2 ≦ △△.

1713. a. Aufgabe. △ aus α, m, r.

Analysis. Nach 321 bestimmen r und α a; man hat also 1713 zu konstruiren.

1714. Aufgabe. △ aus a, m, α.

Analysis. a und α bestimmen nach 320 r; man erhält also 1713 zu konstruiren.

Auflösung. Nachdem über a mittelst 320 ein den ∠ α fassender Abschnitt beschrieben ist, ergiebt sich die weitere Auflösung ganz wie in 1713.

Sollte bei der Konstruktion von α ausgegangen, und zunächst (Fig. 304.) $m = AI$ festgelegt werden, so ergiebt sich die folgende Konstruktion. Verlängere AI oder m um AD $= \frac{a}{2}$, errichte in D und A $\perp\perp$, schneide $AE = AF$ ab, verbinde F mit G, der Mitte von AI, bestimme $GH = GF$, und zeichne $HB = AF$, so ergiebt sich die I durchlaufende Linie $BC = a$.

Beweis. AF^2 oder HB^2 ist $= GF^2 - GA^2$, oder $GH^2 - GA^2$, also auch nach 205 $= (GH + GA)(GH - GI) = HA \times HI$, weshalb $\triangle HIB \sim \triangle HAB$ sein muß. Da nun hieraus folgt, daß $\angle CBH = \angle HAB = \angle CAH = \angle RAD$ ist, so ergiebt sich ferner, wenn man $HN \perp CB$ zieht, $\triangle HNB \cong \triangle AED$, also $NB = \frac{a}{2}$, und daß sich um das $\square ABHC$ ein $\odot$ beschreiben läßt. Aus dem Letzteren geht schließlich hervor, daß $BH = HC$, also wirklich $BC = a$ gezeichnet ist.

Anmerkung. In der vorstehenden Konstruktion ist eigentlich die örtliche Aufgabe gelöst:

durch einen Punkt in der Halbirungslinie eines festliegend gegebenen $\angle$ eine von den Schenkeln desselben begrenzte Linie von bestimmter Länge zu legen.

1715. Fig. 305. Aufgabe. $\triangle$ aus a, α und der von A bis a reichenden Halbirungslinie AE oder g des Nebenwinkels von α. (Analogie zu 1714.)

Analysis. Durch a und α bestimmt sich nach 329 r. Die Verlängerung von g trifft die Mitte D des Bogens BAC, da sich zeigen läßt, daß eine α und den Bogen CFB halbirende Linie $AF \perp g$ stehen muß. Hieraus folgt die Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ EDB und ADB, da $\angle DCB = \angle DBC$, also auch $\angle DBE = \angle DAB$ sein muß. Daraus geht schließlich ED — g : DB = DB : DE hervor, durch

welche Proportion ED bestimmt, folglich die Aufgabe gelöst werden kann, da BD gegeben ist.

Auflösung. Obwohl es am nächsten liegt, analog 1713 zu konstruiren, stellen wir analog 1714 eine Auflösung her, da letztere zugleich für den Fall paßt, wenn man die Aufgabe örtlich auffaßt.

(Fig. 306.) Zeichne $\angle BAC = \alpha$, die Halbirungslinie AI des Neben$\angle = g$, verlängere g um $AD = \frac{a}{2}$, errichte in D und A $\perp\perp$, schneide $AE = AF$ ab, verbinde F mit G, der Mitte von AI, bestimme $GH = GF$, und $HB = AF$, so ergiebt sich die I durchlaufende Linie $BC = a$.

Beweis. AF^2 oder HB^2 ist $= GF^2 - GA^2$, oder $GH^2 - GA^2$, also auch nach 205 $= (GH + GI)(GH - GA) = HA \times HI$, weshalb $\triangle HIB \sim \triangle HAB$ sein muß. Da nun hieraus folgt, daß $\angle HAB = \angle HBI$, also auch $\angle HBC = \angle BAG = \angle CAH$ ist, so ergiebt sich ferner, wenn man $HN \perp CB$ zieht, $\triangle HNB \cong \triangle AED$, also $NB = \frac{a}{2}$, und daß sich um das $\square ABCH$ ein $\odot$ beschreiben läßt. Aus dem letzteren geht schließlich hervor, daß $BH = HC$, also wirklich $BC = a$ konstruirt ist.

1716. Fig. 307. Aufgabe. $\triangle$ aus m, α und dem Unterschied d der von m in a gebildeten Abschnitte.

Analysis. Legt man α und m fest, errichtet in dem Endpunkt E von m einen $\perp EF$ auf m, und zieht durch F eine $\parallel$ zu c, so ergiebt sich $\triangle FHE \cong \triangle EBG$, also $EH = EB$, und deshalb $CH = d$. Da nun auch $\angle FGA = \angle GFA = \angle EFH$ ist, bildet die gegebene Linie EF die Halbirungslinie des Neben$\angle$ von dem bekannten $\angle CFH = \alpha$, weshalb man in Bezug auf $\triangle CFH$ die Konstruktion von 1715 zur Feststellung von BC anzuwenden hat.

Anmerkung. Hiemit ist eigentlich die örtliche Aufgabe gelöst:

durch einen Punkt in der Halbirungslinie eines festliegend gegebenen ∠ eine von den Schenkeln desselben begrenzte Linie so zu legen, daß der Unterschied der beiden entstehenden Abschnitte eine gegebene Länge erhält.

1717. Aufgabe. △ aus m′, ϱ, α.

Analysis. Da man α um den ⊙ mit ϱ nach 336 festlegen kann, und m′ den Mittelpunkt desselben treffen muß, kömmt es nur darauf an, die in der Anmerkung von 1714 angeführte Aufgabe zu lösen, welches in 1714 selbst geschehen ist, und hierauf aus dem einen Endpunkt von m′ eine Tangente an den ⊙ mit ϱ zu legen.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1718. Aufgabe. △ aus m′, (b + c — a), ϱ.

Analysis. Durch (b + c — a) und ϱ ergiebt sich nach 1364 α, woher man 1717 zu verzeichnen hat.

1719. Aufgabe. △ aus m′, (b + c — a), α.

Analysis. Durch (b + c — a) und α ergiebt sich nach 1354 ϱ, woher man 1717 zu verzeichnen hat.

1720. Fig. 308. Aufgabe. △ aus a, h, (β — γ).

Analysis 1) ꝛc. Siehe g. Betr. §. 31.

Analysis 2). Zeichnet man ∠ ABD = γ, so ergiebt sich ∠ CBD = (β — γ). Zieht man ferner, um h anzuwenden, eine ∦ zu a durch A, so bestimmt sich BD. Legt man endlich, um a zu benutzen, eine ∦ zu b durch B, so erhält man AE = a, und △ ADB ∾ △ EDB, da ∠ DEB = ∠ ACB = ∠ ABD und ∠ EDB = ∠ ADB ist. Hieraus folgt aber a + DA : BD = BD : DA, durch welche Proportion DA, folglich auch △ ABC gezeichnet werden kann, da BD gegeben ist.

Auflösung. Zeichne CB = a, ∠ CBD = (β — γ), lege zu a eine um h entfernte ∦ ED, errichte in B auf BD

den $\perp$ BF = a, beschreibe über denselben, als Durchmesser genommen, einen $\odot$, ziehe aus D eine das Centrum H durchlaufende Sekante DG, und bestimme DN = DA, so bildet ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß $\angle$ DBA = $\angle$ ACB ist, da hieraus $\angle$ ABC — $\angle$ ACB = $\angle$ CBD = $(\beta-\gamma)$ folgt, und a und h geradezu verzeichnet sind. Bestimmt man hiezu DG = DE, so ergiebt sich AE = NG = a, also $\angle$ AEB = $\angle$ ACB. Nun ist aber ED : DB = DB : AD, da GD : DB = DB : DN konstruirt wurde, folglich hat man $\triangle$ EDB $\sim$ $\triangle$ ADB, also $\angle$ DEB = $\angle$ ABD, und wirklich $\angle$ ABD = $\angle$ ACB.

Anmerkung. Die Analysis 2) der vorstehenden Aufgabe ist von dem Kadetten v. Gleißenberg gefunden.

1721. Aufgabe. $\triangle$ aus a, $(\beta-\gamma)$, m.

Analysis. Nach 145 bestimmt sich durch m und $(\beta-\gamma)$ h; man hat also 1720 zu verzeichnen.

1722. Aufgabe. $\triangle$ aus a, h, m.

Analysis. Nach 145 bestimmt sich durch h und m, $(\beta-\gamma)$; man hat also 1720 zu verzeichnen.

1722 a. Fig. 397. Aufgabe. $\triangle$ aus h', h'', m.

Analysis. Zieht man durch den Endpunkt D von m eine $\perp$ DF zu h', so zeigt sich diese bestimmt, denn h'' : h' ist = b : c = CD : DB, weshalb DF : h' (EE) = h'' : h' + h'' sein muß. Es läßt sich also das $\triangle$ ADF konstruiren, und die Figur durch Abtragung des $\angle$ DAB = $\angle$ DAF so weit vollenden, daß es nur darauf ankommt: eine Linie CB durch D zu legen, deren Abschnitte CD und DB ein gegebenes Verhältniß, nämlich (b : c) oder h'' : h' erhalten, welche Hilfsaufgabe 516 gelöst ist.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: wenn zwei von den 3 Stücken: h', h'' und der $\perp$, welchen man aus dem in a liegenden Endpunkt von m auf b oder c fällen kann,

gegeben sind, ist stets das dritte mittelst der Proportion $\perp : h' = h'' : h' + h''$ bestimmt.

1723. Fig. 233. Aufgabe. $\triangle$ aus h, $(a + b + c)$, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Verlängert man a über B um c, über C um b, so ergiebt sich $DE = (a + b + c)$ und $\angle E = \frac{\gamma}{2}$, $\angle D = \frac{\beta}{2}$, also $\angle D - \angle E = \frac{\beta - \gamma}{2}$, weshalb $\triangle$ ADE nach 1720 konstruirt, und aus demselben mittelst 73 das verlangte $\triangle$ ABC abgeleitet werden kann.

1724. Aufgabe. $\triangle$ aus h, $(a + b + c)$, m.

Analysis. Nach 145 bestimmt sich $(\beta - \gamma)$ durch h und m; man hat also 1723 zu verzeichnen.

1725. Aufgabe. $\triangle$ aus m, $(a + b + c)$, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Nach 145 bestimmt sich h durch m und $(\beta - \gamma)$; man hat also 1723 zu verzeichnen.

1726. Fig. 232. Aufgabe. $\triangle$ a, ϱ, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Verbindet man den Mittelpunkt O des $\odot$ im $\triangle$ mit B und C, so bestimmt sich $OBC = \frac{\beta}{2}$, und $OCB = \frac{\gamma}{2}$, also $\angle OBC - \angle OCB = \frac{\beta - \gamma}{2}$; man kennt daher vom $\triangle$ OBC die Grundlinie $BC = a$, die Höhe $= \varrho$, und den Unterschied der $\measuredangle$ an der Grundlinie. Zeichnet man demnach $\triangle$ OBC nach 1720, so hat man zur Vollendung des gesuchten $\triangle$ ABC nur mit der Höhe ϱ einen $\odot$ zu beschreiben, und aus B und C an denselben Tangenten zu legen.

1727. Fig. 236. Aufgabe. $\triangle$ aus a, ϱ', $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Verbindet man den Mittelpunkt M des $\odot$ von ϱ' mit B und C, so ergiebt sich $\angle BCM = R - \frac{\gamma}{2}$, und $\angle CBM = R - \frac{\beta}{2}$, also $\angle BCM - \angle CBM =$

$\frac{\beta-\gamma}{2}$, weshalb △ MBC aus der Grundlinie CB = a, der Höhe MG = ϱ', und dem Unterschiede der ∠ an der Grundlinie = $\frac{\beta-\gamma}{2}$ nach 1720 gezeichnet, und schließlich das verlangte △ ABC festgestellt werden kann, indem man an den mit ϱ' beschriebenen ⊙ aus B und C Tangenten zieht, und dieselben rückwärts verlängert.

1728. Fig. 309. Aufgabe. △ aus a, h, (b + c).

Analysis 1). Durch h ist eine um h entfernte ∥ E zu a, durch (b + c) = CE ein um C beschriebener ⊙ gegeben. Damit sich nun AE = AB bestimmt, kömmt es zur Feststellung von A nur darauf an: eine Kreislinie zu konstruiren, deren Mittelpunkt in L fällt, die B durchläuft und den ⊙ um C von Innen berührt, welche Aufgabe 578 gelöst ist.

Analysis 2). Durch a und h ergiebt sich f^a nach 185, durch a + (b + c) und f^a aber ϱ nach 342; man hat also △ aus a, (b + c), ϱ, siehe 1854, zu konstruiren.

1729. Aufgabe. △ aus a, h, (b — c).

Analysis 1). Fig. 309. Ergiebt sich wörtlich wie in 1) 1728, nur muß — statt +, Außen statt Innen gelesen werden.

Analysis 2). Fig. 236. Durch a und h ergiebt sich f^a nach 185, durch a + (b — c) und f^a aber ϱ''' nach 1544; man hat also △ aus a, (b — c), ϱ''' zu konstruiren, zu welcher Aufgabe die folgende Analysis gehört:

Durch a — (b — c), oder a + c — b erhält man BE = $\frac{a-(b-c)}{2}$, also auch die nach 1543 gleiche Länge AI, welche mit ϱ''' den Neben∠ von α bestimmt, so daß man zur Feststellung von a nur die 1477 gezeigte Hilfsaufgabe zu lösen hat.

1730. Fig. 309. Aufgabe. △ aus p, q, (b + c).

Analysis 1). Setzt man p und q in einer geraden Linie BC an einander, so ergiebt sich die Lage von h. Be-

schreibt man um C einen ⊙ mit (b + c), so bestimmt sich ferner AE = AB; man hat also zur Feststellung von A eine Kreislinie zu beschreiben, deren Mittelpunkt in L′ fällt, die B durchläuft, und den ⊙ um C von Innen berührt, welche Aufgabe 578 gelöst ist.

Analysis 2). Nach 209 ist $p^2 - q^2 = b^2 - c^2$, oder nach 205 (p + q) (p − q) = (b + c) (b − c), also (b + c) : p + q = p − q : (b − c). Aus dieser Proportion kann aber (b − c), und da zugleich (b + c) gegeben ist, sowohl b als c abgeleitet werden, weshalb sich die Aufgabe auf △ aus (p + q), b, c oder △ aus a, b, c reduzirt.

1731. Fig. 309. Aufgabe. △ aus p, q, (b − c).

Analysis 1). Ergiebt sich wörtlich wie 1730. 1), nur muß — statt +, Außen statt Innen gelesen werden.

Analysis 2). Ergiebt sich wörtlich wie in 1713. 2), nur muß (b + c) statt (b − c), und umgekehrt, gelesen werden.

1732. Fig. 309. Aufgabe. △ aus der Lage und Größe von a, einem geraden Orte L″ für A und (b + c).

Analysis. Beschreibt man um C einen ⊙ mit (b + c), so kömmt es, da AE = AB sein muß, zur Feststellung von A nur darauf an: eine jenen ⊙ von Innen berührende und B durchlaufende Kreislinie so zu konstruiren, daß der Mittelpunkt derselben in L″ fällt, welche Aufgabe 578 gelöst ist.

1733. Fig. 309. Aufgabe. △ aus der Lage und Größe von a, einem geraden Orte L″ für A und (b − c).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1732, nur hat man — statt +, Außen statt Innen zu lesen.

1734. Fig. 362. Aufgabe. △ aus h, t, (b + c).

Analysis. Verlängert man AE oder t um sich selbst, und vollendet das 123 angeführte ▱, so bestimmt sich im △ ABD, AD = 2t, DB + AB = (b + c), und die Lage von a, also ein gerader Ort für die Spitze B, da △ AEF

mittelst h und t bestimmt ist. Da nun die Konstruktion dieses △ ABD nach 1732 ausgeführt werden kann, ergiebt sich auch das verlangte △ ABC.

1735. Aufgabe. △ aus h, t, (b — c).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1734, nur muß — statt +, 1733 statt 1732 gelesen werden.

1736. Aufgabe. △ aus h, ϱ, (b + c).

Analysis. Da nach 341 (a + b + c) ϱ = a h, also a + b + c : a = h : ϱ ist, ergiebt sich d. G. d. V. Gl. b + c : h — ϱ = a : ϱ, durch welche Proportion a bestimmt werden kann. Hiemit ist die Aufgabe auf △ aus a, ϱ, (b + c), siehe 1354, reduzirt.

1736. a. Fig. 310. Aufgabe. △ aus h, (pq), α.

Analysis. Da (pq) = h.DE ist, kennt man DE, also auch, wenn man in B einen ⊥ errichtet, nach 348 BG = h — DE. Nun ist aber ∠ BGC = α gegeben, folglich läßt sich der Durchmesser GC bestimmen, und das verlangte △ ABC nach 789 zeichnen.

1737. Fig. 311. Aufgabe. △ aus (a+b), (c+b).

Analysis. Bestimmt man BD = (a + b), CE = (b + c), so ergiebt sich ∠ CDA = ½R, und hiedurch die Lage DA gegen (a+b). Mittelst CE erhält man aber auch die Lage L ∓ a, folglich kömmt es, da AB = AE werden muß, nur darauf an: eine durch B gehende Kreislinie zu zeichnen, welche L berührt, und mit ihrem Mittelpunkt in die Lage DA fällt. Diese Aufgabe ist 1207 gelöst.

1738. Fig. 312. Aufgabe. △ aus (a+b), (c—b).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1737, nur auf Fig. 312. angewandt, und (b — c) statt (b + c) gelesen.

1739. Fig. 313. Aufgabe. △ aus (a—b), (c+b).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1737, nur auf Fig. 313. angewandt, und (a — b) statt (a + b) gelesen.

1740. Fig. 314. Aufgabe. △ aus (a—b), (c—b).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1737, nur auf

schreibt man um C einen ⊙ mit (b + c), so bestimmt sich ferner AE = AB; man hat also zur Feststellung von A eine Kreislinie zu beschreiben, deren Mittelpunkt in L′ fällt, die B durchläuft, und den ⊙ um C von Innen berührt, welche Aufgabe 578 gelöst ist.

Analysis 2). Nach 209 ist $p^2 - q^2 = b^2 - c^2$, oder nach 205 (p + q) (p − q) = (b + c) (b − c), also (b + c) : p + q = p − q : (b − c). Aus dieser Proportion kann aber (b − c), und da zugleich (b + c) gegeben ist, sowohl b als c abgeleitet werden, weshalb sich die Aufgabe auf △ aus (p + q), b, c oder △ aus a, b, c reduzirt.

1731. Fig. 309. Aufgabe. △ aus p, q, (b − c).

Analysis 1). Ergiebt sich wörtlich wie 1730. 1), nur muß — statt +, Außen statt Innen gelesen werden.

Analysis 2). Ergiebt sich wörtlich wie in 1713. 2), nur muß (b + c) statt (b − c), und umgekehrt, gelesen werden.

1732. Fig. 309. Aufgabe. △ aus der Lage und Größe von a, einem geraden Orte L″ für A und (b + c).

Analysis. Beschreibt man um C einen ⊙ mit (b + c), so kömmt es, da AE = AB sein muß, zur Feststellung von A nur darauf an: eine jenen ⊙ von Innen berührende und B durchlaufende Kreislinie so zu konstruiren, daß der Mittelpunkt derselben in L″ fällt, welche Aufgabe 578 gelöst ist.

1733. Fig. 309. Aufgabe. △ aus der Lage und Größe von a, einem geraden Orte L″ für A und (b − c).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1732, nur hat man — statt +, Außen statt Innen zu lesen.

1734. Fig. 162. Aufgabe. △ aus h, t, (b + c).

Analysis. Verlängert man AE oder t um sich selbst, und vollendet das 123 angeführte ▱, so bestimmt sich im △ ABD, AD = 2t, DB + AB = (b + c), und die Lage von a, also ein gerader Ort für die Spitze B, da △ AEF

mittelst h und t bestimmt ist. Da nun die Konstruktion dieses △ ABD nach 1732 ausgeführt werden kann, ergiebt sich auch das verlangte △ ABC.

1735. Aufgabe. △ aus h, t, (b — c).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1734, nur muß — statt +, 1733 statt 1732 gelesen werden.

1736. Aufgabe. △ aus h, ϱ, (b + c).

Analysis. Da nach 341 (a + b + c) ϱ = a h, also a + b + c : a = h : ϱ ist, ergiebt sich d. S. d. W. Gl. b + c : h — ϱ = a : ϱ, durch welche Proportion a bestimmt werden kann. Hiemit ist die Aufgabe auf △ aus a, ϱ, (b + c), siehe 1354, reduzirt.

1736. a. Fig. 310. Aufgabe. △ aus h, (p q), α.

Analysis. Da (p q) = h . DE ist, kennt man DE, also auch, wenn man in B einen ⊥ errichtet, nach 348 BG = h — DE. Nun ist aber ∠ BGC = α gegeben, folglich läßt sich der Durchmesser GC bestimmen, und das verlangte △ ABC nach 789 zeichnen.

1737. Fig. 311. Aufgabe. △ aus (a+b), (c+b).

Analysis. Bestimmt man BD = (a + b), CE = (b + c), so ergiebt sich ∠ CDA = ½R, und hiedurch die Lage DA gegen (a+b). Mittelst CE erhält man aber auch die Lage L, folglich kömmt es, da AB = AE werden muß, nur darauf an: eine durch B gehende Kreislinie zu zeichnen, welche L berührt, und mit ihrem Mittelpunkt in die Lage DA [illegible]. Diese Aufgabe ist 1207 gelöst.

1738. Fig. 312. Aufgabe. △ aus (a+b), [illegible]

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 173[illegible] Fig. 312. angewandt, und (b — c) statt (b + c) [illegible]

1739. Fig. 313. Aufgabe. △ aus [illegible]

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in [illegible] Fig. 313. angewandt, und (a — b) statt (a+b) [illegible]

1740. Fig. 314. Aufgabe. △ [illegible]

Analysis. Ergiebt sich wörtlich [illegible]

Fig. 314. angewandt, und (a — b) ſtatt (a + b), (c — b) ſtatt (c + b) geleſen.

1741. Aufgabe. △ aus (c — a), (a + b).

Analyſis. (c — a) + (a + b) iſt = (c + b); man erhält alſo 1737 zu verzeichnen.

1742. Aufgabe. △ aus (c — a), (c + b).

Analyſis. (c + b) — (c — a) iſt = (a + b); man erhält alſo 1737 zu verzeichnen.

1743. Aufgabe. △ aus (c + a), (a + b).

Analyſis. (c + a) — (a + b) iſt = (c — b); man erhält alſo 1738 zu verzeichnen.

1744. Aufgabe. △ aus (c + a), (c — b).

Analyſis. (c + a) — (c — b) iſt = (a + b); man erhält alſo 1738 zu verzeichnen.

1745. Aufgabe. △ aus (c + a), (a — b).

Analyſis. (c + a) — (a — b) iſt = (c + b); man erhält alſo 1739 zu verzeichnen.

1746. Aufgabe. △ aus (c + a), (c + b).

Analyſis. (c + a) — (c + b) iſt = (a — b); man erhält alſo 1739 zu verzeichnen.

1747. Aufgabe. △ aus (c — a), (a — b).

Analyſis. (c — a) + (a — b) iſt = (c — b); man erhält alſo 1740 zu verzeichnen.

1748. Aufgabe. △ aus (c — a), (c — b).

Analyſis. (c — b) — (c — a) iſt = (a — b); man erhält alſo 1740 zu verzeichnen.

1749. Fig. 315. Aufgabe. △ aus α, (a + b), (b + c).

Analyſis. Beſtimmt man BD = (b + c), AE = (a + b), ſo ergiebt ſich ∠ CDA = $\frac{\alpha}{2}$, und hiedurch die Lage DC gegen DB. Mittelſt AE und α erhält man aber auch die Lage L ∓ c, folglich kömmt es, da CE = CB werden muß, nur darauf an: einen Punkt C in der Lage DC ſo feſtzuſtellen,

daß sich die unter $2R - \alpha$ gegen L geneigte Linie CE = CB ergiebt, welche Hilfsaufgabe durch 548 lösbar ist.

Auflösung. Zeichne $\angle$ BDI = α, DB = (b+c), DI = (a+b), halbire $\angle$ BDI durch DH, lege IH $\nparallel$ BD, ziehe eine beliebige Linie OF $\nparallel$ DI, beschreibe mit derselben um O einen $\odot$, und bestimme BC $\nparallel$ GO, CA $\nparallel$ ID, so bildet ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis. Nach 545 hat man EC : CB = FO : OG, also CE = CB, da FO = OG ist, und deshalb EA oder ID oder (a+b) = BC + CA. Da nun ferner CA $\nparallel$ DI, also $\angle$ CAD = $2R - \alpha$, $\angle$ CDB aber = $\frac{\alpha}{2}$ bestimmt ist, ergiebt sich auch CA + AB = BD = (b+c).

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1750. Fig. 316. Aufgabe. $\triangle$ aus (a + b), (b — c), α.

Analysis, Auflösung, ꝛc. Ergiebt sich wörtlich wie in 1749, nur auf Fig. 316. angewandt, und (b — c) statt (b+c), $2R - \alpha$ statt α, und im Beweise CA — AB statt CA + AB gelesen.

1751. Fig. 317. Aufgabe. $\triangle$ aus α, (a — b), (b + c).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1749, nur auf Fig. 317. angewandt, und (a — b) statt (a + b) gelesen.

Auflösung. Zeichne $\angle$ BDI = $2R - \alpha$, DB = (b+c), DI = (a — b), halbire den Neben$\angle$ von BDI durch DH, lege L $\nparallel$ BD, ziehe eine beliebige Linie OF $\nparallel$ DI, beschreibe mit derselben um O einen $\odot$, und bestimme BC $\nparallel$ GO, CA $\nparallel$ ID, so bildet ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis ꝛc. Ergiebt sich für die Fig. 317. wörtlich wie in 1749, nur muß (a — b) statt (a + b), BC — CA statt BC + CA gelesen werden.

1752. Fig. 318. Aufgabe. $\triangle$ aus α, (a — b), (b — c).

Analyſis. Lieſt man, Fig. 318. benutzend, in der Analyſis 1749 (a — b) ſtatt (a + b), (b — c) ſtatt (b + c), 2R — α ſtatt α, ſo paßt dieſelbe wörtlich für dieſe Aufgabe.

Auflöſung. Lieſt man, Fig. 318. benutzend, in der Auflöſung 1751 (b — c) ſtatt (b + c), 2R — α ſtatt α, ſo paßt dieſelbe wörtlich für dieſe Aufgabe.

Beweis ꝛc. Ergiebt ſich für Fig. 318. wörtlich wie in 1749, wenn man — ſtatt +, bei den ∠ aber 2R — α ſtatt α lieſt.

1753. Aufgabe. △ aus α, (a — c), (a + b).

Analyſis. Führt wie in 1741, aber durch Subtraktion, zu 1749.

1754. Aufgabe. △ aus α, (a — c), (b + c).

Analyſis. Führt wie in 1742, aber durch Addition, zu 1749.

1755. Aufgabe. △ aus α, (a + c), (a + b).

Analyſis. Führt wie in 1743 zu 1750.

1756. Aufgabe. △ aus α, (a + c), (b — c).

Analyſis. Führt wie in 1744, aber durch Addition, zu 1750.

1757. Aufgabe. △ aus α, (a + c), (a — b).

Analyſis. Führt wie in 1745 zu 1751.

1758. Aufgabe. △ aus α, (a + c), (b + c).

Analyſis. Führt wie in 1746 zu 1751.

1759. Aufgabe. △ aus α, (a — c), (a — b).

Analyſis. Führt wie in 1747, aber durch Subtraktion, zu 1752.

1760. Aufgabe. △ aus α, (a — c), (b — c).

Analyſis. Führt wie in 1748 zu 1752.

1761. Aufgabe. Es ſind die Punkte B und C und die Linie L gegeben; man ſoll ein △ aus (β — γ) ſo zeichnen, daß BC = a wird, und A in L fällt.

Analyſis ꝛc. Siehe g. Betr. §. 31.

1762. Aufgabe. Es sind die Punkte B und C und die Linie L gegeben; man soll ein △ aus → m so konstruiren, daß BC = a wird, und A in L fällt.

Analysis. a bestimmt → h, → m und → h geben aber nach 145 $\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$; man hat also 1761 zu verzeichnen.

1763. Fig. 319. Aufgabe. △ ABC aus t', → t', so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis. Ist BD = t', so ergiebt sich, da AD = DC sein muß, wenn man → t' durch A legt, mittelst Halbirung von AN in E, ein Ort EG für D ∦ L' (514), weshalb man nur 94 zur Feststellung von t' anzuwenden hat, u. s. w.

1764. Fig. 319. Aufgabe. △ ABC aus α, → t', so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis. Ist BD = t', so ergiebt sich, da AD = DC sein muß, wenn man NH mit der → t' durch A legt, mittelst Halbirung von AN in E, ∦ L' ein Ort EG für D (514), und die Lage von GA. Da HN ∦ t' ist, treffen aber nach 547 die, ∦ b und c gezogenen Linien EQ und HQ in der Lage GA zusammen, folglich läßt sich, da ∠ EQH = α gegeben ist, mittelst 320 Q feststellen, und hierauf das verlangte △ ABC durch 2 aus A ∦ QE und QH gezogene Linien ableiten.

1765. Fig. 320. Aufgabe. △ ABC aus → t, → t', so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis. Ist BD = t', so ergiebt sich, da AD = DC sein muß, wenn man NH mit der → t' durch A legt, mittelst Halbirung von AN in E, ∦ L' ein Ort EG für D (514); man hat also nur, da → t und A die Lage t oder AQ bestimmen, eine Linie BD mit der → t' so zwischen L und GE zu legen, daß AQ den Schwerpunkt I, oder BI :

ID = 2 : 1 bestimmt. Dies wird erreicht, wenn man HE in F nach 2 : 1 theilt, und F mit G verbindet, u. s. w.

1766. Fig. 321. Aufgabe. △ ABC aus → a, → t', so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis. Ist BD = t', so ergiebt sich, da AD = DC sein muß, wenn man NH mit der → t' durch A zieht, mittelst der Halbirung von AN in E, ein Ort EG ∓ L' für D (514). Verlängert man hierauf, in Rücksicht auf 123, t' um sich selbst bis I, so erhält man AI ∓ a, weshalb die Lage von AI gegeben ist. Hieraus folgt aber, daß es nur darauf ankömmt: zwischen L und Lage AI eine Linie BI mit der → t' so zu legen, daß dieselbe von EG halbirt wird. Da nun in dem □ ANIB AE = EN, BD = DI ist, läßt sich dies nach 559 schließlich erreichen, wenn man durch O die Linie NB legt, und BI die → t' giebt u. s. w.

1767. Fig. 322. Aufgabe. △ ABC aus → t', → t'', so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis. Ist BD = t', CD' = t'', so ergeben sich, da AD = DC, AD' = D'B sein muß, wenn man NH und N'H' mit den →→ t' und t'' durch A zieht, mittelst Halbirung von AN in E, und von AN' in E', die Oerter EG ∓ L' für D, und E'G' ∓ L für D' (514). Da sich nun t' und t'' im Schwerpunkt I nach dem Verhältniß 2 : 1 durchschneiden, und die →→ dieser Linien gegeben sind; lassen sich 2 Oerter GF und G'F' für I, also auch dieser Punkt selbst bestimmen, indem man HK und H'E' in F und F' nach dem Verhältniß 2:1 theilt. Legt man hierauf schließlich durch den festgestellten Schwerpunkt I die →→ t und t', so ergiebt sich das verlangte △ ABC.

1768. Fig. 184. Aufgabe. △ ABC aus α, β, so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis 1). Zieht man AR, so ergeben sich außer den gegebenen ∠ noch 2 ∠ des □ ABRC. Aus denselben läßt sich aber die Gestalt dieses □ bestimmen, wenn man ein beliebiges △ ABC mit den ∠ α und β zeichnet, und nach

320 mittelst der ∢ ARC und ARB den Punkt R feststellt; folglich läßt sich auch der ∠ ACR angeben, und hiedurch △ ABC ableiten.

Analysis 2). Durch α und β ist nach 402. die Gestalt des △ ABC, also auch das Verhältniß (b : c) gegeben. Liegt aber der Scheitel eines bestimmten ∠ fest, und ist das Verhältniß beider Schenkel gegeben, so läßt sich, wenn der eine in L endigt, ein Ort für den Endpunkt C des zweiten nach 584 bestimmen, also C und damit △ ABC feststellen.

1769. Aufgabe. △ ABC aus α, β, so daß A in A, B in L, C in K fällt.

Analysis. Ergiebt sich wie in Analysis 2) 1768.

1770. Aufgabe. △ ABC aus α, β, so daß A in A, B in K, C in K′ fällt.

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1768 Analysis 2), nur muß K′ statt L′, und 586 statt 584 gelesen werden.

1771. Aufgabe. △ ABC aus α, β, so daß A in A, B und C in K fallen.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1770.

1772. Aufgabe. △ ABC aus α, (bc), so daß A in A, B in L, C in L′ fällt.

Analysis. Da Scheitel A von α festliegt, das Rechteck der Schenkel = (bc) gegeben ist, und der eine in L endigt, so läßt sich nach 588 ein Ort für den Endpunkt C des zweiten Schenkels bestimmen, also dieser Punkt selbst, und hiedurch das verlangte △ ABC feststellen.

1773. Aufgabe. △ ABC aus α, (bc), so daß A in A, B in L, C in K fällt.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1772.

1774. Aufgabe. △ ABC aus α, (bc), so daß A in A, B in K, C in K′ fällt.

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1772, nur muß K statt L und 589. a. statt 588 gelesen werden.

1774. a. Aufgabe. $\triangle$ ABC aus α, (bc), so daß A in A, B und C in K fallen.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1774.

1775. Fig. 323. Aufgabe. $\triangle$ ABC aus h, t, $\rightarrow$ t in $\triangle$ NOQ.

Analysis. Aus h, t, $\rightarrow$ t ergiebt sich das $\triangle$ mit h und t, also die $\rightarrow$ a, weshalb OS $\fallingdotseq$ a, und der Ort (538) für die Mitte von a durch die Mitte von SO bestimmt werden kann, und nur t mit der bestimmten $\rightarrow$, und Länge zwischen diesen Ort und NO nach 94 zu schieben ist.

1776. Fig. 324. Aufgabe. $\triangle$ ABC aus a, $\rightarrow$ t', $\rightarrow$ a $\fallingdotseq$ NO um $\triangle$ NOQ.

Analysis. Durch a und $\rightarrow$ a $\fallingdotseq$ NO hat man den Ort 1118 für A, also auch h und 2t', da dieser Ort $\fallingdotseq$ a fällt, und $\rightarrow$ t' gegeben ist. Fällt man nun aus D, der Mitte von b, den $\perp$ DE, so zeigt sich das $\triangle$ BDE aus t' und $\frac{h}{2}$ bestimmt, folglich EC $=$ a $-$ EB, und hiedurch $\triangle$ ECD, also auch $\rightarrow$ CD gegeben, weshalb man diese nur durch N zu legen hat, um das verlangte $\triangle$ ABC festzustellen.

1777. Aufgabe. $\triangle$ ABC aus $\rightarrow$ h, $\rightarrow$ h', $\rightarrow$ h'' um oder in $\triangle$ NOQ.

Analysis. Legt man sich die 3 Richtungen durch einen Punkt, errichtet in einem beliebigen Punkt der $\rightarrow$ h einen $\perp$, und fällt aus dem Durchschnittspunkt desselben mit den $\rightarrow\rightarrow$ h' und h'' $\perp\perp$ auf die $\rightarrow\rightarrow$ h'' und h', so bestimmen die 3 gezeichneten $\perp\perp$ die Gestalt des verlangten $\triangle$ ABC. Zieht man hierauf zu den gefundenen $\rightarrow\rightarrow$ von a, b, c $\fallingdotseq\fallingdotseq$ durch Q, N, O, oder verfährt nach 1109, so bestimmt sich auch die Größe des verlangten $\triangle$ ABC.

1778. Fig. 325. Aufgabe. $\triangle$ ABC aus $\rightarrow$ t, $\rightarrow$ t', $\rightarrow$ t'' um oder in $\triangle$ NOQ.

Analysis. Mittelst der vorgeschriebenen Bedingungen ergiebt sich in folgender Art die Gestalt des $\triangle$ ABC:

Theile eine beliebige Länge der → t in O = 1 : 2, und lege zwischen die O durchlaufenden →→ t′ und t″ eine von der → t in E halbirte Linie BC, siehe 127, und verbinde A mit B und C. Zieht man hierauf zu den gefundenen →→ von a, b, c ⫩ durch Q, N, O, oder verfährt nach 1109, so bestimmt sich auch die Größe des verlangten △ ABC.

1779. Fig. 325. Aufgabe. △ ABC aus → m, → m′, → m″ um oder in △ NOQ.

Analysis. Nach 326 ist $\angle (mm') = R + \frac{\gamma}{2}$, $\angle (m'm'') = R + \frac{\alpha}{2}$, also die Gestalt des △ ABC gegeben. In Vereinigung mit diesem Datum bestimmen schließlich, wie in 1777 oder nach 1109, die Punkte N, O, Q auch die Größe des verlangten △ ABC.

Auflösung. Lege die 3 →→ durch einen Punkt O, errichte in demselben einen ⊥ OD auf → m′, beschreibe mit einem beliebigen Radius FO um F einen ⊙, ziehe CA, bestimme ∠ OAB = ∠ OAC, und lege zu den erhaltenen →→ von a, b, c ⫩ durch Q, N, O, oder verfahre nach 1109, so ergiebt sich das verlangte △ ABC.

2tes Kapitel.

Vierecks-Aufgaben aller Art.

1780. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, e′, ∠ (de), ∠ (ce).

Analysis. Zunächst läßt sich die Gestalt des gesuchten ▱ bestimmen, da mittelst ∠ (de) und ∠ (ce) ein ACD ∼ △ ACD gezeichnet werden kann, und a : e′ mit AD nach 593 den einen, und a : b mit AC in derselben Art den zweiten Ort für B ergeben. Der erhaltenen Gestalt des ▱ kann hierauf die Größe durch a, wie in 509, gegeben werden.

1781. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus a, b, $\angle$ (ae'), $\angle$ (de), $\angle$ (ce).

Analyſis. Ergiebt ſich wie in 1780, nur muß, außer dem Ort 593 für a : b, der Ort 326 für $\angle$ (ae') zu Hilfe genommen werden.

1782. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus a, b, $\angle$ (ee'), $\angle$ (ce), $\angle$ (de).

Analyſis. Ergiebt ſich wie in 1780 durch 64.

1783. Fig. XIV. Aufgabe. $\square$ aus e', (a : b), (c : d), $\angle$ (ae'), $\angle$ (be').

Analyſis. $\angle$ (ae') + $\angle$ (be') und (a : b) beſtimmen nach 406 die Geſtalt des $\triangle$ ABC. Zeichnet man daher ein demſelben $\sim \triangle$ ABC, ſo bildet die gegebene Lage e' einen Ort für D. Den zweiten, alſo auch die Geſtalt des geſuchten $\square$, giebt AC mit dem Verhältniß (c : d) nach 593. Die Ableitung der Größe kann ſchließlich durch e', wie in 509, vorgenommen werden.

1784. Fig. 52. Aufgabe. $\square$ aus e, (a : c), ($\angle$ B + $\angle$ C), $\angle$ (be'), $\angle$ (de).

Analyſis. Zieht man CF $\fallingdotseq$ a, BF $\fallingdotseq$ e, ſo zeigt ſich die Geſtalt des $\triangle$ DCF durch $\angle$ DCF = ($\angle$ B + $\angle$ C), und CF : CD = (a : c) nach 406 beſtimmt. Nach der Konſtruktion eines $\sim \triangle$ CDF ergeben ſich aber nach 320 mittelſt DC und den $\measuredangle$ (be') und (de) zwei Kreisörter für B und A, folglich kömmt es zur Beſtimmung der Geſtalt des verlangten $\square$ nur darauf an; eine Linie AB = und $\fallingdotseq$ CF zwiſchen die erhaltenen $\odot\odot$ zu ſchieben, welches nach 1585 geſchehen kann. Die Größe des $\square$ endlich läßt ſich wie in 509 durch e ableiten.

1785. Fig. 52. Aufgabe. $\square$ aus e, e', (a : b), $\angle$ A, $\angle$ (ee').

Analyſis. e, e', $\angle$ (ee') beſtimmen das 162 angeführte $\square$ DF. Da nun CF : CB = (a : b) iſt, ergiebt ſich nach 593 ein Ort für C; den zweiten erhält man aber durch $\angle$ GCF = $\angle$ A nach 320 u. ſ. w.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

1786. Fig. 241. Aufgabe. △ aus a, c, (b : e), ∠ (de), (∠ B + ∠ C). (Analogie zu 1785.)

Analyſis. a, c, (∠ B + ∠ C) beſtimmen das 1440 angeführte ▱ DF. Da nun BC : BF = (b : e) iſt, ergiebt ſich nach 593 ein Ort für B; den zweiten erhält man aber durch ∠ GBF = ∠ (de) nach 320, u. ſ. w.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

Anmerkung. Sowohl dieſe Aufgabe als 1788 könnte auch ohne Rückſicht auf die Analogieen wie in 1784 durch Benutzung von 1585 gelöſt werden.

1787. Fig. 52. Aufgabe. △ aus e, e', (a : c), ∠ A, ∠ (ee').

Analyſis. e, e', ∠ (ee') beſtimmen das 162 angeführte ▱ DF, alſo auch die Lage der Diagonale DF. Da nun CF : CD = (a : c) iſt, ergiebt ſich nach 593 ein Ort für C; den zweiten erhält man aber durch ∠ GCF = ∠ A nach 320 u. ſ. w.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

1788. Fig. 241. Aufgabe. △ aus a, c, (e : e'), (∠ B + ∠ C), ∠ (de). (Analogie zu 1787).

Analyſis. a, c, (∠ B + ∠ C) beſtimmen das 1440 angeführte ▱ DF, alſo auch die Lage der Diagonale DF. Da nun BF : BD = (e : e') iſt, ergiebt ſich nach 593 ein Ort für B; den zweiten erhält man nach 320 durch ∠ GBF = ∠ (de), u. ſ. w.

Zuſatz. Es ſind 2 verſchiedene Reſultate möglich.

1789. Fig. 52. Aufgabe. △ aus (a + b + c + d), (a : b), (c : d), (e : e'), ∠ (ee').

Analyſis. Durch (e : e') und ∠ (ee') beſtimmt ſich die Geſtalt des 162 angeführten ▱ DBFG. Zeichnet man ein demſelben ∼ ▱ DBFG, ſo läßt ſich in dieſem die verhältnißmäßige Lage von C beſtimmen, da mittelſt BF und FC : CB = (a : b) der eine, und durch DG und CD : CG = (c : d) der andere Ort für C nach 593 gegeben iſt. Zieht

man zu den erhaltenen Linien FE und GE ∓∓ durch B und D, so ergiebt sich die Gestalt des ▱ ABCD, welcher schließlich die erforderliche Größe durch (a + b + c + d), wie in 1134, gegeben werden kann.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1790. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus (a + c + e + e'), (a : b), (e : e'), ∠ D, ∠ (e e').

Analysis. Durch (e : e') und ∠ (e e') bestimmt sich die Gestalt des 162 angeführten ▱ DBFG. Zeichnet man ein demselben ∾ ▱ DBFG, so läßt sich in diesem die verhältnißmäßige Lage von C bestimmen, da mittelst BF und EF : EB = (a : b) sich nach 593 ein Ort für E ergiebt, der andere aber durch DG und ∠ DCG = ∠ D nach 320 bestimmt werden kann. Zieht man zu den erhaltenen Linien FE und GE ∓∓ durch B und D, so ergiebt sich die Gestalt des ▱ ABCD, welcher schließlich die erforderliche Größe durch (a + c + e + e'), wie in 1134, gegeben werden kann.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1791. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, (c + d), ∠ (a e'), ∠ (b e').

Analysis. ∠ (a e') + ∠ (b e'), a und b bestimmen △ ABC, also auch AC und die Lage von e', oder einen Ort für D. Hiedurch reduzirt sich aber, da CD + DA = (c + d) gegeben ist, die Aufgabe auf 1732.

1792. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, (c — d), ∠ (a e'), ∠ (b e').

Analysis. Führt wie in 1791 zu 1733.

1793. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, e', (c + e), ∠ B, ∠ (b e').

Analysis. Führt ähnlich wie in 1791 zu 1732.

1794. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, e', (c — e), ∠ B, ∠ (b e').

Analysis. Führt ähnlich wie in 1791 zu 1733.

1795. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, e, (e + d), ∠ (b e').

Analyſis. Führt ähnlich wie in 1791 zu 1732.

1796. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus a, b, e, (c — d), ∠ (be′).

Analyſis. Führt ähnlich wie in 1791 zu 1733.

1797. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus e, (a+b+c+d), ∠ (ae), ∠ (be), ∠ (ee′).

Analyſis. ∠ (ae), ∠ (be) und e beſtimmen △ ABC, alſo AB + BC, und daher auch AD + DC = (a+b+c+d) — (AB + BC). Durch ∠ (ee′) iſt aber auch die Lage von e′, als Ort für D, gegeben, folglich läßt ſich dieſer Punkt, und damit das geſuchte ▱ ABCD durch Konſtruktion von 1732 feſtſtellen.

1798. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus e, e′, (a + b), ∠ (ee′), ∠ (de′).

Analyſis. Durch e, e′ und ∠ (ee′) ergiebt ſich das 162 angeführte ▱ DF. In demſelben beſtimmt ∠ (de′) = ∠ FGC die Lage GC, alſo einen Ort für C. Nun iſt aber BF feſtliegend, und CF + CB = (a + b) gegeben, folglich hat man 1732 zur Feſtſtellung von C zu löſen, u. ſ. w.

1799. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus e, e′, (a — b), ∠ (ee′), ∠ (de′).

Analyſis. Führt wie in 1798 zu 1733.

1800. Fig. 241. Aufgabe. ▱ aus a, c, (b + e), ∠ (ac), ∠ (ce′). (Analogie zu 1798.)

Analyſis. Durch a, c und ∠ (ac) ergiebt ſich das 1440 angeführte ▱ DF. An demſelben beſtimmt ∠ (ce′) = ∠ CDB die Lage DB, alſo einen Ort für B. Nun iſt aber CF feſtliegend, und CB + FB = (b + e) gegeben, folglich hat man 1732 zur Feſtſtellung von C zu löſen, u. ſ. w.

1801. Fig. 241. Aufgabe. ▱ aus a, c, (b — e), ∠ (ac), ∠ (ce′). (Analogie zu 1799.)

Analyſis. Führt wie in 1800 zu 1733.

1802. Fig. 34. Aufgabe. ▭ aus a, (b:d), ∠ (ed), (∠ A + ∠ B).

Analyſis. Benutzt man zugleich das 169 und das 171 angeführte △, ſo beſtimmt ſich die Geſtalt des erſteren △ BCH durch (b : d) und (∠ A + ∠ B), die Geſtalt des zweiten △ DBF ergiebt ſich aber, wenn man ∠ HBF = ∠ (ed) beſtimmt, und EF = DH abſetzt. Zieht man hierauf ∓∓ durch D und B zu BH und DH, ſo ergiebt ſich die Geſtalt des verlangten ▭ ABCD, welcher ſchließlich durch a, wie in 509, die richtige Größe gegeben werden kann.

1803. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus a, (b : d), (∠ C + ∠ D), ∠ (ee'),

Analyſis. Durch (b : d) und (∠ C + ∠ D) beſtimmt ſich die Geſtalt des 169 angeführten △ CBH. Durch ∠ (ee') ergiebt ſich ferner die Geſtalt des 171 angeführten △ DBF, wie in 1451, wenn man die Transverſale des △ BHE zieht, da ND = NF ſein muß, und hienach zwei ∢ des △ DBF gegeben ſind, u. ſ. w. Zieht man endlich nach der Zeichnung beider △△ durch D und B ∓∓ zu FD und HB, ſo erhält man die Geſtalt des verlangten ▭ ABCD, welcher durch a, wie in 509, die richtige Größe zu geben iſt.

1804. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus a, (e : e'), ∠ (ee'), ∠ (bd).

Analyſis. Durch (e : e') und ∠ (ee') ergiebt ſich die Geſtalt des 171 angeführten △ DBF. Durch ∠ (bd) beſtimmt ſich aber ferner die Geſtalt des 169 angeführten △ HBC, wenn man wie in 1452 verfährt. Nach der Zeichnung beider △△ läßt ſich durch Beſtimmung zweier ∓∓ die Geſtalt, und durch Benutzung von a endlich (509) die Größe des verlangten ▭ ABCD ableiten.

1805. Fig. 326. Aufgabe. ▭ aus a, ∠ (be), ∠ (de), ∠ (de').

Analyſis. Legt man durch ∠ (de) und ∠ (de') ein, △ ADE ∾ △ ADE feſt, ſo käme es zur Beſtimmung der Geſtalt des verlangten ▭ ABCD nur darauf an, BE ſo feſtzuſtellen, daß ſich ∠ BEE = ∠ (be), und AB ∓ CD

ergiebt. Diese Parallelität fände aber statt, wenn △ AED = △ BEC wäre, folglich hat man zwischen den Schenkeln des Scheitel ∠ von AED eine Fläche so zu bestimmen, daß die fehlende Seite BC eine durch ∠ (be) vorgeschriebene → erhält. Diese Aufgabe ist 553 gelöst. Aus der auf diese Art bestimmten Gestalt ergiebt sich mittelst a nach 509 die Größe des verlangten □ ABCD.

Konstruktion der Gestalt. Zeichne ein beliebiges △ ADE mit den ∢ (de) und (de'), bestimme EG = EA, EJ = ED, ∠ GAE = ∠ (be), setze die mittlere Proportionale zwischen EA und EJ von E aus = EC ab, lege CB ∦ GA, und ziehe AB und DC, so ist die Gestalt des verlangten □ konstruirt.

1806. Aufgabe. □ aus a, ∠ (be), ∠ (de), ∠ (ee').

Analysis. Ergiebt sich wie in 1805.

1807. Fig. XIX. Aufgabe. □ aus a, ∠ (be'), ∠ (de), (∠ D + ∠ C).

Analysis. (∠ D + ∠ C) giebt ∠ (bd), und dieser ∠ bestimmt mit den ∢ (be') und (de) den ∠ (ee'), wodurch sich die Aufgabe auf 1806 reduzirt.

1808. Fig. 327. Aufgabe. □ aus b, d, ∠ (be), ∠ (be'). (Vergleiche 1449. a).

Analysis. Da △ BEC bestimmt ist, und = △ AED werden muß, damit AB ∦ DC ist, so läßt sich, mittelst der aus E auf b gefällten Höhe g, auch die aus E auf d gefällte Höhe g', aus der Proportion b : d = g' : g, bestimmen, weshalb, sobald man um E mit g' einen ⊙ beschreibt, und an denselben eine von den Schenkeln des ∠ (ee') begrenzte Tangente mit der Länge d zieht, sieht 1917, sich das verlangte □ ergeben muß.

Konstruktion. Zeichne △ EBC aus b und den anliegenden ∢ (be) und (be'), lege durch B eine ∦ zu EC, schneide CI = d ab, beschreibe mit der Höhe EN des erhaltenen △ EIC einen ⊙ um E, und lege an denselben im

Scheitel ∠ von BEC nach 1917 eine Tangente AD mit der Länge d, so ist das verlangte □ ABCD konstruirt.

1809. Fig. 328. **Aufgabe.** □ aus e′ e′, ∠ (b e), ∠ (d e). (Vergleiche 1450). (Analogie zu 1808.)

Analysis. Da △ AGC bestimmt ist, und △ EBC = △ EAD, also auch △ AGC = △ GBD werden muß, damit a ∦ c ist, so läßt sich, mittelst der aus G auf e gefällten Höhe g, auch die auf e′ aus G gefällte Höhe g′, durch die Proportion e′ : e = g : g′, bestimmen, weshalb, sobald man um G einen ⊙ mit g′ beschreibt, nur an diesen ⊙ eine von den Schenkeln des ∠ (b d) begrenzte Tangente mit der Länge e′ nach 1917 zu legen ist, um das verlangte □ ABCD zu erhalten.

Konstruktion. Zeichne △ AGC aus e, ∠ (d e), ∠ (b e), lege durch C eine ∦ zu AG, schneide AI = e′ ab, beschreibe mit der Höhe GN des erhaltenen △ AGI einen ⊙ um G, und lege an denselben eine mit den Schenkeln des ∠ AGC begrenzte Tangente DB = e′ nach 1917, so bildet ABCD das verlangte □.

1810. Fig. 119. **Aufgabe.** □ aus a, ∠ A, ∠ B, ∠ (e e′).

Analysis. Durch a, und die Neben ∢ der ∢ A und B ist △ ABG, also auch nach 560 ein Ort für E bestimmt. Der zweite Ort ergiebt sich aber durch ∠ (e e′) und a nach 320, folglich läßt sich E feststellen, und hierauf das verlangte □ ABCD ableiten.

Auflösung. Zeichne △ ABG aus a und den Neben ∢ von A und B, ziehe eine durch G und die Mitte S von a laufende Linie GN, beschreibe über AB mittelst ∠ (e e′) den 320 angeführten Ort, und lege aus B und A durch den Schneidungspunkt E des Kreisorts mit GN, die Linien BD und AC, so bildet ABCD das verlangte □.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß AB ∦ CD ist, welches durch 559 ausgeführt werden kann.

1811. Fig. 34. **Aufgabe.** □ aus a, c, (b + d), h.

Analyſis. Durch a — c, (b + d), h läßt ſich nach 1728 das 169 angeführte △ BHC, alſo auch das verlangte ▭ ABCD konſtruiren.

1812. Fig. 34. Aufgabe. ▭ aus a, c, (b — d), h.

Analyſis. Führt wie in 1811 zu 1729.

1813. Fig. 34. Aufgabe. ▭ aus a, c, (e + e'), h.

Analyſis. Durch (a + c), (e + e'), h läßt ſich nach 1728 das 171 angeführte △ BFD, folglich auch das verlangte ▭ ABCD konſtruiren.

1814. Fig. 34. Aufgabe. ▭ aus a, c, (e — e'), h.

Analyſis. Führt wie in 1813 zu 1729.

1815. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a + c), (e + e'), h, ∠ (b d).

Analyſis. Durch (a + c), (e + e') und h läßt ſich nach 1728 das 171 angeführte △ BDF konſtruiren. Durch ∠ (b d) kann man aber auch, wie in 1452, das 169 angeführte △ BCH mittelſt der bekannten, beiden △△ gemeinſchaftlichen, Transverſale BN beſtimmen, folglich läßt ſich das verlangte ▭ ABCD zeichnen.

1816. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a + c), (e — e'), h, ∠ (b d).

Analyſis. Führt wie in 1815 zu 1729 und 1452.

1817. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a — c), (b + d), h, ∠ (e e').

Analyſis. Durch (a — c), (b + d), h läßt ſich nach 1728 das 169 angeführte △ BCH zeichnen. Durch ∠ (e e') kann man aber auch, wie in 1451, das 171 angeführte △ DBF mittelſt der bekannten, beiden △△ gemeinſchaftlichen, Transverſale BN beſtimmen, folglich läßt ſich das verlangte ▭ ABCD konſtruiren.

1818. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a — c), (b — d), h, ∠ (e e').

Analyſis. Führt wie in 1817 zu 1729 und 1451.

1819. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a + c), (b + d), h, (e + e').

Analysis. Durch (a + c), (e + e') und h läßt sich nach 1728 das 171 angeführte △ BDF zeichnen. Das 169 erwähnte △ BHC kann man aber auch durch (b + d), h und die gegebene, beiden △△ gemeinschaftliche, Transversale BN nach 1734 konstruiren, folglich läßt sich das verlangte ▱ ABCD bestimmen.

1820. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a + c), (b + d), (e — e'), h.

Analysis. Führt wie in 1819 zu 1729 und 1734.

1821. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a + c), (b — d), (e + e'), h.

Analysis. Führt wie in 1819 zu 1728 und 1735.

1822. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a + c), (b — d), (e — e'), h.

Analysis. Führt wie in 1819 zu 1729 und 1735.

1823. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a — c), (b + d), (e + e'), h.

Analysis. Durch (a — c), (b + d) und h läßt sich nach 1728 das 169 angeführte △ BCH zeichnen. Das 171 erwähnte △ BFD kann man aber auch durch (e + e') h und die, beiden △△ gemeinschaftliche und bekannte Transversale BN nach 1734 konstruiren, folglich läßt sich das verlangte ▭ ABCD bestimmen.

1824. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a — c), (b + d), (e — e'), h.

Analysis. Führt wie in 1823 zu 1728 und 1735.

1825. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a — c), (b — d), (e + e'), h.

Analysis. Führt wie in 1823 zu 1729 und 1734.

1826. Fig. 242. Aufgabe. ▭ aus (a — c), (b — d), (e — e'), h.

Analysis. Führt wie in 1823 zu 1729 und 1735.

1827. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus a, b, c, ∠ (ee').

Analysis. Durch b, ∠ (ee′) und EB : EC = a : c ist △ ECB bestimmt. Man hat also nach der Zeichnung dieses △, welche in Beziehung auf 406, oder durch 593 geschehen kann, nur a und c aus B und C nach den festgestellten Lagen e und e′ zu ziehen, um das gesuchte ▱ ABCD zu erhalten.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich,

daß bei jedem ▱ im ⊙ durch eine Seite und die beiden anliegenden Seiten ein Ort (593) für den Schneidungspunkt beider Diagonalen gegeben ist.

1828. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus a, c, ∠ A, ∠ (ee′).

Analysis. Durch ∠ (ee′) und EB : EC = a : e ist die Gestalt des △ EBB bestimmt, also ∠ (be′) gegeben. Aus diesem ∠ und ∠ C = 2R — ∠ A ergiebt sich aber auch die Gestalt des △ CDB, folglich kann man durch einen um das ∼ △ CDB beschriebenen ⊙ die Gestalt des ganzen ▱ ABCD, und schließlich, mittelst a oder c, auch die entsprechende Größe desselben nach 509 ableiten.

1829. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus a, c, e, ∠ (ee′).

Analysis. Durch ∠ (ee′) und EB : EC = a : e ist die Gestalt des △ EBC bestimmt, also ∠ (be) gegeben. Aus diesem ∠ und a : e ergiebt sich aber auch die Gestalt des △ ABC, folglich kann man durch einen um das ∼ △ ABC beschriebenen ⊙ die Gestalt des ganzen ▱ ABCD, und schließlich, mittelst a oder c, nach 509 auch die Größe desselben ableiten.

1830. Fig. 329. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, f, e′, (∠ D + ∠ C). (Analogie zu 1827.)

Analysis. Durch e, ∠ (bd) und BN : NA = e′ : e ist △ ABN bestimmt; man hat also nach der Zeichnung desselben, welche in Beziehung auf 406, oder durch 593 geschehen

Analysis

sich nach 172

169 erwähr

h und di

versale B

langte

(b

— 323 —

[illegible] nach den festgestellten [illegible] gesuchte ▱ ABCD zu [illegible] vorstehenden Analysis er-

Anmerkung. Aus der [illegible] ist, daß bei jedem ▱ im ⊙ durch beide Diagonalen und eine Seite ein Ort (593) für den Schneidungspunkt der Verlängerungen der beiden anliegenden Seiten gegeben ist.

1831. Fig. 329. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e', ∠ (D + ∠ C), ∠ (a e). (Analogie zu 1828.)

Analysis. Ergiebt sich ähnlich mit 1830 wie 1828 mit 1827.

1832. Fig. 329. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e', c, (∠ D + ∠ C). (Analogie zu 1829.)

Analysis. Ergiebt sich ähnlich mit 1830 wie 1829 mit 1827.

1833. Fig. XXII. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus a, b, ∠ (a e'), ∠ B.

Analysis. Durch a, b, ∠ B ergiebt sich △ ABC, also durch ∠ (ae') ein Ort für D. Vom △ ACD kennt man aber ferner AC, und (c — d) = b — a nach 294, folglich läßt sich dasselbe nach 1733 zeichnen, wodurch das geforderte ▱ ABCD festgestellt ist.

1834. Fig. XXII. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus ρ, ∠ (a e), ∠ (b e), ∠ (e e')

Analysis. Durch ∠ (a e), ∠ (b e), ∠ (e e') bestimmt sich die Gestalt des △ ABC, und die Lage von BD in einem, △ ABC ∾ △ ABC. Da nun zugleich vom △ ACD, CD — DA = CB — BA nach 294, und AC gegeben ist, so läßt sich nach 1733 durch Zeichnung dieses △ die Gestalt des ganzen ▱ ABCD feststellen, und derselben schließlich, wie in 509, durch ρ die entsprechende Größe geben.

1835. Fig. 166. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus a, c, ρ.

Analysis. Da $(b+d) = a+c$, $h = 2\varrho$, und $c-a$ gegeben ist, so läßt sich das 169 angeführte △ BCH nach 1728 zeichnen, und hierauf das verlangte ▭ um ⊙ mittelst a ableiten.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

1836. Aufgabe. △ aus f^2, $(t : t' : t'')$.

Analysis. Der nach 1084 von $(t : t' : t'')$ bestimmten Gestalt des △ kann man nach 1157 die Fläche f^2 geben.

1837. Aufgabe. △ aus f^2, $(h : h' : h'')$.

Analysis. Der nach 1666 von $(h : h' : h'')$ bestimmten Gestalt des △ kann man nach 1157 die Fläche f^2 geben.

1838. Aufgabe. △ aus f^2, r, (bc).

Analysis. Durch (bc) und r ergiebt sich h nach 557, durch f^2 und h aber ergiebt sich a nach 185; man hat also △ aus a, h, r, oder △ aus a, h, α, siehe 788, zu verzeichnen.

1839. Aufgabe. △ aus f^2, a, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1720.

1840. Aufgabe. △ aus f^2, h, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1720.

1841. Aufgabe. △ aus f^2, m, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Durch m und $(\beta-\gamma)$ ergiebt sich nach 146 h, durch f^2 und h aber a nach 185; man erhält also △ aus a, h, $(\beta-\gamma)$, siehe 1720, zu verzeichnen.

1842. Aufgabe. △ aus f^2, a, m.

Analysis. Führt durch 185 zu 1722.

1843. Aufgabe. △ aus f^2, h, m.

Analysis. Führt durch 185 zu 1722.

1844. Aufgabe. △ aus f^2, a, $(b+c)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1728.

1845. Aufgabe. △ aus f^2, h, $(b+c)$.

hen kann, nur e und e' aus A und B nach den festgestellten Lagen b und d zu ziehen, um das gesuchte ▱ ABCD zu erhalten.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich,

daß bei jedem ▱ im ⊙ durch beide Diagonalen und eine Seite ein Ort (593) für den Schneidungspunkt der Verlängerungen der beiden anliegenden Seiten gegeben ist.

1831. Fig. 329. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e', ∠ (D + ∠ C), ∠ (ae). (Analogie zu 1828.)

Analysis. Ergiebt sich ähnlich mit 1830 wie 1828 mit 1827.

1832. Fig. 329. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus e, e', e, (∠ D + ∠ C). (Analogie zu 1829.)

Analysis. Ergiebt sich ähnlich mit 1830 wie 1829 mit 1827.

1833. Fig. XXII. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus a, b, ∠ (ae'), ∠ B.

Analysis. Durch a, b, ∠ B ergiebt sich △ ABC, also durch ∠ (ae') ein Ort für D. Vom △ ACD kennt man aber ferner AC, und (c — d) = b — a nach 294, folglich läßt sich dasselbe nach 1733 zeichnen, wodurch das geforderte ▱ ABCD festgestellt ist.

1834. Fig. XXII. Aufgabe. ▱ um ⊙ aus ρ, ∠ (ae), ∠ (be), ∠ (ee')

Analysis. Durch ∠ (ae), ∠ (be), ∠ (ee') bestimmt sich die Gestalt des △ ABC, und die Lage von BD in einem, △ ABC ∽ △ ABC. Da nun zugleich vom △ ACD, CD — DA = CB — BA nach 294, und AC gegeben ist, so läßt sich nach 1733 durch Zeichnung dieses △ die Gestalt des ganzen ▱ ABCD feststellen, und derselben schließlich, wie in 509, durch ρ die entsprechende Größe geben.

1835. Fig. 166. Aufgabe. ▭ um ⊙ aus a, c, ρ.

Analysis. Da $(b+d) = a+c$, $h = 2\varrho$, und $c-a$ gegeben ist, so läßt sich das 169 angeführte △ BCH nach 1728 zeichnen, und hierauf das verlangte ▭ um ⊙ mittelst a ableiten.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

1836. Aufgabe. △ aus f^2, $(t : t' : t'')$.

Analysis. Der nach 1084 von $(t : t' : t'')$ bestimmten Gestalt des △ kann man nach 1157 die Fläche f^2 geben.

1837. Aufgabe. △ aus f^2, $(h : h' : h'')$.

Analysis. Der nach 1666 von $(h : h' : h'')$ bestimmten Gestalt des △ kann man nach 1157 die Fläche f^2 geben.

1838. Aufgabe. △ aus f^2, r, (bc).

Analysis. Durch (bc) und r ergiebt sich h nach 557, durch f^2 und h aber ergiebt sich a nach 185; man hat also △ aus a, h, r, oder △ aus a, h, α, siehe 788, zu verzeichnen.

1839. Aufgabe. △ aus f^2, a, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1720.

1840. Aufgabe. △ aus f^2, h, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1720.

1841. Aufgabe. △ aus f^2, m, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Durch m und $(\beta - \gamma)$ ergiebt sich nach 146 h, durch f^2 und h aber a nach 185; man erhält also △ aus a, h, $(\beta - \gamma)$, siehe 1720, zu verzeichnen.

1842. Aufgabe. △ aus f^2, a, m.

Analysis. Führt durch 185 zu 1722.

1843. Aufgabe. △ aus f^2, h, m.

Analysis. Führt durch 185 zu 1722.

1844. Aufgabe. △ aus f^2, a, $(b+c)$.

Analysis. Führt durch 185 zu 1728.

1845. Aufgabe. △ aus f^2, h, $(b+c)$.

Analyſis. Führt durch 185 zu 1728.

1846. Aufgabe. △ aus f^2, a, (b — c).

Analyſis. Führt durch 185 zu 1729.

1847. Aufgabe. △ aus f^2, h, (b — c).

Analyſis. Führt durch 185 zu 1729.

1848. Aufgabe. △ aus f^2, t, (b + c).

Analyſis. Verlängert man nach 123 t um ſich ſelbſt ꝛc., ſo beſtimmt ſich ein △, welches zur Fläche ebenfalls f^2, zur Grundlinie 2t, und (b + c) als Summe der übrigen Seiten hat, folglich nach 1844 konſtruirt werden kann.

1849. Aufgabe. △ aus f^2, t, (b − c).

Analyſis. Führt wie in 1848 zu 1846.

1850. Fig. 330. Aufgabe. △ aus f^2, α, m.

Analyſis. Zieht man in Rückſicht auf 486 und 565 ∓ ∓ zu b und c durch den Endpunkt D von m, und beſtimmt mittelſt AE und α △ AEF = f^2, ſo ergiebt ſich △ AEF = △ ADF = △ ACB, alſo auch △ DBF = △ ADC, und, da beide △△ wegen der Halbirung von α durch AD gleiche Höhe haben, AC = BF, weshalb AB + AC = AF = (b + c) gegeben iſt, und AB beſtimmt werden kann, da nach 485 AE × AF = (bc) ſein muß.

Auflöſung. Beſtimme ∠ CAB = α, AD = m, lege durch D ∓ ∓ zu b und c, verwandle f^2 in ein △ AEF mit AE und α, errichte in G und A ⊥⊥, beſchreibe über AF einen Halbkreis, ſchneide AS = AQ ab, lege durch S eine ∓ zu AF, fälle aus N einen ⊥ NB auf AF, und verlängere BD bis C, ſo bildet ABC das verlangte △.

Beweis. Da BN = AQ iſt, folgt aus den Proportionen AB : BN = BN : BF,

und AF : AQ = AQ : AG,

AB : AF = AG : BF. Nun iſt aber

AB : AC = ED : EC, alſo muß, da AG = ED,

AF : AC = BF : EC, und deshalb

EB ≒ CF,

folglich auch △ ABC = △ AEF = f^2 ſein.

Zuſatz. Es ergeben ſich 2 ≦ Reſultate.

Anmerkung. Die Aufgabe könnte auch wie in 1411 durch △ aus (b + c), α, m gelöſt werden.

1851. Fig. 302. Aufgabe. △ aus f^2, $t_{(m:n)}$, $t'_{(m':n')}$.

Analyſis. In 1338 iſt entwickelt worden, in welchem Verhältniß ſich 2 Transverſalen $t_{(m:n)}$, $t'_{(m':n')}$ ſchneiden; daher kennt man XB, XA, XF, XE. Hiedurch iſt

BXF : BAF = FX : FA, und da

BAF : ABC = m : m + n iſt, auch

BXF : ABC d. Zuſ. ſ. bekannt.

Da nun ABC = f^2 gegeben iſt, hat man durch dieſes Verhältniß die Fläche des △ BXF, aus welcher daſſelbe mit Hülfe der Seiten XF und XB nach 194 konſtruirt, und ſchließlich △ ABC abgeleitet werden kann.

1851. a. Fig. XIV. Aufgaben.

▱ aus f^2, a, ∠ A, ∠ B, ∠ C.

▭ aus f^2, a, ∠ A, ∠ B.

Analyſis. Verlängert man die Seiten b und d, ſo zeigt ſich △ ABS durch a und die Neben ≦ von den ≦ A und B beſtimmt, alſo die Fläche des △ DCS gegeben. Da nun durch ∠ C die ⇥ von c bekannt iſt, hat man folglich zwiſchen den Schenkeln des ∠ (bd) die Fläche DCS mit der vorgeſchriebenen ⇥ von c abzuſchneiden, welche Aufgabe 553 enthält.

1852. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e', (a : c), ∠ A.

Analyſis. Durch f^2, e, e' iſt das 162 angeführte ▱, alſo auch ∠ (ee') beſtimmt. Hiedurch reduzirt ſich die Aufgabe auf 1787.

1853. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e', (a + b), ∠ (de').

Analyſis. Führt wie in 1852 zu 1798.

1854. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus f^2, e, e', (a — b), ∠ (de').

Analysis. Führt wie in 1852 zu 1799.

1855. Fig. 52. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, c, (e + e'), ∠ (ac).

Analysis. Zeichnet man das 162 angeführte ▱ DBFG, so zeigt sich in demselben △ DCF durch DC = c, CF = a, ∠ DCF = 2R − ∠ (ac) bestimmt. Da sich nun auch △ DBF durch die Fläche = f^2, (162) die erhaltene Seite DF, und DB + BF = (e + e') (1844) konstruiren läßt, so kann man durch Zusammensetzung beider △△ u. s. w. das gesuchte ▱ ABCD verzeichnen.

1856. Fig. XIV. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, c, (e — e'), ∠ (ac).

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1855, nur muß (e — e') statt (e + e'), 1846 statt 1844 gelesen werden.

1857. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, ∠ (be), ∠ (de'), ∠ (db).

Analysis. Der nach 1805 bestimmten Gestalt des ▭ kann man nach 1162 die Fläche f^2 geben.

1858. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, ∠ A, ∠ B, ∠ (ee').

Analysis. Nimmt man a beliebig an, so ergiebt sich wie in 1810 die Gestalt des verlangten ▭ ABCD, welcher schließlich nach 1162 die Fläche f^2 gegeben werden kann.

1859. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, (b + d).

Analysis. Führt durch 199 zu 1811.

1860. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, (b — d).

Analysis. Führt durch 199 zu 1812.

1861. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, (e + e').

Analysis. Führt durch 199 zu 1813.

1862. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, c, (e — e').

Analyſis. Führt durch 199 zu 1814.

1863. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, (a + c), (b + d), (e + e').

Analyſis. Führt durch 199 zu 1819.

1864. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, (a + c), (b + d), (e — e').

Analyſis. Führt durch 199 zu 1820.

1865. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, (a + c), (b — d), (e + e').

Analyſis. Führt durch 199 zu 1821.

1866. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, (a + c), (b — d), (e — e').

Analyſis. Führt durch 199 zu 1822.

1867. Fig. XIX. Aufgabe. ▭ aus f^2, a, h, (b + c + d).

Analyſis. Durch f^2 und h ergiebt ſich nach 199 (a + c), durch (a + c) und a aber c, und durch c und (b + c + d) endlich (b + d), ſo daß man ▭ aus f^2, a, c, (b + d), ſiehe 1859, zu konſtruiren hat.

1868. Fig. 34. Aufgabe. ▭ aus f^2, h, ∠ (ee'), (a + b + c + d).

Analyſis. Durch f^2 und h ergiebt ſich nach 199 (a + c); aus (a + c), h, ∠ (ee') läßt ſich nach 788 das 171 angeführte △ BFD verzeichnen, es kömmt alſo nur darauf an, das 169 angeführte △ BCH mittelſt h und (b + d), welche Summe durch (a + b + c + d) und (a + c) gefunden werden kann, feſtzuſtellen. Dies läßt ſich endlich wie in 1819 bewerkſtelligen.

1869. Fig. XXI. Aufgabe. ▱ im ⊙ aus f^2, (a : c), ∠ A, ∠ (ee').

Analyſis. Nimmt man a beliebig an, ſo läßt ſich wie in 1828 die Geſtalt des ▱ beſtimmen, der nach 1162 die Fläche f^2 gegeben werden kann.

1870. Fig. 329. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus f^2, $(e : e')$, $\angle (bd)$, $\angle (ee')$.

Analysis. Durch $(e : e')$ und $\angle (bd)$ bestimmt sich die Gestalt des $\triangle$ ABN, da $AN : AB = (e : e')$ ist. Nach der Zeichnung eines, $\triangle$ ABN $\sim$ $\triangle$ ABN ergeben sich ferner, mittelst der $\measuredangle DAC = DBC = \frac{\angle (bd) + \angle (ee')}{2}$, die Lagen von AC und BD; es läßt sich also die Gestalt des gesuchten $\square$ ABCD feststellen, der nach 1162 die Fläche f^2 gegeben werden kann.

1871. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus f^2, a, b, $\angle$ B.

Analysis. Durch a, b, $\angle$ B ergiebt sich $\triangle$ ABC mit e. Es sind also vom $\triangle$ CDA folgende Stücke: die Fläche $= f^2 - \triangle$ ABC, $(b - c) = a - b$ nach 294 und die Seite e bekannt, weshalb dasselbe nach 1846 gezeichnet werden kann; wodurch zugleich das gesuchte $\square$ ABCD hervorgeht.

1872. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus f^2, e, $(a - b)$, $\angle$ B.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1871 durch 643 und 1846.

1873. Fig. XXII. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus f^2, $\angle (ae)$, $\angle (be)$, $\angle (ee')$

Analysis. Mittelst der gegebenen $\measuredangle$ läßt sich die Gestalt des $\square$ ganz wie in 1834 bestimmen, weshalb derselben nur die Fläche f^2 nach 1162 zu geben ist, um das verlangte $\square$ ABCD zu erhalten.

1874. Fig. 166. Aufgabe. $\square$ um $\odot$ aus a, c, f^2.

Analysis. Da sich durch a, c, f^2 nach 199 h ergiebt, und $c - a$ bekannt ist, $(b + d)$ aber $= a + c$ nach 294 sein muß, so läßt sich das 169 angeführte $\triangle$ BCH nach 1728 zeichnen, und hierauf das verlangte $\square$ um $\odot$ mittelst a ableiten.

4tes Kapitel.

Kreis-Aufgaben.

1875. Aufgabe. ⊙ aus L, L′, K, v. A. oder v. J.

Analysis. Beschreibt man mit der Centrale um μ einen ⊙, so bestimmen sich die Abstände der L und L′ ∓ Berührungslinien = r, folglich hat man die Aufgabe ⊙ aus P, L, L′, siehe 1206, zu lösen.

1876. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, L′, K.

Analysis. Zieht man aus dem Schneidungspunkt von L und L′ an den gesuchten ⊙ eine Berührungslinie, so zeigt sich deren Lage mittelst des ∠ (LL′) gegeben, weshalb man 1875 zu verzeichnen hat.

1877. Fig. 331. u. Fig. 331. a. Aufgabe. ⊙ aus L, K und der zwischen beiden Berührungspunkten liegenden Sehne s, v. A. oder v. J.

Analysis. Die aus dem zweiten Durchschnittspunkt A der Lage s mit K durch M nach L gezogene Linie AC ist nach 301. a. ∓ μB′, und deshalb ⊥ L. Da aber △ DBA ∽ △ AB′C ist, hat man AC : AB′ = AB : AD, durch welche Proportion, da in derselben AB′ × AB = AC × AD, und AB′ ∓ AB = s gegeben ist, nach 459 oder 457, AB konstruirt werden kann, worauf sich die Lage von μ ableiten läßt.

1878. Fig. 331. u. Fig. 331. a. Aufgabe. ⊙ aus P, L, K, v. A. oder v. J.

Analysis. Fällt man aus M und μ auf L die ⊥⊥ MC und μB′, so sind beide ⊙⊙ mit L in Verbindung gesetzt. Um jene aber auch selbst auf einander zu beziehen, wird man in Rücksicht auf die Analysis von 1877 darauf geleitet, eine Linie aus B′ nach A zu legen, welche nach 301. 2. B durchlaufen muß. Zieht man hierauf schließlich, um auch P

mit K und dem verlangten ⊙ gemeinschaftlich betrachten zu können, PA, so ergiebt sich zunächst PA × AE = B′A × AB, und ferner, wegen der Aehnlichkeit der △△ ABD und AB′C, = AC × AD, weshalb sich Punkt E bestimmen läßt, und die Aufgabe folglich auf ⊙ aus P, P′, L, siehe 1201, reduzirt ist.

Auflösung. Ziehe durch M eine ⊥ auf L stehende Linie MC, welche K zweimal durchschneidet, und lege durch C, D und P eine Kreislinie, so ergiebt sich E. Beschreibt man endlich nach 1201 eine P und E durchlaufende Kreislinie, welche L tangirt, so berührt dieselbe auch K.

Beweis. Der gesuchte und gegebene ⊙ würden sich in B berühren, wenn dieser Punkt in beiden Peripherien läge, und MBμ eine gerade Linie wäre. Das erstere findet statt, da AP × AE = AC × AD = AB × AB′ sein muß. Hieraus folgt ferner ∠ ABD, also auch ∠ B′BF = R, weshalb sich die Verlängerungen von B′μ und DB in der konstruirten Kreislinie treffen müssen, und nach 537 die AD halbirende Linie BM, gehörig verlängert, wirklich die Mitte μ des Durchmessers B′F durchschneidet.

1879. Aufgabe. ⊙ aus L, K, K′, gleichartig oder ungleichartig.

Analysis. Beschreibt man mit der Centrale μM um μ eine Kreislinie, so geht dieselbe durch M, berührt eine um r von L entfernte Linie, und einen mit r + r′ oder r — r′ um M′ beschriebenen ⊙, kann also nach 1878 gezeichnet werden.

1880. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, L′, K, von Ä. oder von J.

Analysis. Zieht man aus dem Durchschnittspunkt von L und L′ eine Berührungslinie, so ergiebt sich ihre Lage, da der entstehende ∠ = ∠ (LL′) ist. Man hat also ⊙ aus L, L′, K (1875) zu verzeichnen.

1881. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, K, K′, gleichartig oder ungleichartig.

Analyſis. Beſchreibt man um μ mit der Centrale $M\mu$ eine Kreislinie, ſo geht dieſelbe durch M, und berührt einen mit $r + r'$ oder $r - r'$ um M' beſchriebenen ⊙, kann alſo nach 578 gezeichnet werden.

1882. Aufgabe. ⊙ aus L_1, K_1, L'_1.

Analyſis. L, L' und K haben wegen der gleichen Sehnen dieſelbe Entfernung von μ; man hat alſo 1875 zu verzeichnen, ꝛc.

1883. Aufgabe. ⊙ aus L_1, K_1, K'_1.

Analyſis. Führt wie in 1882 zu 1879.

1884. Fig. 332. Aufgabe. ⊙ aus L, L', L''. Die Linien treffen ſich in einem Punkt.

Analyſis. Sei $FE = s$. Da μD den $\angle (LL')$ halbirt, alſo der Lage nach gegeben iſt, $\mu F = \mu B$, und $\angle \mu BD = R$ ſein muß, ſo beſtimmt ſich nach 548 durch Hilfe der Linien L und L'' $\angle \mu FE$, alſo auch mittelſt FE oder s die Größe von ϱ, weshalb nur ϱ mittelſt 79 zwiſchen L und den Ort für μ zu ſchieben iſt, um dieſen Punkt feſtzuſtellen.

Auflöſung. Halbire $\angle (LL')$, fälle aus einem beliebigen Punkte M dieſer Halbirungslinie einen $\perp$ MB auf L, ſchneide denſelben $=$ MF und ME ab, ſchiebe $s = IH$ und $\fallingdotseq$ L'' zwiſchen MF und ME, beſtimme $MN = MI$, $NB \fallingdotseq MD$, und lege durch B, und darauf durch μ $\fallingdotseq$ zu BM, MF, ME, ſo ergiebt ſich $FE = s$, $\mu B = \mu F$ und μE, und der um μ mit $B\mu$ gezeichnete ⊙ berührt L und L''.

Beweis. Es iſt $\mu F : MF = \mu B : MB = \mu E : ME$, da nach der Konſtruktion jedes dieſer Verhältniſſe $= \mu D : MD$ iſt. Hieraus folgt $\mu F = \mu B = \mu E$. FE hat die Länge s oder IH, da die $\triangle\triangle$ μFE und MIH außer der gleichen Lage, nach der Konſtruktion und dem vorhergehenden Theil des Beweiſes, ein Paar gleiche Seiten μF und MI haben. Der ⊙ um μ berührt endlich L und L', da $\mu B \fallingdotseq MB$ iſt, und MD $\angle (LL')$ halbirt.

1885. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, L', L''_ν. Die Linien treffen sich in einem Punkt.

Analysis. Fährt wie in 1880 zu 1884.

1886. Aufgabe. ⊙ aus L, K, L'_α (361).

Analysis. Durch L und L'_α bestimmt sich wie in 1252 ein Ort für μ; man hat also 1876 zu verzeichnen.

1887. Fig. 333. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, L'_α K. (361)

Analysis. Fällt man aus μ einen $\perp$ μD auf L', so zeigt sich, nach 1223 durch α, $\mu D : \mu F$, oder $\mu D : \mu B$, also auch, wenn ME ∦ BD gezogen, und μD verlängert wird, $\mu E : \mu M$, und DE : BM oder r gegeben. Da nun mittelst des zuletzt genannten Verhältnisses die $\perp$ zu L' stehende Linie DE bekannt ist, also die Lage einer L' ∦ Linie NE sich bestimmen läßt, so kann μ durch Hilfe des Verhältnisses $\mu M : \mu E$, und des Ortes L nach 549 festgestellt, und hiemit die Aufgabe gelöst werden. Kürzer als vorher läßt sich übrigens nach dem Folgenden die Lage von EN bestimmen. Es ist nämlich

$\mu D : DE = \mu B : r$, und
$\mu D : DE = \mu F : FG$, folglich muß

FG = r sein, während zugleich $\angle$ DFμ = α — R oder R — α gegeben ist. Daraus ergiebt sich aber nach 94 die Lage der L' ∦ Linie GEN.

1888. Fig. 334. Aufgabe. ⊙ aus P, L_α, L'_β. (361)

Analysis. Durch α und β bestimmen sich wie in 1223, wenn man aus μ auf L und auf L' die $\perp\perp$ μE und μD fällt, die Verhältnisse

$A\mu : E\mu$, angenommen = m : n, und
$\mu D : \mu C$, " = p : q. Hieraus folgt

d. Zus. s. $D\mu : E\mu = mp : nq$, weshalb nach 546 ein Ort für μ gegeben ist. Nun hat man aber auch $P\mu : E\mu = m : n$, also darf nur ein beliebiger $\perp$ FG : GH = n : m

gezeichnet werden, um die → von $P\mu$, und dadurch μ selbst zu erhalten.

1889. Fig. 334. Aufgabe. ⊙ aus L_α, L'_β, L''. (361)

Analysis. Durch α und β ergiebt sich wie in 1888 ein Ort für μ. Da aber auch $\mu B : \mu E$ gegeben ist, läßt sich ein zweiter gleichnamiger Ort, und folglich der gesuchte Punkt μ selbst bestimmen, u. s. w.

1890. Aufgabe. ⊙ aus L_α, L'_β, L''_γ. (361)

Analysis. Durch α und β erhält man wie in 1888 einen Ort für μ, und durch β und γ in derselben Art einen zweiten Ort; es läßt sich also der gesuchte Mittelpunkt bestimmen, u. s. w.

1891. Aufgabe. ⊙ aus L'_μ, L_η, K_s.

Analysis. Da μ von L und von s in K gleich weit entfernt sein muß, berührt ein mit dieser Entfernung beschriebener ⊙ sowohl L als den nach 316 mittelst s gegebenen Ort. Folglich kann die Aufgabe nach 1876 gelöst werden.

1892. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, K_s, K'_s.

Analysis. Führt durch 313 wie in 1891 zu 1881.

1893. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, L'_α, L''_β. (361)

Analysis. Man erhält wie in 1888 einen zweiten Ort für μ, u. s. w.

1894. Aufgabe. ⊙ aus L, L'_s, L''_α. (361).

Analysis. L und L''_α ergeben wie in 1252 einen Ort für μ; man erhält also ⊙ aus L, L''_μ, L'_s, siehe 1885, zu verzeichnen.

1895. Fig. 335. Aufgabe. ⊙ aus L, L', P_b. (359)

Analysis. Da $PB \times PB'' = PC^2 = b^2$ gegeben ist, und L einen Ort für B bildet, so ergiebt sich nach 590 durch L eine Kreislinie PB''A als Ort für B''. Nun ist in Rücksicht auf die 590 angeführte Konstruktion des letzteren Orts $TA \fallingdotseq FB$, und $\angle\ AB''T = R$, also trifft AB'' den Endpunkt F des Durchmessers BF, und es durchschneidet deshalb ferner die AF halbirende Linie MB'' nach 537 den

Mittelpunkt μ. Hieraus folgt endlich, daß sich beide $\odot\odot$ berühren, und $\odot$ aus L, L′, K, siehe 1875, zur Lösung der Aufgabe zu konstruiren ist.

Auflösung. Fälle aus P auf L den $\perp$ PD, bestimme A so, daß $PD \times PA = b^2$ wird, beschreibe über PA, als Durchmesser genommen, einen $\odot$, und zeichne nach 1875 eine L und L′ und den letztgenannten $\odot$ berührende $\odot$linie.

Beweis. Da nach der Konstruktion L und L′ von dem um μ gezeichneten $\odot$ berührt werden, so ist nur zu zeigen, daß die aus P nach demselben führende Berührungslinie PC die Länge b hat. Da $\odot$ um μ den $\odot$ um M berührt, gehen die Linien Mμ und PB nach 301. 1 und 2) durch den Berührungspunkt B″, weshalb $\angle$ PB″A $=\angle$ PDB $=$ R, also $\triangle$ PAB″ $\sim \triangle$ PDB, und PB × PB″, oder $PC^2 = PD \times PA$ ist. Nach der Auflösung hat man aber $PD \times PA = b^2$ konstruirt, folglich muß PC wirklich $=$ b sein.

Anmerkung. Da durch $\angle$ (LL′) ein Ort für μ gegeben ist, reduzirt sich die Aufgabe auf einem kürzeren Wege, nach dem in 2088 enthaltenen Gesetz auf $\odot$ aus P, P′, L. (1201.)

1896. Aufgabe. $\odot$ aus L, L'_μ, P_b. (359)

Analysis. Führt wie in 1880 zu 1895.

Anmerkung. Nach 2088 reduzirt sich die Aufgabe kürzer auf $\odot$ aus P, P′, L (1201).

1897. Aufgabe. $\odot$ aus L, L'_a, P_b. (359 und 361).

Analysis. Führt wie in 1895 zu 1886.

1898. Aufgabe. $\odot$ aus L, K, P_b. (359).

Analysis. Führt wie in 1895 zu 1879.

1898. b. Aufgabe. $\odot$ aus P_b, P'_b, L. (359).

Analysis. Durch P_b und L, und P'_b und L ergeben sich wie in 1895 zwei den gesuchten $\odot$ berührende $\odot\odot$, weshalb die Aufgabe durch 1879 gelöst werden kann.

Anmerkung. Aus 2083 folgt eine beſſere zu ⊙ aus P, P', L (1201) führende Auflöſung, als aus der vorſtehenden Analyſis.

1899. Fig. 336. **Aufgabe.** ⊙ **aus** L, L'$_\mu$, K_d (329). (Analogie zu 1895.)

Analyſis. Betrachtet man P als den Mittelpunkt von K, und lieſt, Fig. 336. benutzend, in der Analyſis, der Auflöſung und dem Beweiſe von 1895 $\frac{d}{2}$ ſtatt b, ſo paſſen dieſelben wörtlich hieher.

Anmerkung. Da durch ∠ (LL') ein Ort für μ gegeben iſt, reduzirt ſich die Aufgabe auf einem kürzeren Wege nach dem in 2089 enthaltenen Geſetz auf ⊙ aus P, P', L (1201).

1900. Aufgabe. ⊙ **aus** L, L'$_\mu$, K_d (329). (Analogie zu 1896.)

Analyſis. Führt wie in 1880 zu 1899.

Anmerkung. Nach 2089 reduzirt ſich die Aufgabe kürzer auf ⊙ aus P, P', L (1201).

1901. Aufgabe. ⊙ **aus** L, L'$_a$, K_d (329 und 361). (Analogie zu 1897.)

Analyſis. Führt wie in 1899 zu 1886.

1902. Aufgabe. ⊙ **aus** L, K_1, K'$_d$. (329) (Analogie zu 1898.)

Analyſis. Führt wie in 1899 zu 1879.

1903. Aufgabe. ⊙ **aus** L, K_d, K'$_d$. (329). (Analogie zu 1899.)

Analyſis. Durch K_d und L, und K'$_d$ und L ergeben ſich wie in 1899 zwei den geſuchten ⊙ berührende ⊙⊙, weshalb die Aufgabe durch 1879 gelöſt werden kann.

Anmerkung. Nach 2085 reduzirt ſich die Aufgabe kürzer auf ⊙ aus P, P', L (1201).

1904. Aufgabe. ⊙ **aus** L, P_b, K_d (329 und 359).

Analyſis. Durch P_b und L, und K_d und L ergeben

sich, wie in 1895 und 1899, zwei den gesuchten ⊙ ungleichartig berührende ⊙⊙, weshalb die Aufgabe durch 1879 gelöst werden kann.

Anmerkung. Nach 2087 reduzirt sich die Aufgabe kürzer auf ⊙ aus P, P′, L (1201).

1904. a. Aufgabe. ⊙ aus P, K^d schneidend $K'^{d'}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. Die gemeinschaftliche Sehne von K und K′ bildet nach 582. b. den einen Ort für μ, der zweite ergiebt sich durch P und K^d nach 369. a. Den Radius giebt μP

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1904. b. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K^d schneidend $K'^{d'}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. Die gemeinschaftliche Sehne von K und K′ bildet nach 582. b. den einen Ort für μ, der zweite ergiebt sich durch P_b und K^d nach 369. b. Den Radius giebt der von μ bis K reichende $\perp$ auf μM.

Zusatz. Es sind zwei Resultate möglich.

1904. c. Aufgabe. ⊙ aus K_d, $K'^{d'}$ schneidend $K''^{d''}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. Die gemeinschaftliche Sehne von K′ und K″ bildet nach 582. b. den einen Ort für μ; der zweite ergiebt sich durch K_d und $K'^{d'}$ nach 369. d. Den Radius giebt der von μ bis K′ reichende $\perp$ auf $\mu M'$.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

1904. d. Aufgabe. ⊙ aus 3 sich gegenseitig schneidenden Kreislinien K^d, $K'^{d'}$, $K''^{d''}$. (Bezeichnung 955. a.)

Analysis. Die gemeinschaftliche Sehne von K und K′ bildet nach 582. b. den einen, und die gemeinschaftliche Sehne von K′ und K″ gleichfalls nach 582. b. den zweiten Ort für μ. Den Radius giebt der von μ bis K reichende $\perp$ auf μM.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich der nachstehende

Lehrsatz: Die 3 gemeinschaftlichen Sehnen dreier sich gegenseitig schneidenden Kreise treffen sich in einem Punkt.

1905. Fig. 337. und Fig. 337. a. Aufgabe. ⊙ aus P, L, K_b (360).

Analysis. Legt man durch M eine ≠ zu b, und beschreibt einen dieselbe berührenden ⊙ um μ, so findet sich dessen Abstand von L und von P = r; die von M auslaufende Berührungslinie aber = b. Zeichnet man ferner eine Kreislinie um P mit r, und zieht eine um r entfernte ≠ zu L, so erhält man ⊙ aus L', K', M_b (1898) zu verzeichnen.

Anmerkung. Alle Aufgaben mit K_b sind doppelt, da b entweder Mμ oder die Verlängerung schneidet, und geben deshalb mindestens 2 Resultate. Um Figuren zu ersparen, soll die Andeutung der verschiedenen Fälle in der Folge unterbleiben.

1906. Aufgabe. ⊙ aus L, L', K_b (360).

Analysis. Führt durch gleiche Hilfsmittel wie in 1905 zu 1895.

1907. Aufgabe. ⊙ aus L, L'$_\mu$, K_b (360).

Analysis. Führt wie in 1905 zu 1896.

1908. Aufgabe. ⊙ aus L, K, K'$_b$ (360).

Analysis. Verfährt man wie in 1905, so ergiebt sich zunächst eine um r' entfernte ≠ von L, während der erforderliche Berührungskreis erhalten wird, indem man um M mit r + r' oder r − r' einen ⊙ beschreibt. Hiemit ist die Aufgabe gleichfalls auf ⊙ aus L, K, P_b (1898) reduzirt.

1909. Aufgabe. ⊙ aus L, K_d, K'$_b$ (329 u. 360).

Analysis. Durch L und K_d bestimmt sich, wie in 1899, ein den gesuchten ⊙ berührender ⊙, weshalb die Aufgabe durch 1908 gelöst werden kann.

1910. Aufgabe. ⊙ aus L, L'$_a$, K_b (360 u. 361).

Analyſis. L und L'_a beſtimmen nach 1252 einen Ort für μ; man erhält alſo 1907 zu verzeichnen.

1911. Aufgabe. ⊙ aus L, P_b, K_b (359 u. 360).

Analyſis. Durch P_b und L beſtimmt ſich wie in 1895 ein den geſuchten ⊙ berührender ⊙, weshalb die Aufgabe durch 1908 gelöſt werden kann.

1912. Fig. 338. Aufgabe. ⊙ aus L, K_b, K'_b (360).

Analyſis. Zieht man aus M eine ⫩ zu b, und beſchreibt einen dieſelbe berührenden ⊙ um μ, ſo ergiebt ſich die Länge der von M auslaufenden Berührungslinie = b, und die um r entfernte ⫩ zu L, welche den geſuchten ⊙ tangirt. Ferner beſtimmt ſich aber auch CB = r, aus welchem Grunde ſich, wenn man durch C eine ⫩ zu b' legt, und um M' einen dieſelbe berührenden ⊙ zeichnet, der Radius deſſelben = r + r', oder = r — r', CD aber = b' beſtimmt. Hieraus folgt, daß die Aufgabe durch ⊙ aus L', M_b, K''_b, ſiehe 1911, gelöſt werden kann.

5tes Kapitel.

Theilungen.

1913. Fig. 339. Aufgabe. In einem ▭ einen Punkt X ſo zu beſtimmen, daß ſich △ XAB = △ XDC, und △ XAD = △ XBC ergiebt.

Analyſis. Da ſich die Höhen beider Paare = △△ umgekehrt wie die Grundlinien verhalten müſſen, ſo beſtimmt ſich ein Ort für X, wenn man eine ⫩ zu a und c durch einen, die Höhe des ▭ wie c : a theilenden Punkt legt. Den zweiten Ort für X bildet die Verbindungslinie der Mitten von a und c, da nach 559 und 546 die auf b und d aus einem Punkt derſelben gefällten ⊥⊥ ſich wie d : b verhalten.

1914. Fig. XIV. Aufgabe. In einem ▱ einen Punkt X ſo zu beſtimmen, daß ſich △ XAB = △ XCD, und △ XBC = △ XAD ergiebt.

Analysis. Wie in 1913 bestimmt sich durch zweimalige Anwendung des Ortes 546 der gesuchte Punkt.

Anmerkung. Sind die Verhältnisse m:n und p:q statt 1:1 gegeben, so erhält man dieselben Oerter, da aus ah : ch'' = m : n z. B., h : h'' = mc : na folgt.

1915. Fig. 340. Aufgabe. Ein △ so in n gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien in einem Punkte zusammentreffen, drei Linien nach A, B, C gehen, und die übrigen eine Seite, z. B. a, durchschneiden.

Analysis. Da △ ABX : △ ACX : △ ABC = 1 : 1 : n sein muß, ergeben sich ∓ b und ∓ c zwei Oerter für X, worauf XBC auf gewöhnliche Art in n — 2 Theile zu theilen ist.

1916. Fig. 341. Aufgabe. Jeder von den 3 Punkten P, P', P'' liegt in einer Seite des △ ABC. Es soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß die aus demselben nach P, P', P'' gezogenen Linien das △ in 3 gleiche ▱▱ theilen.

Analysis. Durch Subtraktion der gegebenen Flächen AP'P'', BPP'', CPP' von $\frac{1}{3}$△ ABC ergeben sich die Flächen, und deshalb auch die Verhältnisse der △△ PXP', P'XP'', P''XP, woher sich die Aufgabe nach 1266 lösen läßt.

Determination. PP', PP'', P'P'' müssen weniger als $\frac{1}{3}$△ ABC abschneiden, damit die Aufgabe möglich ist.

1917. Aufgabe. Ein △ so in n gleiche Theile zu theilen, daß alle Theilungslinien dieselbe Seite a schneiden, und jede eine bestimmte Länge l, l', l'' ꝛc. erhält.

Analysis. $\frac{1}{n}$ f² und l bestimmen nach 185 die aus C auf l gefällte Höhe des von l abgeschnittenen △, $\frac{2}{n}$ f² u. l' die gleichliegende Höhe des zweiten △ u. s. w. Beschreibt

man also um C und B ○○ mit diesen verschiedenen Höhen, so hat man die folgende Hilfsaufgabe zu lösen, deren Konstruktion auch selbstständig (ohne versteckte Benutzung der Aufgabe △ aus a, h, α nämlich), aber weitläuftiger, 1970 zu finden ist:

Zwischen den verlängerten Schenkeln eines Centri∠ γ soll eine der Länge nach bestimmte Tangente l gezogen werden.

Auflösung. Fig. 342. Ziehe die CG ∓ Tangente HF, schneide CG = l ab, konstruire durch 320 ∠ CFG = ∠ ECG = γ, und ziehe die FG ∓ Tangente ED nach 282, so muß ED = l sein.

Beweis. △ CFG ist ∽ △ CIG, also auch ∽ △ CED; deshalb muß CH : CN. = CG : ED sein, da sich in ∽ △△ die Höhen wie die Grundlinien verhalten. Nun ist aber CH = CN, folglich hat man CG = ED = l gezeichnet.

Anmerkung. Ein großer Theil der hiehergestellten Aufgaben unterliegt bei der Auflösung mannichfaltigen Beschränkungen, woher sich schwierige und weitläuftige Determinationen ergeben. Die letztere Eigenschaft hat neben der größtentheils algebraischen Form derselben uns auch hier genöthigt, diese Determinationen nicht zu beachten, obwohl dieselben an sich bei diesen Aufgaben am meisten zu fordern sind.

1918. Aufgabe. Ein △ so in n gleiche Theile zu theilen, daß alle Theilungslinien dasselbe Seitenpaar schneiden, und jede zwei aufeinanderfolgenden, mit Einschluß der undurchschnittenen △seite, eine bestimmte Summe erhalten.

Analysis. Da die Summe der △seite und der nächsten Theilungslinie gegeben ist, so hat man diese selbst. In derselben Art bestimmt sich durch die gefundene Theilungslinie die nächstfolgende u. s. w.; es ist also 1917 zu verzeichnen.

1919. Aufgabe. } Wie in 1918, nur Differenz statt
Analysis. } Summe gelesen.

1920. Aufgabe. } Wie in 1918, nur Verhältniß
Analysis. } statt Summe gelesen.

1921. Aufgabe. } Wie in 1918, nur Rechteck statt
Analysis. } Summe gelesen.

1921. a. Aufgabe. Ein △ so in n gleiche Theile zu theilen, daß sämmtliche Theilungslinien dasselbe Seitenpaar (a u. b) schneiden, und die Summen der Seiten jedes Theils, welche in die △seiten fallen, gleich groß werden.

Analysis. Da alle Summen gleich sind, muß eine jede $\frac{a+b}{n}$ sein. Hiedurch ist die Summe zweier Seiten für jedes △ gegeben, dessen Spitze in C fällt, und $\frac{n-1}{n} f^2$, $\frac{n-2}{n} f^2$ u. s. w. zur Fläche hat. Nach 486 läßt sich aber aus der Fläche und dem (allen △△ zugehörenden) ∠ γ das Rechteck derselben Seiten ableiten, folglich kann man nach 457 jede einzeln bestimmen, und nach Abtragung derselben von C aus in a und b, die verlangten Theilungslinien zeichnen.

1922. Aufgabe. } Wörtlich wie in 1921. a, nur Dif-
Analysis. } ferenz statt Summe, a — b statt a + b, 459 statt 457 gelesen.

1923. Die Aufgaben 1921. a. und 1922 können allgemeiner gefaßt werden, indem man die Summen oder Differenzen für jeden Theil, mit Ausnahme des letzten, bestimmt.

1924. Fig. 343. Aufgabe. Ein △ durch eine gerade Linie in zwei Theile von gleichem Umfang und gleicher Fläche zu theilen.

Analysis. Es muß △ ABC : △ DEC, oder 2 : 1 nach 485 = ab : CE × CD sein, weßhalb $CE \times CD = \frac{ab}{2}$ bekannt ist. Zugleich ergiebt sich aber CD + CE = DA + AB + BE, wenn man DE in beiden Umfängen wegläßt, folg-

lich hat man auch $CE + CD = \frac{a+b+c}{2}$, und kann deshalb nach 457 die Linien CE und CD selbst bestimmen, also die verlangte Theilungslinie zeichnen.

1925. Aufgabe. Ein △ so in n gleiche Theile zu theilen, daß alle Theilungslinien dieselben Seiten (a u. b) schneiden, und die Umfänge von n—1 Theilen gegebene Längen u, u', ꝛc. erhalten.

Analysis. Aus der Fläche $\frac{1}{n}f^2$ und dem Umfange u des ersten ein △ bildenden Theils ergiebt sich nach 342 der Radius r eines in diesem Theil konstruirbaren ⊙. Legt man diesen ⊙ nach 306 im ∠ γ fest, so ist durch u, γ, r, nach 1357. 1 die Länge l der ersten Theilungslinie gegeben. Subtrahirt man l von u', und addirt den Rest zu den beiden übrigen Seiten des vorhergehenden △, so erhält man den Umfang des 2ten △, welches ebenfalls den ∠ γ, aber die Fläche $\frac{2}{n}f^2$ hat. Von diesem ergiebt sich ganz wie vorher der ⊙ im △ und die Länge der zweiten Theilungslinie. Eben so lassen sich ferner die ⊙⊙ für alle aufeinanderfolgende △△, deren Flächen $\frac{3}{n}f^2$, $\frac{4}{n}f^2$ ꝛc. sind, und darauf die Längen der Theilungslinien bestimmen, welche diese ⊙⊙ tangiren. Folglich hat man dieselben nur in ∠ γ nach 306 festzulegen, und schließlich nach 375 die verlangten Theilungslinien zu konstruiren.

Anmerkung. Die vorstehende Aufgabe gehört eigentlich in den 1sten Abschnitt dieses Hauptstücks.

1926. Fig. 344. Aufgabe. Ein △ durch gebrochene Linien, deren Richtungen und Verhältnisse gegeben sind, in n gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Sei CDEFG der erste Theil. Zieht man die Diagonalen CE ꝛc., verlängert dieselben beliebig, und zeichnet die ∓∓ Linien NH ꝛc., so müssen die Figuren CDEFG und

CNHIQ ∽ sein, und sich deshalb wie $CD^2 : CN^2$ verhalten. Da sich nun die Figur CNHIQ der Gestalt nach zeichnen läßt, indem hiezu $n-1$ ∠ und $n-3$ Verhältnisse zweier Seiten (508) gegeben sind, also die Fläche dieser Figur und die Länge NC bekannt angenommen werden kann, und außerdem die Fläche $CDEFG = \frac{1}{n} f^2$ ist, so bestimmt sich nach dem Vorigen, durch das gegebene Verhältniß, CD nebst D. Ist dieser Punkt festgestellt, so erhält man den ersten Theil CDEFG durch Konstruktion ∓ ∓ Linien zu NH ꝛc., und durch Benutzung der Diagonalen CH ꝛc. In derselben Art lassen sich auch die folgenden Flächen $\frac{2}{n} f^2$ ꝛc. bestimmen, und deshalb durch successive Konstruktion derselben jeder der verlangten Theile zeichnen.

1927. Aufgabe. Ein ▱ so in n gleiche Theile zu theilen, daß alle Theilungslinien dasselbe Seitenpaar (a u. c) schneiden, und jede eine bestimmte Länge l, l′, l″ꝛc. erhält.

Analysis. Verlängert man die geschnittenen Seiten a und c des ▱, so entsteht ein △ dessen Fläche p^2 sein mag. Der erste Theil bildet mit demselben ein △ von der Fläche $q^2 + \frac{1}{n} f^2$, weshalb durch l die vom Scheitel des ∠ (ac) auslaufende Höhe auf l nach 185 gegeben ist. Dasselbe findet mit dem zweiten △ statt, dessen Fläche $p^2 + \frac{2}{n} f^2$ sein wird. Daher gelangt man durch ein gleiches Verfahren wie in 1917 zur Konstruktion der verlangten Theile.

1928. Fig. 345. **Aufgabe.** Ein ▱ ABCD so in n gleiche Theile zu theilen, daß alle Theilungslinien dasselbe Seitenpaar (a u. c) schneiden, und bei sämmtlichen Theilen die Summe der beiden Gegenseiten, welche in den Viereckseiten liegen, dieselbe Größe erhalten.

Analysis. Jede Summe muß $\frac{a+c}{n}$ sein. Addirt man die Summe der Verlängerungen von a und c, SA + SD, zu der ersteren ein oder mehreremal genommenen Summe, so erhält man die Summe zweier △ seiten, für den ersten Theil z. B. SG + SH, deren Rechteck SG × SH durch △ SAD + $\frac{1}{n}$ oder $\frac{2}{n}$ ꝛc. f^2 und ∠ (ac) nach 486 bekannt ist. Nach 457 läßt sich aber jede dieser Seiten einzeln ableiten, folglich ergeben sich die Punkte G, H u. s. w., und darauf schließlich die verlangten Theilungslinien.

1929. Aufgabe. } Uebereinstimmend mit 1928, nur
Analysis. } Differenz statt Summe, a — c statt a + c, 459 statt 457 gelesen.

1930. Fig. 345. Aufgabe. Ein ▱ ABCD durch eine gerade Linie in 2 Theile von gleicher Fläche und gleichem Umfang zu theilen.

Analysis. Da △ SBC : △ SGH = SB × SC : SG × SH nach 485 sein muß, und △ SGH = △ SAD + $\frac{1}{2}f^2$ gegeben ist, so läßt sich SG × SH bestimmen. Nun ist aber AG + AD + HD = GB + BC + CH = $\frac{a+b+c+d}{2}$, folglich hat man AG + DH = $\frac{a+b+c-d}{2}$, und SG + SH = SA + SD + $\frac{a+b+c-d}{2}$. Aus dem Rechteck und der Summe zweier Linien ergeben sich aber nach 457 diese Linien selbst, folglich lassen sich die Punkte G und H nebst der verlangten Theilungslinie feststellen.

1931. Fig. 346. Aufgabe. Ein Fünfeck ABCDE durch eine gerade Linie in zwei Theile von gleicher Fläche und gleichem Umfang zu theilen.

Analysis. Da △ SGH : △ SBN = SG × SH : SB × SN nach 485 sein muß, und △ SGH = △ SAE +

$\frac{1}{2}f^2$, $\triangle$ SBN aber an sich gegeben ist, so läßt sich SG × SH bestimmen. Nun ist $AG + AE + EH = GB + BC + CD + DH = \frac{a+b+c+d+e}{2}$, folglich hat man $AG + EH = \frac{a+b+c+d-e}{2}$, und $SG + SH = SA + SE + \frac{a+b+c+d-e}{2}$. Aus dem Rechteck und der Summe zweier Linien ergeben sich aber nach 457 diese Linien selbst folglich lassen sich die Punkte G und H nebst der verlangten Theilungslinie feststellen.

6tes Kapitel.

Gemischte Aufgaben.

1932. Aufgabe. In einem festliegend gegebenen $\triangle$ ABC eine Linie XY so zwischen b und c zu legen, daß sich dieselbe = BX und = CY ergiebt.

Analysis. $\triangle$ AXY läßt sich nach 1755 konstruiren, da $AX + XY = AB$, $AY + YX = AC$, und $\angle$ XAY gegeben ist.

1933. Aufgabe. Außerhalb eines festliegend gegebenen $\triangle$ ABC eine Linie XY so zwischen b und c zu legen, daß sich CX = XY = YB ergiebt.

Analysis. $\triangle$ AXY läßt sich ähnlich 1759 konstruiren, da $AX - XY = AC$, $AY - YX = AB$, und $\angle$ XAY gegeben ist.

1934. Fig. 547. Aufgabe. Es sollen zwei Linien x und y so bestimmt werden, daß sich $xy = f^2$, und $(x+a)(y+a) = q^2$ ergiebt.

Analysis. Ist OD = x, OE = y, DF = EG = a, OS = OH = f, ON = OI = q, so müssen nach den Bedin-

gungen der Aufgabe zwei konzentrische Kreislinien, die eine durch die Punkte K, D, S, H, die andere durch die Punkte G, N, F, L laufen. Zeichnet man also nach der Feststellung von IN = 2q, und HS = 2f zwei beliebige, IN und HS als Sehnen fassende, konzentrische Kreislinien, so hat man nur durch die Mitte O von HS und IN eine Sehne FG so zu legen, daß sich der von beiden Kreislinien begrenzte Abschnitt FD oder EG = a ergiebt. Diese Aufgabe ist 983 gelöst.

Anmerkung. Eine bessere Auflösung ist in 2182 enthalten.

1935. Fig. 125. u. 125. a. Aufgabe. Gegeben K und K'; man soll einen Punkt P so bestimmen, daß jedes Paar einen bestimmten ∠ α bildende Linien PX und PX', welches durch P und von K und K' (gleichartig) begrenzt wird, dasselbe Verhältniß hat.

Analysis. Bemerkt man, daß diese Aufgabe nur eine Umstellung in Hinsicht der Bedingungen von dem 586 angeführten Orte ist, so ergiebt sich aus der Konstruktion dieses Orts, daß sich MP : M'P = r : r' verhalten muß. Hieraus folgt, da MM' feststeht, daß nach 593 ein Ort für P gegeben ist. Nun hat man aber auch durch MM' und ∠ α nach 920 einen zweiten Ort für P, folglich läßt sich der gesuchte Punkt mittelst der Zeichnung beider Oerter feststellen.

1936. Fig. 126. a., 126. b. ꝛc. Aufgabe. Gegeben K und K'; man soll einen Punkt P so bestimmen, daß sich aus jedem Paar einen bestimmten ∠ α einschließenden Linien PB' und PC', welches durch P und von K und K' (ungleichartig) begrenzt wird, dasselbe Rechteck bilden läßt.

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 1935; nur muß 589, a statt 586 gelesen werden.

Anmerkung. Die in dieser und der vorhergehenden Nummer gegebenen Umstellungen der Oerter sind als Unterrichtsmittel sehr zu empfehlen, da für den Schüler bei der Un-

terſuchung derſelben nothwendig eine reiflichere Durchdringung der Oerter ſelbſt hervorgeht.

1937. Aufgabe. Gegeben P, P', K; man ſoll einen Punkt X ſo beſtimmen, daß ſich die Tangente XB : XP : XP' = m : n : p verhält.

Analyſis. Durch P, P' und n:p ergiebt ſich nach 593 der eine, und durch P, K und n:m nach 599 der zweite Ort für X.

Anmerkung. 1567 iſt ein einzelner Fall dieſer Aufgabe, indem dort m:n:p = 1:1:1 iſt.

1938. Aufgabe. Gegeben P, K, K'; man ſoll einen Punkt X ſo beſtimmen, daß ſich die aus demſelben nach K und K' führenden Tangenten XB und XB', und die Linie XP wie m:n:p verhalten.

Analyſis. Durch P, K und p:m ergiebt ſich nach 599 der eine, und durch P, K' und p:n in derſelben Art der zweite Ort für X.

Anmerkung. 1568 iſt ein einzelner Fall dieſer Aufgabe.

1939. Aufgabe. Gegeben K, K', K''; man ſoll einen Punkt X ſo beſtimmen, daß ſich die aus demſelben nach K, K' und K'' führenden Tangenten XB, XB', XB'' wie m:n:p beſtimmen.

Analyſis. Durch K, K' und m:n ergiebt ſich nach 601 der eine, und durch K', K'' und n:p in derſelben Art der zweite Ort für X.

Anmerkung. 1579 iſt ein einzelner Fall dieſer Aufgabe, indem dort m:n:q = 1:1:1 iſt.

1940. Aufgabe. Gegeben P'', L, L'; man ſoll eine von L und L' begrenzte Linie XY ſo durch P'' legen, daß ſich die Summe der in L und L durch XY abgeſchnittenen Linien (AX + AY) = s ergiebt.

Analysis.

1. Fall. Fig. 348. P″ liegt zwischen L und L′. Zieht man P″B ∦ AY, P″C ∦ AX, so ergiebt sich nach 565 BX × CY = P″B × P″C. Nun ist aber auch BX + CY = s — (AB + AC) = s — (P″B + P″C) gegeben, folglich läßt sich die Aufgabe durch 457 lösen.

2. Fall. Fig. 348. a. P″ liegt nicht zwischen L und L′. Zunächst ergiebt sich, wenn man durch P″ ∦∦ zu L u. L′ legt, △P″BX ∼ △P″CY, also BX × CY = BP″ × CP″. Nun ist aber auch

$$\begin{aligned} CY - BX &= CA + AY + AX - AB \\ &= s - (AB - AC) \\ &= s - (CP'' - BP'') \text{ gegeben, folglich} \end{aligned}$$

läßt sich die Aufgabe durch 459 lösen.

Zusatz. Beide Fälle haben zwei Resultate. Das andere Resultat ergiebt sich beim 2ten Fall im Scheitel ∠ des ∠ (L L′). Im ersten Fall können beide Resultate zusammenfallen.

1941. Aufgabe. Gegeben P″, L, L′, P in L, P′ in L′; man soll eine in L und L′ endigende Linie XY so durch P″ legen, daß sich PX + P′Y = s ergiebt.

1. Fall. L ist ∦ L′. Siehe 744 und 745.

2. Fall. L′ ist nicht ∦ L′, und P und P′ liegen in dem Schneidungspunkt beider Linien. Siehe 1940.

3. Fall. L ist nicht ∦ L′ und P liegt im Schneidungspunkt beider Linien, P′ beliebig in L′.

Analysis. Fig. 348. Sei A der Schneidungspunkt von L und L′. Da AP′ gegeben ist, erhält man AX + AY = s ± AP′, hat also Fall 2) oder 1940 zu lösen.

4. Fall. L ist nicht ∦ L′, und weder P noch P′ liegen im Schneidungspunkt beider Linien.

Analysis. Da AP und AP′ gegeben sind, erhält man AX + AY = s ± AP ± AP′, hat also Fall 2) oder 1940 zu lösen.

1942. Aufgabe. Gegeben P″, L, L′; man soll eine von L und L′ begrenzte Linie XY so durch P″ legen, daß sich der Unterschied der in L und L′ durch XY bestimmten Abschnitte (AX — AY) = d ergiebt.

Analysis.

Fall 1). Fig. 348. P″ liegt zwischen L und L′, Zieht man durch P″ ∦ zu L und L′, so ergiebt sich nach 565 BX × CY = P″B × P″C. Nun ist aber auch BX — CY = AX — AY — AB + AC = d — (AB — AC) = d — (P″C — P″B) gegeben, folglich läßt sich die Aufgabe durch 459 lösen.

Fall 2). Fig. 348. a. P″ liegt nicht zwischen L und L′. Zunächst ergiebt sich, wenn man durch P″ ∦ zu L und L′ zieht, △ P″BX ∽ △ P″CY, also CY × BX = P″B × P″C. Nun ist aber auch

$$\begin{aligned} CY + BX &= AC + AY + AB - AX \\ &= AC + AB - (AX + AY) \\ &= P''B + P''C - d \text{ gegeben,} \end{aligned}$$

folglich läßt sich die Aufgabe durch 457 lösen.

Zusatz. Wie in 1940.

1942. a. Aufgabe. Gegeben P″, L, L′, P in L, P′ in L′; man soll eine von L und L′ begrenzte Linie XY so durch P″ legen, daß sich PX — P′Y = d ergiebt.

Fall 1). L ist ∦ L′. Siehe 746 und 747.

Fall 2). L ist nicht ∦ L′, P und P′ liegen im Schneidungspunkt beider Linien. Siehe 1942.

Fall 3). L ist nicht ∦ L′, P liegt im Schneidungspunkt beider Linien, P′ beliebig in L′.

Analysis. Sei A der Schneidungspunkt von L und L′. Da AP′ gegeben ist, erhält man AX — AY = d ± AP′, hat also Fall 2) oder 1942 zu lösen.

Fall 4). L ist nicht ∦ L′, und weder P noch P′ liegen im Schneidungspunkt beider Linien.

Analysis. Da AP und AP′ gegeben sind, erhält man $AX - AY = d \pm AP \mp AP'$, hat also Fall 2) oder 1942 zu lösen.

1943. Aufgabe. Gegeben P; P′, K; man soll einen Punkt X so in K bestimmen, daß sich die Verbindungslinie der beiden übrigen von PX und P′X mit K gebildeten Durchschnitte $\mp PP'$ ergiebt.

Analysis. Durch 302 wird man darauf geleitet, daß X der Berührungspunkt einer P und P′ durchlaufenden und K berührenden Kreislinie sein muß, woher die Aufgabe durch 877 Fall 1) oder 2) (je nachdem die $\mp$ zu PP′ außerhalb oder innerhalb des $\triangle PP'X$ fallen soll) lösbar ist.

1944. Fig. 349. Aufgabe. Gegeben P, P′ und eine festliegende begrenzte Linie AB, es soll in AB ein Punkt X so bestimmt werden, daß sich $\angle APX = \angle BP'X$ ergiebt.

Analysis. Man hätte $\angle APX = \angle BP'X$, wenn $\angle APP' - \angle BP'P = \angle XPP' - \angle XP'P$ wäre, folglich kennt man zur Konstruktion des $\triangle PP'X$: die festliegende Grundlinie PP′, die Differenz der $\measuredangle$ an derselben und einen Ort AB für die Spitze, und es kann die Aufgabe daher mittelst g. Betr. §. 31. gelöst werden.

1945. Aufgabe. Es sind die festliegenden begrenzten Linien AB und A′B′, und eine unbegrenzte L gegeben; man soll X in L so bestimmen, daß sich $\triangle ABX = \triangle A'B'X$ ergiebt.

Analysis. Durch 551 erhält man einen zweiten Ort für X.

1946. Aufgabe. Es sind die festliegenden begrenzten Linien AB und A′B′, und K gegeben; man soll X in K so bestimmen, daß sich $\triangle ABX = \triangle A'B'X$ ergiebt.

Analysis. Durch 551 erhält man einen zweiten Ort für X.

1947. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich $\angle PXP'' = \alpha$, und $\triangle PXP' = \triangle P'XP''$ ergiebt.

Analysis. Durch PP″ und α ergiebt sich nach 320 ein Ort für X, und durch 551 der andere.

1948. Aufgabe. Es sind 3 festliegende begrenzte Linien AB, A′B′, A″B″ gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich $\triangle ABX = \triangle A'B'X = \triangle A''B''X$ ergiebt.

Analysis. Durch AB und A′B′ ergiebt sich nach 551 der eine, und durch A′B′ und A″B″ in derselben Art ein zweiter Ort für X.

1949. Fig. 350. Aufgabe. Es sind zwei festliegende begrenzte Linien AB und A′B′ gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die $\triangle\triangle$ AXB und A′XB′, und die $\measuredangle$ AXB und A′XB′ gleich groß ergeben.

Analysis. Damit die Bedingungen der Aufgabe erfüllt wären, müßte nach 485. 2) $XA \times XB = XA' \times XB'$, also $XA : XA' = XB' : XB$, und außerdem $\angle AXA' = \angle BXB'$, folglich $\triangle AXA' \sim \triangle BXB'$ sein, weshalb das Verhältniß der auf AA′ und BB′ aus X gefällten Höhen $= BB' : AA'$, also auch nach 546 ein Ort für X gegeben ist. Nun bestimmt aber die Bedingung, daß $\triangle ABX = \triangle A'B'X$ werden soll, nach 551 einen zweiten Ort für X, folglich läßt sich der gesuchte Punkt feststellen.

1950. Fig. 350. Aufgabe. Wie in 1945; nur ist $\triangle AXB = \triangle A'XB' = m : n$ bedingt.

Analysis. Mögen h und h′ die aus X auf AB und A′B′ gefällten Höhen bezeichnen. Damit die Bedingung der Aufgabe statt fände, müßte $AB \cdot h : A'B' \cdot h' = m : n$, also auch $h : h' = m \cdot A'B' : n \cdot AB$ sein. Mittelst dieses Verhältnisses der $\perp\perp$ ergiebt sich aber der zweite Ort für X nach 546.

1951. Aufgabe. Wie in 1946; nur ist $\triangle AXB : \triangle A'XB' = m : n$ bedingt.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1950.

1952. Aufgabe. Wie in 1947; nur ist $\triangle PXP' : \triangle P'XP'' = m : n$ bedingt.

Analysis. Ergiebt sich wie in 1950, während der erste Ort durch 320 hervorgeht.

1953. Aufgabe. Wie in 1948; nur ist $\triangle AXB : \triangle A'XB' : \triangle A''XB'' = m : n : p$ bestimmt.

Analysis. Wie in 1950 folgt aus der Bedingung: $\triangle AXB : \triangle A'XB' = m : n$ der eine, und aus der zweiten Bedingung: $\triangle A'XB' : \triangle A''XB'' = n : p$ der zweite Ort für X.

1954. Fig. 350. Aufgabe. Es sind zwei festliegende begrenzte Linien AB und A'B' gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich $\triangle AXB = \triangle A'XB'$, und $AX^2 + BX^2 = XA'^2 + XB'^2$ ergiebt.

Analysis. Sind C und C' die Mitten von AB und A'B', so ergiebt sich nach Zusatz 218

$$AX^2 + BX^2 = 2AC^2 + 2CX^2, \text{ und}$$
$$A'X^2 + B'X^2 = 2A'C'^2 + 2C'X^2, \text{ also}$$
$$AC^2 + CX^2 = A'C'^2 + C'X^2, \text{ folglich}$$
$$CX^2 - C'X^2 = A'C'^2 - AC^2, \text{ wodurch man,}$$

da CC' festliegt, nach 211 einen Ort für X erhält. Nun ist aber, mittelst der Bedingung $\triangle ABX = \triangle A'B'X$, nach 551 ein zweiter Ort für diesen Punkt gegeben, folglich läßt sich derselbe feststellen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt der Ort: wenn 4 Punkte A, B, A', B' gegeben sind, läßt sich stets ein Ort so bestimmen, daß sich für jeden Punkt X desselben: $XA^2 + XB^2 = XA'^2 + XB'^2$ ergiebt.

1955. Fig. 350. Aufgabe. Es sind 2 festliegende begrenzte Linien AB und A'B' gegeben;

man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich $\triangle AXB = \triangle A'XB'$, und $AX^2 - BX^2 = A'X^2 - B'X^2$ ergiebt.

Analysis. Die zweite Bedingung der Aufgabe wäre erfüllt, wenn man $AX^2 + B'X^2 = BX^2 + A'X^2$ bestimmen könnte. Dies läßt sich aber in Beziehung auf die beiden Linien AB' und BA' nach dem in 1954 entwickelten Ort ausführen, also auch der gesuchte Punkt X durch 551 feststellen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt der Ort: wenn 4 Punkte A, B, A', B' gegeben sind, läßt sich stets ein Ort so bestimmen, daß $AX^2 - BX^2 = A'X^2 - B'X^2$ wird.

1956. Aufgabe. Es sind 6 Punkte P, P', P'', P''', P^{IV}, P^{V} gegeben; man soll einen 7ten X so bestimmen, daß $PX^2 + P'X^2 = P''X^2 + P'''X^2 = P^{IV}X^2 + P^{V}X^2$ wird.

Analysis. Ergiebt sich durch zweimalige Anwendung des 1954 entwickelten Orts.

1957. Aufgabe. Es sind 6 Punkte P, P', P'', P''', P^{IV}, P^{V} gegeben; man soll einen 7ten X so bestimmen, daß sich $PX^2 - P'X^2 = P''X^2 - P'''X^2 = P^{IV}X^2 - P^{V}X^2$ ergiebt.

Analysis. Folgt durch eine zweimalige Anwendung des 1955 entwickelten Orts.

1958. Fig. 350. Aufgabe. Es sind 2 festliegende Linien AB und A'B' gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich $\triangle ABX = \triangle A'B'X$, und $XA^2 + XB^2 + XA'^2 + XB'^2 = s^2$ ergiebt.

Analysis. Sind C und C' die Mitten von AB und A'B', so ergiebt sich nach Zusatz 218.

$$AX^2 + BX^2 = 2AC^2 + 2CX^2,$$

und $A'X^2 + B'X^2 = 2A'C'^2 + 2C'X^2$, also durch

Addition $s^2 = 2AC^2 + 2A'C'^2 + 2CX^2 + 2C'X^2$,

und $CX^2 + C'X^2 = \frac{s^2}{2} - AC^2 - A'C'^2$, weshalb nach 220 ein Kreisort für X gegeben ist. Nach 551 läßt sich außerdem ein zweiter Ort für X bestimmen, folglich kann man den gesuchten Punkt verzeichnen.

1959. Fig. 351. Aufgabe. △ ABC aus a, (b:c), so daß A in A, B in L, C in eine L ∓ Linie L' fällt.

Analysis. Durch BC = a ist, da diese Linie zwischen ∓ ∓ fallen soll, die → derselben gegeben. Deshalb erhält man, wenn EF = a, ED ∓ CA, FD ∓ BA ist, △ ABC ≏ △ DEF, also ED = AC, und daher AD ∓ CE. Da nun DE : DF = (b : c) sein muß, so läßt sich mittelst 593 D feststellen, worauf sich BC ergeben muß, wenn man durch A ∓ ∓ zu DE und DF legt.

1960. Fig. 352. Aufgabe. △ ABC aus (b : c), → a, so daß A in A, B in L, C in L' fällt.

Analysis. Legt man durch A, F, E ∓∓ zu a, b, c, so ergiebt sich △ ABC ∾ △ EGF, also EG : FG = CA : BA = (b:c), weshalb DAG nach 547 eine gerade Linie sein muß, also ein Ort für G gegeben ist. Durch A und → a ist aber die Lage von EF bestimmt (könnte auch in Rücksicht auf a beliebig angenommen werden), folglich läßt sich mittelst des Orts 593 und EG : GF = (b : c) der Punkt G feststellen. Man hat also zur Bestimmung des △ ABC nur schließlich durch A ∓∓ zu GE und GF zu legen.

1961. Fig. 352. Aufgabe. △ ABC aus f^2, α, so daß A in A, B in L, C in L' zu liegen kommt.

Analysis. Durch f^2 und α ergiebt sich nach 486 (bc); mittelst (bc) und α aber, da A festliegt und sich B in einer geraden Linie L befindet, ein zweiter Ort für C nach 588, weshalb dieser Punkt, und hierauf △ ABC festgestellt werden kann.

1962. Aufgabe. △ ABC aus f^2, α, so daß A in A, B in L, C in K zu liegen kommt.

Analyſis. Ergiebt ſich wie in 1961.

1963. Aufgabe. △ ABC aus f^a, α, ſo daß A in A, B in K, C in K′ zu liegen kommt.

Analyſis. Durch f^a und α ergiebt ſich nach 488 (bc); mittelſt (bc) und α erhält man aber, da A feſtliegt, und ſich B in einer Kreislinie K befindet, nach 589. a. einen zweiten Ort für C, weshalb dieſer Punkt in K′, und hierauf △ ABC feſtgeſtellt werden kann.

1964. Aufgabe. △ ABC aus f^a_t, α, ſo daß A in A, B und C in K fallen.

Analyſis. Ergiebt ſich wörtlich wie in 1963; nur muß K ſtatt K′ geleſen werden.

1964. a. Fig. 416. a. Aufgabe. Es ſoll in ein feſtliegend gegebenes ▱ ein ⊡ eingeſchrieben werden.

Analyſis. Aus der Kongruenz der △△ YBZ und XDV (1 Seite und 2 ∠) ergiebt ſich YB = VD, alſo auch, wenn man die Mitte E von VY mit B und D verbindet, da außerdem ∠ EYB = ∠ EVD ſein muß, △ YEB ≅ △ VED, weshalb DEB eine gerade Linie, und E die Mitte beider ▱▱ bildet, alſo gegeben iſt. Nun hat man ferner ∠ XEY = R, und EY : EX = 1 : 1, alſo läßt ſich nach Analyſis 2) 1768 ◺ EXY, und mittelſt deſſelben auch das geſuchte ⊡ konſtruiren.

1964. b. Fig. 416. a. Aufgabe. Es ſoll in ein feſtliegend gegebenes ▱ ein ◇ eingeſchrieben werden, deſſen Diagonalen ſich wie m : n verhalten.

Analyſis. Führt wie in 1964. a. zur Konſtruktion eines ◺, von dem E die Lage der Spitze bildet, ∠ XEY = R iſt, und ſich EX : EY = m : n verhält. Dies ◺ kann nach 1768 Analyſis 2) gezeichnet werden.

1964. c. Fig. 416. a. Aufgabe. Es ſoll in ein feſtliegend gegebenes ▱ ein ▭, in welchem ∠ (cc′) = α iſt, eingeſchrieben werden.

Analyſis. Fährt wie in 1964. a. zur Konſtruktion eines △, von dem E die Lage der Spitze bildet, ∠ XEY = α iſt, und ſich EX : EY = 1 : 1 verhält. Dies △ kann nach 1768 Analyſis 2) gezeichnet werden.

1964. d. Fig. 416. a. Aufgabe. Es ſoll in ein feſtliegend gegebenes ▱ ein zweites ▱, in welchem ∠ (cc') = α, und c : c' = m : n iſt, eingeſchrieben werden.

Analyſis. Fähret wie in 1964. a. zur Konſtruktion eines △, von dem E die Lage der Spitze bildet, ∠ XEY = α iſt, und ſich EX : EY = m : n verhält. Dies △ kann nach 1768 Analyſis 2) gezeichnet werden.

1965. Fig. 353. Aufgabe. In ein feſtliegend gegebenes △ ein ▭ mit einer gegebenen Diagonale c ſo einzuſchreiben, daß eine Seite deſſelben ∦ einer Seite des △ zu liegen kommt.

Analyſis. Durch ∠ γ iſt CV : XV, oder wenn CG ∦ VY, alſo = c gezogen iſt, GY : YZ gegeben. Hiedurch erhält man aber nach 546 einen Ort für G, folglich iſt nur CG = d abzuſchneiden, um G feſtzuſtellen, und hierauf mittelſt einer durch G zu a gezogenen ∦ XY das verlangte ▭ zu konſtruiren.

Auflöſung. Fälle und errichte aus A und in C ⊥⊥ auf a, ziehe AN ∦ a, verbinde B mit N, ſchneide CG = c ab, lege durch G eine ∦ XY zu a, und fälle die ⊥⊥ YZ und XV auf a, ſo bildet YXVZ das verlangte ▭.

Beweis. Da CV : VX = AN : h, und
YG : YZ = AN : h iſt, muß
YG = CV, alſo auch
YV = CG = c ſein.

Zuſatz. Es ſind zwei verſchiedene Reſultate möglich.

Anmerkung. Statt in der Aufgabe die Diagonale des ▭ als Bedingung zu nehmen, konnte auch die Summe der Quadrate zweier Nebenſeiten = c^2 gegeben werden.

1966. Fig. 354. Aufgabe. In ein festliegend gegebenes △ ein ▭ mit einer gegebenen Differenz der Quadrate zweier Nebenseiten = d^2 so einzuschreiben, daß eine Seite desselben ∓ einer Seite des △ zu liegen kömmt.

Analysis. Fällt man aus A auf a die Höhe h, beschreibt zur Benutzung von d mit dieser Länge um D einen ⊙, und zieht an denselben aus S eine Tangente, so ergiebt sich, da sowohl $ZY^2 - XY^2$ als auch $SD^2 - SG^2 = d^2$ ist, SG = XY. Man hat also in h einen Punkt S so zu bestimmen, daß die aus demselben an den ⊙ um D gezogene Tangente sich eben so groß als eine denselben Punkt S durchlaufende ∓ XY zu a ergiebt. Verlängert man zur Analysis dieser Aufgabe GS, und legt durch A eine ∓ zu a, so erhält man, da AS : XY = h : a ist, AS : SG = h : a, und wegen der Aehnlichkeit der △△ NAS und SGD, AS : SG = AN : d, also h : a = AN : d. Folglich kann zunächst Punkt N, dann mittelst einer Tangente, Punkt S, und hierauf XY nebst dem verlangten ▭ bestimmt werden.

Zusatz. Es ergeben sich zwei verschiedene Resultate. Von diesen fällt ein ▭ mit seinen ∠ spitzen in die Verlängerungen von b und c.

1967. Fig. 236. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden ∠ ist ein dieselben berührender ⊙ gegeben; man soll an diesen ⊙ eine Tangente BC so legen, daß sich die beiden vom Berührungspunkte und den Schenkeln bestimmten Abschnitte BF und CF, wie m : n verhalten.

Analysis. Wären die Abschnitte selbst und α, der ⊙ aber nicht gegeben, so ließe sich nach 1630 △ ABC konstruiren, folglich läßt sich, wenn man zwei beliebige, sich wie m : n verhaltende Abschnitte wählt, ein ABC ∽ △ auf die angegebene Art zeichnen. Da man nun innerhalb α mittelst dieses

ein △ die ⌒ von BC enthält, hat man nur schließlich zur Feststellung der Lage dieser Linie 282 anzuwenden.

1968. Fig. 230. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden ∠ ist ein dieselben berührender ⊙ gegeben; man soll an diesen ⊙ eine Tangente BC so legen, daß sich der Unterschied der beiden vom Berührungspunkte und den Schenkeln bestimmten Abschnitte CF und BF = d ergiebt.

Analysis. Da nach 1639 BF = CG, also GF, die gemeinschaftliche Tangente der ⊙⊙ um W und M, = d ist, der ⊙ um W aber feststeht, und der ⊙ um M die beiden Schenkel des gegebenen ∠ berührt, so reduzirt sich die Aufgabe auf die Konstruktion von ⊙ aus L, L_a, K_b, siehe 1906.

1969. Fig. 355. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines festliegenden ∠ ist ein dieselben berührender ⊙ gegeben; man soll an diesen ⊙ eine Tangente BC so legen, daß sich das Rechteck der beiden vom Berührungspunkte und den Schenkeln bestimmten Abschnitte CE × BE = q^2 ergiebt.

Analysis. Beschreibt man zur Benutzung von q^2 in Verbindung mit ϱ oder OE ⊙⊙ um die △△ OBC und ABC, so ergiebt sich, da CE × EB oder $q^2 = \varrho \times EF$ sein muß, der ⊥ EF, und es fällt das Centrum der O, B, und C durchlaufenden ⊙linie nach 825 in die Mitte D des Bogens CB, weshalb sich GF ∦ CB, also auch der aus G auf CB gefällte ⊥ GH gegeben zeigt. Nun ist ∠ ADB = γ, also ∠ DGB = ∠ DBG = $\frac{\gamma}{2}$, und außerdem ∠ EBD = $\frac{\alpha}{2}$, folglich muß ∠ CBG = $\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{2R-\beta}{2}$ sein, woraus ∠ CBG = ∠ GBN, und ⊥ GH = ⊥ GN hervorgeht. Da sich ferner in derselben Art ∠ BCG = ∠ GCS, also ⊥ GH = ⊥ GS ergiebt, so zeigt sich, daß die gefundene Länge GH der Radius ϱ′ des ⊙ am △ ABC ist, die

Aufgabe folglich sehr einfach gelöst werden kann, wenn man ϱ' so bestimmt, daß $\varrho' \varrho = q^2$ wird, wenn man ferner den zum Radius ϱ' gehörenden $\odot$ nach 306 zwischen die Schenkel des gegebenen $\angle$ schiebt, und an beide $\odot\odot$ nach 318 eine gemeinschaftliche Tangente zieht.

Anmerkung 1) Aus der vorstehenden Analysis folgt das

Lehrsatz. Daß durch 2 von den 3 Stücken $\varrho\varrho'$ oder CE × EB, Fig. 355., f^2 und α das dritte abgeleitet werden kann:

denn es verhält sich $\varrho\varrho' : \varrho' \left(\frac{b+c-a}{2}\right) = \varrho : \left(\frac{b+c-a}{2}\right)$,

also auch nach 1541 $\varrho\varrho' : f^2 = \varrho : \left(\frac{b+c-a}{2}\right)$,

oder $CE \times EB : f^2 = \varrho : \frac{b+c-a}{2}$,

und das Verhältniß $\varrho : \frac{b+c-a}{2}$ oder OQ : AQ bestimmt den $\angle$ OAQ, also auch den $\angle \alpha$, und kann, wenn derselbe bekannt ist, gefunden werden.

Anmerkung 2). Die Bedingungen, welche zur Konstruktion einer Tangente an einen die Schenkel eines festliegenden $\angle$ berührenden $\odot$ benutzt wurden, sind:

1) die → der Tangente, siehe 282;
2) die Summe der vom Berührungspunkt und den Schenkeln bestimmten beiden Abschnitte, siehe 375;
3) der Unterschied dieser Abschnitte, siehe 1968;
4) das Verhältniß dieser Abschnitte, siehe 1967;
5) das Rechteck dieser Abschnitte (vorher gelöst).

Begnügt man sich mit solchen Konstruktionen, welche nicht an den festliegend gegebenen Stücken ausgeführt werden können, und freilich den örtlichen Aufgaben am wenigsten anpassen, so gelangt man in folgender Art auf demselben Wege bei den Aufgaben 2), 3), 4), 5), kürzer als in den angegebenen Nummern, zum Ziel: (Fig. 355) $\angle$ COB ist nach 326 = R +

$\frac{\alpha}{2}$, und ϱ ist die Höhe des △ COB, folglich zeigen sich bei allen 4 Aufgaben 3 Stücke des △ BOC gegeben, und man hat entweder △ aus a, h, α, siehe 788,

oder △ aus (p — q), h, α, siehe 1384,

oder △ aus (p : q), h, α, siehe 1043,

oder △ aus (pq), h, α, siehe 1736. a.

zu verzeichnen, und hierauf durch Abschneidung der erhaltenen Seite OC den Punkt C, und die verlangte Tangente CB festzustellen.

1970. Fig. 356. Aufgabe. Eine Berührungslinie XY = a an den ⊙ um M zu legen, welche von den Schenkeln des festliegenden Centri ∠ XMY begrenzt wird. (ohne dabei die Auflösung für die △Aufgabe a, h, α zu benutzen; vergleiche 1917 am Schluß.)

Analysis. Denkt man sich die MY und MX ≠ Tangenten DN und DV gezogen, legt RS ≠ XY, und verlängert MY und MX bis F und E, so ergiebt sich VH = VU, IG = IU, und VR = VX, IS = IY, da RX und SY Rhomben bilden, also durch Subtraktion RH = XU, GS = UY, und deshalb RH + GS = a, folglich auch RF + SE = a — 2EG gegeben ist. Nun hat man aber auch RF × SE nach 565 = ME^2 bekannt, demnach lassen sich die Linien RF und SE einzeln nach 457 bestimmen, wodurch RS, die ∥ von XY hervorgeht, und diese Linie selbst schließlich nach 282 festgelegt werden kann.

Auflösung. Ziehe die Berührungslinien DI und DV nach 282 ≠ zu den Schenkeln des festliegenden ∠, verlängere die letzteren bis E und F, bestimme GO = EG, ON = a, beschreibe über EN einen Halbkreis, errichte in E den ⊥ ET = EM, ziehe TQ ≠ DI, fälle aus Q den ⊥ QS auf DI, ziehe SR durch M, und lege an den gegebenen ⊙ nach 282 eine RS ≠ Tangente XY, so ist diese = a.

Beweis. Es ist ES × SN = SQ^2 = ET^2 = ME × MF, und nach 565 = ES × RF, weshalb RF = SN

sein muß. Hiedurch ergiebt sich, da $OG + GS + SN = a$ ist, auch $HF + GS + FR$, oder $GS + HR = a$. RH ist aber $= XU$, und $GS = YU$: denn zieht man von VH und VU die gleichen Linien VR und VX (RX ist ein Rhombus) ab, so muß $RH = XU$, und aus gleichen Gründen $GS = YU$ bleiben, folglich ist XY wirklich $= a$.

Anmerkung. Wäre statt $XU + UY = a$, $XU - UY = d$ bedingt, so ergäbe sich eine ähnliche Auflösung, da hiemit $FR - ES = a - 2EG$, und $FR \times ES = ME^2$ bekannt wäre, folglich FR und ES selbst nach 459 konstruirt werden könnten.

1971. Fig. 357. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P ziehen, daß sich das Rechteck $(PX \times PY)$ aus den Abständen dieses Punktes von den auf XY aus P′ und P″ gefällten ⊥⊥, zwischen welche P zu liegen kommen soll, $= q^2$ ergiebt.

Analysis 1). Ergiebt sich durch 75 und 592.

Analysis 2). Bestimmt man $\angle PDY = \angle PXP'$; so ergiebt sich, da $\triangle PXP' \sim \triangle PDY$ ist, $PX \times PY$, oder $q^2 = PP' \times PD'$, weshalb die Lage von DY gegeben ist, und sich Y durch Konstruktion des Orts 75 über PP″ feststellen muß.

1972. Fig. 358. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß sich das Rechteck $(PX \times PY)$ aus den Abständen dieses Punktes von den auf XY aus P′ und P″ gefällten ⊥⊥, zwischen welche P nicht fallen soll, $= q^2$ ergiebt.

Analysis. 1) } Ergeben sich auf Fig. 358 angewandt
Analysis. 2) } wörtlich wie in 1971.

1973. Fig. 359. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die aus P′ und P″ unter den $\measuredangle \alpha$ und β gegen XY gezogenen Linien, zwischen welche P zu liegen

kommen soll, das Rechteck $PX \times PY = q^2$ bestimmen.

Analysis. 1) } Ergeben sich auf Fig. 359. angewandt
Analysis. 2) } wörtlich wie in 1971, nur muß 320 statt 75 gelesen werden.

1974. Fig. 360. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die aus P' und P'' unter den $\angle \alpha$ und β gegen XY gezogenen Linien, zwischen welche P nicht zu liegen kommen soll, das Rechteck $PX \times PY = q^2$ bestimmen,

Analysis. 1) } Ergeben sich auf Fig. 360. angewandt
Analysis. 2) } wörtlich wie in 1971, nur muß 320 statt 75 gelesen werden.

1975. Fig. 359. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die aus P' und P'' unter den $\angle \alpha$ und β gegen XY gezogenen Linien, zwischen welche P zu liegen kommen soll, das Verhältniß der beiden Abschnitte $PX : PY = m : n$ bestimmen.

Analysis. Zieht man $D'Y \parallel P'X$, so ergiebt sich $P'P : PD' = PX : PY = m : n$, weshalb Punkt D' gegeben ist. Durch PD' und $\angle PYD' = \angle P'XP = \alpha$, und mittelst PP'' und $\angle PYP'' = \beta$, sind aber nach 320 zwei Oerter für Y gegeben, folglich läßt sich dieser Punkt und die gesuchte Lage von XY feststellen.

1976. Fig. 360. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll eine Linie XY so durch P legen, daß die aus P' und P'' unter den $\angle \alpha$ und β gegen XY gezogenen Linien, zwischen welche P nicht zu liegen kommen soll, das Verhältniß der beiden Abschnitte $PX : PY = m : n$ bestimmen.

Analysis. Ergiebt sich auf Fig. 360. bezogen wörtlich wie in 1975, nur muß $2R - \alpha$ statt α gelesen werden.

1977. Fig. 361. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, P″; man soll eine P′P″ nicht schneidende Linie XY so durch P legen, daß sich das Rechteck der aus P′ und P″ auf XY gefällten ⊥⊥ P′X und P″Y = q^2 ergiebt.

Analysis 1). Bestimmt man EY = P′X, so ergiebt sich mittelst des Rechtecks P″Y × YE, da sowohl P″ als E in der zum Durchmesser P′P″ gehörenden Kreislinie liegen, nach 592. b. ein Ort für Y. Nun ist aber ∠ PYP″ = R, folglich ist durch einen Halbkreis über PP″ ein zweiter Ort für Y gegeben, und es kann durch Feststellung dieses Punkts die —, also auch mittelst P die Lage der verlangten Linie XY gefunden werden.

Analysis 2). Fig. 361. a. Fällt man aus P″ auf PP′ den ⊥ P″D, und auf diese Linie aus Y den ⊥ YE, so ergiebt sich △ P″YE ∽ △ PP′X, also

P″Y : PP′ = EY : P′X. Nun ist aber

q : P″Y = P′X : q bedingt, folglich

---

erhält man durch

Zusammensetz. q : PP′ = EY : q, mittelst welcher Proportion der ⊥ EY, also nach 79 ein Ort für Y gegeben ist, welchen man schließlich zur Feststellung dieses Punkts und der gesuchten Linie mit einer über PP″ beschriebenen Halbkreislinie zu schneiden hat.

1978. Fig. 362. und Fig. 362. a. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, P″; man soll eine P′P″ durchschneidende Linie XY so durch P legen, daß sich das Rechteck der aus P′ und P″ auf XY gefällten ⊥⊥ P′X und P″Y = q^2 ergiebt.

Analysis 1). } Ergeben sich auf die Fig. 362. und
Analysis 2). } Fig. 362. a. bezogen wörtlich wie in 1977, nur muß 592. a. statt 592. b. gelesen werden.

1979. Fig. 363. **Aufgabe.** Gegeben P, P′, P″; man soll eine P′P″ nicht schneidende Linie XY so durch P legen, daß die aus P′ und P″ auf

XY gefällten ⊥⊥ das Verhältniß der Linien PX und P″Y wie m : n bestimmen.

Analysis. Bestimmt man PE = PX, so ergiebt sich, da PP′ festliegt, und im △ PP″E das Verhältniß der Grundlinie PE zur Höhe P″Y = m : n gegeben ist, nach 581 ein Ort für E. Da aber, wenn man PP′ um sich selbst bis D verlängert, die über PD beschriebene Halbkreislinie einen zweiten Ort für E bildet, so läßt sich dieser Punkt und die verlangte Lage von XY feststellen.

1980. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine P′ P″ durchschneidende Linie XY so durch P legen, daß die aus P′ und P″ auf XY gefällten ⊥⊥ das Verhältniß der Linien PX und P″Y = m : n bestimmen.

Analysis. Ergiebt sich für eine, der Aufgabe entsprechende, und Fig. 363 analog gezeichnete Figur, wörtlich wie in 1979.

1981. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll eine P′ P″ nicht durchschneidende Linie XY so durch P legen, daß die aus P′ und P″ auf XY gefällten ⊥⊥ das Rechteck aus den Abschnitten PX und P″Y = q^2 bestimmen.

Analysis. 1) Fig. 361. a. Fällt man aus P″ auf PP′ den ⊥ P″D, und auf diese Linie aus Y den ⊥ YE, so ergiebt sich △ P″YE ∽ △ PP′X, und daher

P″Y : PP′ = EP″ : PX. Nun ist aber

q : P″Y = PX : q bedingt, also erhält man

durch Zus. setz. q : PP′ = EP″ : q, durch welche Proportion mittelst P″E die Lage des ⊥ EY gegeben ist, folglich dieser Ort nur durch eine über PP″ beschriebene Halbkreislinie zu schneiden ist, um Y und die verlangte Linie XY festzustellen.

Analysis. 2) Fig. 363. Bestimmt man PE = PX, so ergiebt sich die Fläche des △ PP″E = q^2, also auch nach

185, da PP'' festliegt, ein Ort für E. Wenn man aber PP' um sich selbst bis D verlängert, bildet die über PD beschriebene Halbkreislinie einen zweiten Ort für E, folglich läßt sich dieser Punkt, und mittelst desselben die gesuchte Linie XY feststellen.

1981. a. Fig. 430. **Aufgabe.** Gegeben P, P', P''; man soll zwei einen $\angle \alpha$ bildende Linien PX und PY so von P aus ziehen, daß sich die $\perp$ Abstände PX und PY dieses Punkts von den auf dieselben aus P' und P'' gefällten $\perp\perp$ wie m : n verhalten. ($\angle$ XPY $= \alpha$; PX : PY = m : n).

Analysis. 1291 ist ein einzelner Fall dieser Aufgabe, in welchem nämlich $\angle$ XPY $= 2R$ ist. Hiedurch wird man darauf geleitet $\angle$ P'PD $= \alpha = \angle$ XPY zu verzeichnen, und P''Y zu verlängern, wodurch sich $\angle$ P'PX $= \angle$ DPY, also auch $\triangle$ P'PX $\sim \triangle$ DPY ergiebt. Daraus folgt aber, daß PX : PY oder m : n = P'P : PD ist, weshalb Punkt D bestimmt werden kann, und nur zur Lösung der Aufgabe aus P ein $\perp$ auf P''D zu fällen ist, u. s. w.

1981. b. Fig. 431. **Aufgabe.** Wie 1981. a, nur ist das Verhältniß der $\perp\perp$, oder P'X : P''Y = m : n gegeben.

Analysis. Konstruirt man $\angle$ P'PP = $\alpha = \angle$ XPY, und PP = PP', so ergiebt sich das $\triangle$ PPX' $\cong \triangle$ PP'X, also PX' = P'X, und deshalb PX' : P''Y = m : n, woher sich die Aufgabe, in Beziehung auf die Punkte P, P, P'', auf 1290 reduzirt.

1981. c. Fig. 431. **Aufgabe.** Wie 1981. a, nur ist das Verhältniß des $\perp$ P'X zu dem Abstande des Punktes P von dem aus P'' auf PY gefällten $\perp$, oder P'X : PY = m : n gegeben.

Analysis. Auf demselben Wege wie in 1981. b reduzirt sich die Aufgabe auf 1980.

1981. d. Fig. 431. Aufgabe. Wie 1981. a, nur ist statt des Verhältnisses PX : PY das Rechteck $PX \times PY = f^2$ gegeben.

Analysis. Führt wie in 1981. b zu 1972.

1981. e. Fig. 431. Aufgabe. Wie 1981 a, nur ist $P'X \times P''Y = f^2$ statt PX : PY bestimmt.

Analysis. Führt wie in 1981. b. zu 1978.

1981. f. Fig. 431. Aufgabe. Wie 1981. a, nur ist $P'X \times PY$ statt PX : PY bestimmt.

Analysis. Führt wie in 1981. b zu einer Analogie von 1981.

1981. g. Fig. 432. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll zwei in P zusammentreffende Linien PX und PY so bestimmen, daß $\angle XPY = \alpha$, $\angle PXP' = \beta$, $\angle PYP'' = \gamma$, PX : PY = m : n wird.

Analysis. PP' und β bestimmen nach 320 einen Kreisort für X, PP'' und γ in derselben Art einen Ort für Y. Da nun ferner durch $\angle XPY = \alpha$, und PX : PY = m : n, insofern sich X in einer Kreislinie befindet, nach 586 ein zweiter Ort für Y gegeben ist, so läßt sich dieser Punkt feststellen, und hiedurch die Aufgabe lösen.

1981. h. Fig. 432. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll zwei in P zusammentreffende Linien PX und PY so bestimmen, daß $\angle XPY = \alpha$, $\angle PXP' = \beta$, $\angle PYP'' = \gamma$, und $PX \times PY = f^2$ wird.

Analysis. PP' und β bestimmen nach 320 einen Kreisort für X, PP'' und γ in derselben Art einen Ort für Y. Da nun ferner durch $\angle XPY = \alpha$, und $PX \times PY = f^2$, insofern sich X in einer Kreislinie befindet, nach 589. a ein zweiter Ort für Y gegeben ist, so läßt sich dieser Punkt feststellen, und hiedurch die Aufgabe lösen.

1982. Fig. 364. Aufgabe. Gegeben K, K', L; man soll einen Punkt X so in L bestimmen, daß zwei aus demselben an K gelegte Berührungs-

linien einen eben so großen ∠, als zwei gleichfalls aus X an K′ gezogene Tangenten bilden.

Analysis. Nach den Bedingungen der Aufgabe müssen die ∠ MXB und M′XB′ einander gleich, also △ MXB ∽ △ M′XB′ sein. Hieraus geht aber MX : M′X = r : r′ hervor, folglich läßt sich, da MM′ festliegt, mittelst des Orts 593 der gesuchte Punkt X feststellen.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich der folgende

Ort: wenn zwei Kreislinien K und K′ gegeben sind, läßt sich stets eine dritte so bestimmen, daß jede zwei aus einem beliebigen Punkte derselben an K gelegte Berührungslinien einen eben so großen ∠ bilden, als zwei aus demselben Punkte nach K′ gezogene Tangenten.

1983. Aufgabe. Analysis. Zusatz. } Wie in 1982, nur ist K″ statt L zu lesen.

1984. Aufgabe. Gegeben K, K′; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe der Quadrate der 4 aus demselben nach K und K′ gezogenen Berührungslinien = s^2 ergiebt, und das zu K gehörende Tangenten-Paar einen ∠ von derselben Größe wie das zu K′ gehörende Tangenten-Paar einschließt.

Analysis. Der eine Ort ergiebt sich wie in 1982; der andere läßt sich nach 353. konstruiren.

Zusatz. Es ergeben sich 2 Resultate.

1985. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß jedes der 3 aus demselben nach K, K′ und K″ gezogenen Tangenten-Paare denselben ∠ einschließt.

Analysis. Durch K und K' ergiebt sich wie in 1982 der eine, und durch K' und K'' in derselben Art der andere Ort für X.

Anmerkung. Auf dem in 1982 u. s. w. angegebenen Wege lassen sich durch Zeichnung mehrere Aufgaben aus der Optik, bei denen es nämlich auf die Bestimmung gleicher Sehwinkel ankömmt, lösen. Mittelst der eben beendigten Analysis ist z. B. die folgende Aufgabe lösbar:

es sind drei runde ungleich starke Säulen gegeben; man soll einen solchen Gesichtspunkt bestimmen, von dem aus, in einer dem Horizont ∓ Ebene gesehen, alle drei Säulen gleich stark erscheinen.

III. C. Dritter Abschnitt.

Schwer lösbare Aufgaben.

1stes Kapitel.

Dreiecks-Aufgaben.

1986. Fig. 365. Aufgabe. △ aus r, ϱ, (b—c).

Analysis. Ist M'D = ϱ, so muß nach 1355 CD — DB = (b—c), also, wenn man EC = DB bestimmt, auch ED = (b—c) sein. Hieraus folgt, daß der in der Mitte F von ED errichtete ⊥ einen Ort für den Mittelpunkt M des ⊙ ums △ bildet. Da nun MM' nach g. Betr. §. 12 die mittlere Proportionale zwischen r und r — 2ϱ ist, so erhält man einen zweiten Ort für M, kann folglich diesen Punkt feststellen, und hierauf durch r das verlangte △ ABC ableiten.

Auflösung. Schneide auf den Schenkeln eines rechten ∠ ED = (b—c), DM' = ϱ ab, errichte in F, der Mitte von ED, einen ⊥, und beschreibe um M' mit der mittleren Proportionale zwischen r und r — 2ϱ eine Kreislinie, so bestimmt sich M der Mittelpunkt des ⊙ für r. Zeichnet man hierauf mit dieser Länge um M einen ⊙, verlängert ED auf beiden Seiten bis B und C, MF bis G, GM' bis A, und verbindet diesen Punkt mit B und C, so ist das verlangte △ ABC konstruirt.

Beweis. Zunächst ist darzuthun, daß der mit M'D oder ϱ um M' beschriebene ⊙ die Seiten AB und AC berührt. Nach der Auflösung ist:

$r - 2\varrho : MM' = MM' : r$, also durch A. d. h. Gl.

$r - 2\varrho + MM' : MM' + r = MM' : r$, ferner d. S. d. B. Gl. $2\varrho : r - MM' = r + MM' : r$, oder

$\varrho : r - MM' = r + MM' : 2r$, d. h.

M'D : M'I = M'S : CN, weshalb sich, da M'H : M'I = M'S : M'B ist,

M'D : M'H = M'B : CN ergiebt. Nun muß aber M'D : HC = M'B : CN sein, da △ HCN ∼ △ M'DB ist,

folglich hat man M'H = HC, und deshalb ∠ CM'B $= R + \frac{\angle CHM'}{2} = R + \frac{\alpha}{2}$. Außerdem ist jedoch ∠ CGB $= 2R - \alpha$, also der erhabene ∠ CGB $= 2R + \alpha$, folglich muß, da GC = GB ist, G der Mittelpunkt einer C, M' und B durchlaufenden Kreislinie sein. Hieraus ergiebt sich (Peripherie und Centri ∢) ∠ M'BC $= \frac{1}{2}$ ∠ M'GC $= \frac{1}{2}$ ∠ ABC, und ∠ M'CB $= \frac{1}{2}$ ∠ M'GB $= \frac{1}{2}$ ∠ ACB, wodurch bewiesen ist, daß die ∢ ABC und ACB durch M'B und M'C halbirt sind, also der mit M'D um M' beschriebene ⊙ wirklich die 3 Seiten des △ ABC berührt.

Hieraus geht weiter hervor, da CD — DB nach der Zeichnung = CD — EC = ED = (b — c), und nach 1355 = AC — AB ist, daß AC — AB die Länge (b — c) hat. Da nun endlich dem Radius MC des ⊙ ums △ die Länge r gegeben wurde, so folgt aus dem Allen, daß △ ABC sämmtliche in der Aufgabe geforderten Eigenschaften besitzt.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1987. Fig. 30. Aufgabe. △ aus r, ϱ, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Verbindet man die Mittelpunkte E und D unter sich und mit A, so zeigt sich △ AED konstruirbar, da

$\angle$ DAE oder $\angle$ (rm) nach 332 $= \frac{\beta - \gamma}{2}$, DA $=$ r, und ED nach g. Betr. §. 12. mittlere Proportionale zwischen r und r $-$ 2ϱ ist. Nach der Zeichnung dieses $\triangle$ läßt sich das verlangte $\triangle$ ABC durch r und ϱ bestimmen.

Auflösung. Zeichne $\triangle$ AED so, daß $\angle$ DAE $= \frac{\beta - \gamma}{2}$, DA $=$ r, ED die mittlere Proportionale zwischen r und r $-$ 2ϱ wird (welches sich durch Konstruktion eines Halbkreises über AD, Abschneidung der Länge 2ϱ von AD ꝛc. am zweckmäßigsten ausführen läßt), beschreibe um D und E $\odot\odot$ mit r und ϱ, und lege an den zuletzt genannten $\odot$ aus A die Tangente AC, und aus C die Tangente CB, so bildet ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis. Zunächst ist darzuthun, daß AB den $\odot$ um E berührt.

Nach der Auflösung ist:

r $-$ 2ϱ : ED $=$ ED : r, also durch Abd. d. §. Gl.

r $-$ 2ϱ + ED : ED + r $=$ ED : r, ferner durch G. d. V. Gl. 2ϱ : r $-$ ED $=$ ED + r : r, oder

ϱ : r $-$ ED $=$ r + ED : 2r, d. §.

EF : EH $=$ EG : GH, weshalb sich, da

EI : EH $=$ EG : EC ist,

EF : EI $=$ EC : GH ergiebt. Nun muß aber

EF : AI $=$ EC : AN sein, da $\triangle$ ANI $\sim \triangle$ EFC ist,

folglich hat man EI $=$ AI $=$ IB, und deshalb $\angle$ IBE $=$ $\angle$ IEB. Nun ist $\angle$ IBE $=$ $\angle$ IBA + $\angle$ ABE $=$ $\angle$ IAB + $\angle$ ABE $=$ $\angle$ ICB + $\angle$ ABE, und $\angle$ IEB $=$ $\angle$ ICB + $\angle$ EBC, also muß $\angle$ ABE $=$ $\angle$ CBE sein, und AB den $\odot$ um E berühren.

Daß ferner $\angle ABC - \angle ACB = (\beta - \gamma)$ ist, ergiebt sich, da nach dem Vorigen AE den $\angle BAC$ halbirt, ganz wie in g. Betr. §. 12. Der $\odot$ ums $\triangle ABC$ hat endlich nach der Konstruktion die Länge r, folglich bestimmt dies $\triangle$ sämmtliche gegebenen Stücke.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1987. a. Aufgabe. $\triangle$ aus ϱ, $(p-q)$, $(\beta-\gamma)$.

Analysis. Durch $(p-q)$ und $(\beta-\gamma)$ ergiebt sich nach 349 r; man hat also $\triangle$ aus r, ϱ; $(\beta-\gamma)$, siehe 1987, zu verzeichnen.

1987. b. Aufgabe. $\triangle$ aus r, ϱ, $(p-q)$.

Analysis. Durch r und $(p-q)$ ergiebt sich nach 349 $(\beta-\gamma)$; man hat also $\triangle$ aus r, ϱ, $(\beta-\gamma)$, siehe 1987, zu konstruiren.

1988. Fig. 366. Aufgabe. $\triangle$ aus a, m, $(b+c)$.

Analysis. Ist $CE = (b+c)$, und $AD = m$, so muß $AD \nparallel BE$, und deshalb $CA' : CD = (b+c) : a$ sein. Halbirt man $\angle C$ durch CM, so ist $AM : MD = AC : CD$, also $= (b+c) : a$ gegeben, weshalb, da zugleich $AD = m$ bekannt ist, M, der Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$, bestimmt werden kann. Fällt man jetzt $MF \perp AC$, so erhält man nach 1354 $AF = \frac{b+c-a}{2}$. Diese Länge kennt man aber durch $(b+c)$ und a, folglich ist das $\triangle$ MFA konstruirbar, und FM oder ϱ gefunden. Beschreibt man daher, nach der Zeichnung dieses $\triangle$, um M mit MF einen $\odot$, und legt aus den Endpunkten A und D von m an diesen $\odot$ Tangenten, so muß sich das verlangte $\triangle$ ABC ergeben.

1989. Aufgabe. $\triangle$ ABC aus a, b, c so zu konstruiren, daß A in L, B in L', C in L'' zu liegen kommt. (Vergl. Anmerk. 1391.)

Fall 1). L, L', L'' schneiden sich in einem Punkt D.

Analysis. Fig. 367. Legt man eine Kreislinie durch die Punkte C, D und B, so zeigt sich $\triangle$ CEB mittelst $\angle CBE = \angle CDE = \angle (LL'')$, $\angle CEB = 2R - \angle$

CDB = ∠ (L'L''), und CB = a gegeben, folglich auch ▱ CABE, und mittelst desselben DE und DA bestimmt. Hienach läßt sich das verlangte △ ABC feststellen.

Auflösung. Schiebe nach 94 FG = a und ∓ L zwischen L' und L'', bestimme FN = c, GN = b, ziehe DN, konstruire eine D, F und G durchlaufende Kreislinie, und schneide ON = DA, AC = b, AB = c ab, so bildet ABC das verlangte △.

Beweis. Man hat zu zeigen, daß BC = a ist. Da AD = ON, AB = FN = c gezeichnet wurde, ∠ ADB und ∠ FON aber als Supplemente gleicher ∢ EDG oder DGF und DOF dieselbe Größe haben müssen, ergiebt sich △ ADB ≅ △ FON, also DB = FO. In derselben Art erhält man △ ADC ≅ OGN, also DC = OG. Folglich muß, da zugleich ∠ CDB = ∠ FOG ist, △ CDB ≅ △ FOG, und daher wirklich BC = FG = a sein.

Fall 2). Fig. 367. a. L, L', L'' schneiden sich nicht in einem Punkt.

Analysis. Zeichnet man eine die Punkte C, D und B durchlaufende Kreislinie, und legt DE ∓ L, so zeigt sich △ BCE durch ∠ CEB = ∠ CDB = ∠ (L'L''), ∠ BCE = ∠ EDE = ∠ (LL'), und BC = a gegeben, folglich auch Fünfeck CABED (wenn man den ⊥ DS benutzt), und mittelst desselben DE und DA bestimmt. Hienach läßt sich das verlangte △ ABC konstruiren.

Auflösung. Schiebe nach 94 FG = a und ∓ L zwischen L' und L'', bestimme FN = c, GN = b, ziehe DQ so, daß sich der aus N gefällte ⊥ NQ = dem aus D auf L gefällten ⊥ DS ergiebt, konstruire eine D, F und G durchlaufende Kreislinie, und schneide DA = ON, AC = b, AB = c ab, so bildet ABC das verlangte △.

Beweis. Man hat zu zeigen, daß BC = a ist. Da AD = ON, AB = FN = c gezeichnet wurde, und wegen der Kongruenz der △△ DAS und ONQ ∠ DAD'' = ∠ DON, ferner ∠ AD'D = ∠ DGF = ∠ DOF, folglich durch

Subtr. $\angle BDA = \angle FON$ bleibt, so ergiebt sich $\triangle ADB \cong \triangle FON$, also $DB = FO$. In derselben Art erhält man $\triangle ADC \cong \triangle OGN$, also $DC = OG$. Folglich muß, da zugleich $\angle CDB = \angle FOG$ ist, $\triangle CDB \cong \triangle FOG$, und daher wirklich $BC = FG = a$ sein.

1990. Fig. 368. Aufgabe. $\triangle$ aus t', $(b+c)$, α.

Analysis 1). Verlängert man c um $BE = b$, und b um $CF = c$, so zeigt sich $AE = AF$, und das $\triangle AEF$ durch $(b+c)$ und α bestimmt. Die $AE \parallel$ gezogene Linie CG ist deshalb $= CF = AB$, also $\triangle CGB \cong \triangle ABC$, woher die $\parallel t'$ gezogene Linie CI oder $2t'$ ($AD = DC$), die Mitte H von BG trifft, und sich $CH = HI = t'$ bestimmt. Nun ist aber die H durchlaufende Linie EN gegeben, da N in der Mitte von AF liegen muß, folglich kömmt es nur darauf an:

die Länge CI oder $2t'$ so zwischen AE und AF zu legen, daß NE dieselbe halbirt.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich diese Aufgabe mit 1989 Fall 2) ganz übereinstimmend, da CHI als ein $\triangle$ mit den Seiten $CH = t'$, $HI = t'$, $CI = 2t'$ betrachtet werden kann. Man ist folglich durch Lösung dieser Aufgabe im Stande, das verlangte $\triangle$ abzuleiten.

Analysis 2). Fig. 369. Verlängert man c um $AE = b$, so ergiebt sich $\angle BEC = \frac{\alpha}{2}$. Da nun $AD = DC$ werden muß, und die $\rightarrow AC$ durch α gegeben ist, läßt sich nach 538 ein Ort EF für D bestimmen, und dieser Punkt selbst feststellen, indem man von dem mittelst $(b+c)$ gegebenen Punkte B aus $BD = t'$ abschneidet. Das verlangte $\triangle ABC$ kann hierauf durch α abgeleitet werden.

1991. Aufgabe. $\triangle$ aus t, $(b-c)$, α.

Analysis 1). Läßt sich ähnlich wie die Analysis 1) von 1990 bilden. Das $\triangle$ fällt hier in den Neben$\angle$ von α.

Analysis 2). Fig. 370. Ergiebt sich, wenn man Fig. 370 benutzt, und (b — c) statt (b + c), $2R - \alpha$ statt α liest, wörtlich wie in Analysis 2) von 1990.

1992. Fig. 371. Aufgabe. △ aus a, t, $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Beschreibt man um das gesuchte △ einen ⊙ und verlängert t, so erhält man DE aus der Proportion $t : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : DE$. Zieht man ferner, zur Einführung von $(\beta - \gamma)$, AF ∓ a, so ergiebt sich nach 348 ∠ FCA oder ∠ FEA = $(\beta - \gamma)$, wodurch bereits zwei Stücke des △ FED gegeben sind. Das dritte FD findet sich aber = t bestimmt, da △ FDC ≅ △ ADB sein muß; folglich läßt sich △ FDE konstruiren, und hierauf das verlangte △ ABC ableiten.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

1993. Fig. 372. Aufgabe. △ aus h, m, t'.

Analysis. Sei DB = t', AE = m, AN = h. Legt man durch D ∓ ∓ zu m und h, so ergiebt sich durch BD = t', und $DF = \frac{h}{2}$ △ BDF, und in demselben die Lage von DG oder $\frac{m}{2}$. Der auf diese errichtete ⊥ DH bestimmt aber, wegen des ⊥ Schnitts mit m, AH = AD, folglich läßt sich △ ABD nach g. Betr. §. 31. aus der Grundlinie BD = t', dem gegebenen ∠ BDH, welcher nach g. Betr. §. 3. der halben Differenz der ∢ an der Grundlinie gleich sein muß, und dem mittelst h oder FI bekannten Ort für die Spitze A zeichnen, und hierauf das verlangte △ ABC durch Verlängerung von AD um sich selbst bestimmen.

1994. Aufgabe. △ aus h, t', $(\beta - \gamma)$.

Analysis. Durch h und $(\beta - \gamma)$ ergiebt sich nach 146 m; man hat also 1993 zu lösen.

1995. Aufgabe. △ aus m, t', $(\beta - \gamma)$.

Analyſis. Durch m und $(\beta-\gamma)$ ergiebt ſich nach 146 h; man hat alſo 1993 zu löſen.

1996. Aufgabe. △ aus h, (b + c), α.

Analyſis 1). Fig. 373. Beſchreibt man um A mit h einen ⊙, legt an denſelben ∓ Tangenten GI und GE zu c und b, verlängert a, und legt zu dieſer Seite durch A eine ∓ FH, ſo zeigt ſich, daß die □□ FC und BH Rhomben ſind, alſo FA + AH = (b + c) ſein muß, während außerdem vom △ FGH ∠ FGH = α (∓ Schenkel), und die Halbirungslinie AG gegeben iſt. Aus dieſen Stücken kann daſſelbe aber konſtruirt, und folglich auch das verlangte △ ABC gezeichnet werden.

Auflöſung. Beſchreibe einen ⊙ um A mit h, lege an denſelben nach 336 zwei den ∠ α einſchließende Tangenten GF und GH, ziehe durch A nach 1714 eine von denſelben begrenzte Linie FH ſo, daß ſich FA + AH = (b + c) beſtimmt, lege durch A ∓ ∓ zu GH und GF, und zeichne nach 282 eine FH ∓ Tangente KI, ſo bildet ABC das verlangte △.

Beweis. Nach der Konſtruktion iſt ∠ CAB = FGH = α, und die Höhe AD = h. Da aber die □□ CF und BH Rhomben ſind, (EA halbirt ∠ E) muß auch CA + AB = FA + AH = (b + c) ſein, folglich beſitzt △ ABC ſämmtliche gegebenen Stücke.

Analyſis 2). Fig. 374. Schneidet man AB = AD ab, wodurch ſich ∠ BAE = ∠ EAD ergiebt, verlängert hierauf AD um AC′ = AC, AC um AD′ = AD, und fällt den ⊥ AE′, ſo beſtimmt ſich derſelbe = AE = h, und ∠ D′AE′ = ∠ DAE = ∠ EAB. Hieraus folgt ∠ BAD′ oder 2R − α = ∠ EAE′, weshalb die Lagen von CX und C′X gezeichnet werden können, und es nur darauf ankömmt: eine von denſelben begrenzte Linie CD′ ſo durch A zu legen, daß ſich CA + AD′ = (b + c) ergiebt, was nach 1714 ausgeführt werden kann, da ſich aus der Kongruenz der △△ ACX und AC′X ergiebt, daß AX den ∠ CXC′ halbirt.

Auflösung. Gebe den Schenkeln AE und AE′ des ∠ (2R — α) die Länge h, errichte in E und E′ auf dieselben zwei sich in X schneidende ⊥ ⊥, lege eine von diesen ⊥ ⊥ begrenzte Linie CD′ = (b + c) nach 1714 durch A, und bestimme AD′ = AB, so bildet ABC das verlangte △.

Beweis. Da AB = AD′ gezeichnet ist, so ergiebt sich AC + AB = AC + AD′ = (b + c). ∠ BAC muß = α sein, da aus der Kongruenz der △△ AEB und AE′D′ ∠ BAD′ = ∠ EAE′ = 2R — α folgt. Der ⊥ AE endlich ist = h bestimmt, also hat △ ABC wirklich sämmtliche gegebenen Stücke.

Anmerkung. Zu der zweiten Analysis der vorstehenden Aufgabe wird man eigentlich durch die zweite Analysis von 1998, oder △ aus h, m, (b + c) geleitet. Da nämlich durch h und m (β — γ) gegeben ist, und die Umklappung des △ ABC in den Scheitel ∠ von α zum Ziele führt, so läßt sich bei der Aufgabe △ aus h, (b + c), α vermuthen, daß die Umklappung eines △ CAD, welches gleichfalls die Seiten b und c hat, in den Scheitel ∠ von (β — γ) (siehe 139) Erfolg haben wird; was sich denn auch durch nähere Untersuchung bestätigt findet.

1997. Fig. 373. u. 374. Aufgabe. △ aus h, (b—c), α.

Analysis 1).
Auflösung.
Beweis.
Analysis 2). ꝛc.

} Ergeben sich wörtlich wie in 1996, nur muß bei allen Linien — statt +, und ferner 1715 statt 1714 gelesen werden.

1998. Fig. 23. u. Fig. 23. b. Aufgabe. △ aus h, m, (b + c).

Analysis 1). Schneidet man AB = AE ab, so zeigt sich △ ACE durch AC + AE = (b + c), AF = h, und (nach 139) ∠ CAE = (β — γ) bestimmt, welcher letztere ∠ durch h und m nach 146 gegeben ist. Hiemit reduzirt sich die Aufgabe auf 1996.

Analysis 2). Fig. 375. Verlängere zunächst m, und dann b um AB′ = c, c um AC′ = b, so ergiebt sich AF′

$= m$, und der $\perp AE' = h$. Da nun FF' mit den beiden $\triangle\triangle$ AFE und $AF'E'$ festgelegt werden kann, also die Lagen BX und $C'X$ gegeben sind, und sich ferner aus der Kongruenz der $\triangle\triangle$ ACX und $AC'X$ folgern läßt, daß AX den $\angle$ CXC' halbirt, endlich aber $AC + AB' = (b+c)$ bekannt ist, hat man nur zur Lösung der Aufgabe nach 1714 durch A eine in CX und $C'X$ endigende Linie $B'C$ so zu legen, daß sich $CA + AB' = (b+c)$ abschneidet.

1999. Fig. 23. und Fig. 23. b. Fig. 375. **Aufgabe.** $\triangle$ aus h, m, $(b-c)$.

Analysis 1). } Lese in 1998 bei allen Linien — statt
Analysis 2). } $+$, 1997 statt 1996, 1715 statt 1714, so ergiebt sich die eine und die andere Analysis.

2000. Aufgabe. h, $(b+c)$, $(\beta-\gamma)$.

Analysis 1). Führt durch Analysis 1) von 1998 zu 1996.

Analysis 2.) Da h und $(\beta-\gamma)$ nach 146 m bestimmen, reduzirt sich die Aufgabe auf 1998, zu deren Lösung dann die Analysis 2) anzuwenden ist.

2001. Aufgabe. $\triangle$ aus h, $(b-c)$, $(\beta-\gamma)$.

Analysis 1). Führt durch Analysis 1) von 1999 zu 1997.

Analysis 2) Da h und $(\beta-\gamma)$ nach 146 m bestimmen, reduzirt sich die Aufgabe auf 1999, zu deren Lösung dann die zweite Analysis anzuwenden ist.

2002. Aufgabe. $\triangle$ aus m, $(b+c)$, $(\beta-\gamma)$.

Analysis 1.) Da m und $(\beta-\gamma)$ nach 146 h bestimmen, erhält man durch eine gleiche Konstruktion wie in Analysis 1) von 1998 die Aufgabe 1996 zu lösen.

Analysis 2). Da m und $(\beta-\gamma)$ nach 146 h bestimmen, reduzirt sich die Aufgabe auf 1998, zu deren Lösung dann die zweite Analysis anzuwenden ist.

2003. Aufgabe. △ aus m, (b—c), (β—γ).

Analysis 1). Lese in den Analysen von 2002, 1999
Analysis 2). statt 1998, 1997 statt 1996, so ergiebt sich für diese Aufgabe die eine und die andere Analysis.

2004. Fig. 376. Aufgabe. △ aus $t_{(m:n)}$, $t'_{(m':n')}$, $t''_{(m'':n'')}$.

Analysis. Analog der Aufgabe △ aus t, t', t'' kömmt es darauf an: zu finden, in welchem Verhältniß sich die 3 Transversalen gegenseitig schneiden.

Es sei AD = t, so daß BD : DC = m : n,
BE = t', so daß CE : AE = m' : n',
CF = t'', so daß AF : BF = m'' : n'',

so ist, wenn man CF' durch X zieht,

△BCE : △BAE = △CEX : △AEX = m' : n', also d. G.
d. h. Gl.
△BCX : △BAX = m' : n', und, da zugleich
△BDX : △BCX = m : (m+n) ist, durch Zus. f.

△BDX : △BAX = mm' : n' (m+n), oder
DX : XA = mm' : n' (m+n). Ferner hat man
△BCF : △CFA = △BYF : △AFY = n'' : m'', also d. G. d. h. Gl.
△BYC : △AYC = n'' : m'', und da zugleich
△CYD : △BYC = n : (m+n) ist, durch Zus. f.

△CYD : △AYC = nn'' : m'' (m+n), oder
DY : AY = nn'' : m'' (m+n). Eben so findet man
EZ : BZ = m'm'' : n'' (m'+n');
EX : BX = n'n : m (m'+n');
FY : CY = m''m : n (m''+n'');
FZ : CZ = n''n' : m' (m''+n'').

Mittelst dieser Verhältnisse lassen sich die sämmtlichen Stücke der 3 Transversalen, also auch die Seiten des △ XYZ bestimmen, weshalb dasselbe gegeben ist, und folglich nach der Konstruktion dieses △ das verlangte △ ABC durch Benutzung der übrigen von den Transversalen gefundenen Stücke abgeleitet werden kann.

2005. Fig. 377. Aufgabe. △ aus t', t'', (b+c).

Analysis. Zieht man die 3 Transversalen, so ergiebt sich $BD = \frac{2}{3}t'$, und $CD = \frac{2}{3}t''$, weshalb $CD^2 - DB^2$ oder nach 205 $(CD+DB)(CD-DB)$ gegeben ist. Werden nun aus A und D $\perp\perp$ auf a gefällt, so ist nach 209 $CD^2 - DB^2 = CF^2 - BF^2 = (CF+BF)(CF-BF) = a(CF-BF)$. Aber $(CF-BF)$ ist $= CE + EF - EB + EF = 2EF = \frac{2}{3}EG$, (da $ED : EA = 1 : 3$), also muß $(CD+DB) \times (CD-DB) = \frac{2}{3}a \times EG$ sein. Ferner hat man $2EG = CE + 2EG - EB$ oder $CG - GB$, folglich ergiebt sich $(CD+DB)(CD-DB) = \frac{2}{3}a(CG-GB)$ oder $\frac{2}{3}(CG^2 - GB^2)$, welche Differenz nach 209 $= \frac{2}{3}(b^2 - c^2) = \frac{2}{3}(b+c)(b-c)$ sein muß. Wenn aber $(CD+DB)(CD-DB) = \frac{2}{3}(b+c)(b-c)$ ist, so läßt sich, da jenes Rechteck und $(b+c)$ gegeben ist, auch $(b-c)$ nach 185 finden, woraus sich also b und c, folglich auch $\triangle ACH$ mittelst t'', und darauf endlich das verlangte $\triangle ABC$ bestimmen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich folgender

Lehrsatz: In jedem $\triangle$ ist $2(t''^2 - t'^2) = 3(b^2 - c^2)$.

2006. Aufgabe. $\triangle$ aus t', t'', (b — c).

Analysis. Auf dieselbe Art wie in 2005 erhält man $(b+c)$, und hiedurch das verlangte $\triangle ABC$.

2007. Fig. 378. Aufgabe. $\triangle$ aus h, t, ϱ.

Analysis. Sei $AH = t$, $AG = h$. $\triangle AGH$ ist durch t und h gegeben. Sucht man ϱ jetzt mit h oder t in Verbindung zu setzen, so liegt es nicht fern, sich hiezu ähnliche $\triangle\triangle$ mittelst der Verlängerung von OA und der Errichtung eines $\perp$ in H auf HG zu schaffen. Da nun F in der Peripherie des $\odot$ ums $\triangle$ liegt, zeichne man diesen $\odot$, und ziehe die nach 325 FO gleiche Linie FB. Untersucht man jetzt die gegenseitigen Beziehungen der gezeichneten Linien in Rücksicht auf ϱ und h, so ergiebt sich Folgendes:

Es ist $\triangle ABF \sim \triangle DBF$, ($\angle FAB = \triangle DBF$)
also $AB:BD = BF:DF$, oder, da $\angle ABO = \angle OBD$,
u. n. 325, $AO:DO = OF:DF$. Aber
$AO:DO = AG - OE:OE$, folglich muß

$h - \varrho : \varrho = OF:DF$, und deshalb d. S. d. V. Gl.
$h - 2\varrho : \varrho = OD:DF$ sein. Da nun zugleich
$EO:\perp FH = OD:DF$ ist ($\triangle OED \sim \triangle DFH$), so

ergiebt sich $h - 2\varrho : \varrho = \varrho : \perp FH$, aus welcher Proportion der $\perp$ FH gefunden werden kann. Durch Hilfe dieser Linie und des von t und h bestimmten $\triangle$ AGH läßt sich endlich das gesuchte $\triangle$ ABC verzeichnen.

Auflösung. Konstruire aus t und h das $\triangle$ AGH, errichte in H auf HG einen $\perp$ HF so, daß $h - 2\varrho : \varrho = \varrho : HF$ ist, bestimme durch AF und $\angle$ AFH das $\triangle$ AFM, zeichne um M mit MF einen $\odot$, und verlängere HG nach beiden Seiten, so ergiebt sich das verlangte $\triangle$ ABC.

Beweis. Die Stücke h und t hat $\triangle$ ABC geradezu während der Konstruktion erhalten. Es ist also nur zu zeigen, daß der Radius OE des eingeschriebenen $\odot$ die Länge ϱ hat. Der Mittelpunkt dieses $\odot$ muß, da MF $\perp$ CB steht, in die Halbirungslinie AF des $\angle$ BAC fallen, folglich erhält man ganz auf demselben Wege wie in der Analysis
$h - 2OE : 2OE = OE : 2FH$, während u. d. Konstr.
$h - 2\varrho : 2\varrho = \varrho : 2FH$ ist. Durch A. d. V. Gl. ergeben sich aus diesen Proportionen zwei andere
$h : OE = OE + 2FH : FH$, und
$h : \varrho = \varrho + 2FH : FH$, aus denen

$OE : \varrho = \varrho + 2FH : OE + 2FH$, also
auch durch A. d. H. Gl.
$OE + \varrho + 2FH : OE + \varrho + 2FH = OE : \varrho$
folgt. In dieser Proportion sind aber die Glieder des ersten Verhältnisses gleich, also muß $OE = \varrho$ sein, was zu zeigen war.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: durch 2 von den drei Stücken h, ϱ und dem $\perp$ HF, Fig. 378., ist stets das dritte, aus der Proportion $h - 2\varrho : \varrho = \varrho : HE$, bestimmt.

2008. Fig. 379. Aufgabe. $\triangle$ aus t, ϱ, (b—c).

Analysis. Sucht man t oder AE in Verbindung mit (b—c) und ϱ zu betrachten, so läßt sich, da von t das $\triangle$ halbirt wird, nach 341 vermuthen, daß hiezu die Fläche des $\triangle$ behilflich sein wird. Dies bestätigt sich in folgender Art:

$\triangle ABC$, oder $2\triangle EAB$, oder

$2\triangle EOB + 2\triangle OAB + 2\triangle OAE$ ist $= \triangle COB + \triangle OAB + \triangle OAC$,

woraus $2\triangle OAB + 2\triangle OEA = \triangle OAB + \triangle OAC$,

also auch $2\triangle OEA = \triangle OAC - \triangle OAB$,

oder $2\triangle OEA = b\frac{\varrho}{2} - c\frac{\varrho}{2}$,

und $2\triangle OEA = (b-c)\frac{\varrho}{2}$ folgt.

Setzt man nun DB = FC ab, so bestimmt sich, da CD—DB nach 1355 $= (b-c)$ ist, auch FD $= (b-c)$, weshalb

$2\triangle EOA = FD \times \frac{\varrho}{2} = FE \times \varrho = 2\triangle FOE$, also AF $=$ OE sein muß. Hieraus ergiebt sich ferner, daß FA den Endpunkt H des $\perp$ FD stehenden Durchmessers DH durchläuft, da zugleich DE : EF $=$ DO : OH $= 1 : 1$ ist. $\triangle$ HFD läßt sich aber durch 2ϱ und $(b-c)$ zeichnen, folglich hat man nur aus der Mitte E von DF die Lage FH mit t zu schneiden, um A, und hiedurch auch mittelst ϱ das verlangte $\triangle$ ABC zu konstruiren.

Auflösung. Zeichne $\triangle$ HDF aus DF $= (b-c)$, und DH $= 2\varrho$, schneide aus der Mitte E von FD, EA $=$ t ab, und lege aus A an den über HD als Durchmesser beschriebenen $\odot$ beide Tangenten, so bestimmt sich durch entgegengesetzte Verlängerung von FD das verlangte $\triangle$ ABC.

Beweis. Um zu erweisen, daß EA oder t. BC halbirt, muß zunächst die Gleichheit von CF und DB gezeigt werden. Errichtet man hiefür den ⊥ IF in F auf BC, verlängert AO bis I, legt durch H, O und I ≠≠ zu BC, und durch A eine ≠ zu HD, so ergiebt sich

$$FI : HO = AF : AH = AR : AT,$$

oder $RS : TU = AR : AT$, ferner d. A. d. h. Gl.

$$\underbrace{AS : RS}_{\parallel} = \underbrace{AU : UR}_{\parallel} \text{ (TU)},$$

oder $\overbrace{AI : IN} = \overbrace{AO : ON}$.

Legt man jetzt durch N ≠≠ zu OB und IB, so erhält man durch Substitution = Verhältn.

$$AB : BV = AB : BW, \text{ also } BV = BW.$$

Nun ist aber auch BW = BN, da OB ∠ ABN halbirt, folglich muß ∠ VNW, also auch ∠ OBI = R sein, und deshalb BI den ∠ CBW halbiren. Hieraus geht ferner hervor, da zugleich IA ∠ BAC halbirt, daß IF Radius des ⊙ am △ ABC für das Centrum I ist, also CF = CY sein muß. Die Größe von CY ergiebt sich, da nach 339 $AY = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ ist, durch Subtraktion der Länge AC oder $b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$. Eben so groß ist aber nach 1354 BD, folglich hat sich mittelst der Auflösung wirklich CF = DB bestimmt. AC — AB endlich muß = (b — c) sein, da man DF diese Größe gegeben hat, und DF = DC — FC = DC — BD = CZ — BX = CA — BA ist. Es enthält also △ ABC sämmtliche gegebenen Stücke.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, da sich in derselben $2\triangle OEA = FD \times \frac{\varrho}{2}$ ergab,

1) daß in jedem △ ABC, △ EOA = △ EOD ist.
2) Konstruirt man ein △ HDF, beschreibt über einer Kathete, als Durchmesser genommen, einen ⊙, und zieht an denselben aus einem

beliebigen Punkte A der Verlängerung der Hypotenuse Tangenten AB und AC, so bestimmt sich stets BD = CF. (Vergl. Anmerk. 2) 2017 und 2018).

3) In jedem △ schneidet die Verbindungslinie zwischen dem Berührungspunkt F eines ⊙ am △ mit der gegenüberliegenden ∠spitze A den Endpunkt H des auf der Gegenseite a ⊥ stehenden Durchmessers DH des ⊙ im △.

4) Durch (b—c) und ϱ läßt sich stets ein Ort für die Spitze A des zugehörigen △ zeichnen.

2009. Fig. 378. Aufgabe. △ aus h, ϱ, (b—c).

Analysis 1). Bestimmt man IC = EB, so ergiebt sich, da nach 1355 CE — EB = (b—c) ist, IE = (b—c), und durch Hilfe von ϱ das △ IEO. Der in der Mitte H von BC oder IE errichtete, und von der Kreislinie ums △ begrenzte ⊥ HF ist aber nach 2007 durch h und ϱ gegeben, also bestimmt sich nach dessen Feststellung mittelst der Lage FO ein Ort für A, so daß man nur zwischen die Lage von IE und jenen Ort nach 79 h zu schieben hat, um den Punkt A, und hierauf durch den ⊙ mit ϱ das verlangte △ ABC zu erhalten.

Auflösung. Zeichne ein △ IEO mit den Katheten IE = (b—c), und OE = ϱ, errichte in der Mitte H von IE einen ⊥ HF so lang, daß h — 2ϱ : ϱ = ϱ : FH wird, verlängere FO, schiebe nach 79 h oder AG ⊥ zwischen die Lagen IE und FO, beschreibe um O mit OE einen ⊙, und lege an denselben aus A Tangenten, so bildet ABC das verlangte △.

Beweis. Da dem △ ABC die Stücke ϱ und h geradezu gegeben sind, kömmt es nur darauf an: zu erweisen, daß AC — AB = (b—c) ist, wozu wieder vorher die Gleich-

heit von CH und HB gezeigt werden muß, was in folgender Art geschehen kann.

Nach der Konstruktion ist:

$h-2\varrho : \varrho = \varrho : HF$, also auch, da $\triangle ODE \sim \triangle DHF$ ist,

$h-2\varrho : \varrho = OD : DF$. Hieraus folgt d. A. d. B. Gl.

$h-\varrho : \varrho = OF : DF$, und, wenn $ON \fallingdotseq EG$,

$AN : NG = OF : DF$, oder

$AO : DO = OF : DF$, oder, da OB $\angle$ ABD halbirt,

$AB : DB = OF : DF$. Denkt man sich jetzt um $\triangle$ ABC einen $\odot$ beschrieben, so wird die Peripherie desselben die Lage AD in irgend einem Punkte X (gedachter Punkt) durchschneiden, und $\triangle$ XAB $\sim \triangle$ XDB bestimmen, weshalb $AX : BX = BX : DX = AB : DB$ sein muß, und, wenn man statt BX die nach 325 gleiche Linie OX, statt AB : DB aber das gleich erwiesene Verhältniß OF : DF setzt.

$OX : DX = OF : DF$, also auch (d. S. d. B. Gl.)

$OD : DX = OD : DF$ ist. Hieraus folgt $DX = DF$, woher der Endpunkt F von HF mit X zusammenfällt, also $FB = CF$, und deshalb auch $HB = HC$ sein muß. Nun ist aber ferner $IC = EB$, da $HI = HE$ gezeichnet ist, folglich ergiebt sich wirklich $AC - AB$ oder (1355) $CE - EB = CE - IC = IE = (b-c)$.

Analysis 2). Fig. 379. Nach Anmerkung 4) 2008 ergiebt sich stets durch $(b-c)$ und ϱ ein Ort für A. Nun ist aber durch h nach 79 ein zweiter Ort für diesen Punkt gegeben, folglich läßt sich durch Hilfe von ϱ das verlangte $\triangle$ ABC bestimmen.

Auflösung. Zeichne ein $\triangle$ HDF mit den Katheten $DF = (b-c)$, und $HD = 2\varrho$, schiebe nach 79 zwischen die Lagen FH und FD die Höhe $AR = h$, beschreibe über HD, als Durchmesser genommen, einen $\odot$, und lege an denselben aus A Tangenten, so ergiebt sich das verlangte $\triangle$ ABC.

Beweis. Zunächst läßt sich ganz wie in 2008 die Gleichheit von CF und DB erweisen, woraus sich $(b-c) = DF = DC - CF = DC - DB = AC - AB$ (1355)

ergiebt, während mittelst der Zeichnung △ ABC gerade in die Stücke h und ϱ erhalten hat.

2010. Fig. 380. **Aufgabe.** △ aus h″, ϱ, (b—c).

Analysis. Da CD — DB nach 1355 = (b—c) ist, ergiebt sich, wenn man DB = FC bestimmt, auch DF = (b—c), und hiedurch mit Hilfe von ϱ das △ ODF, also auch die FD halbirende Transversale OE, und die mit derselben beschriebene Kreislinie um O als Ort für E (Mitte von a). Denkt man sich aber die Lage von AB fest, und zu derselben durch E eine ∓ gezogen, so wird diese CG oder h″ halbiren, und deshalb einen zweiten Ort für E bilden. Man kann also diesen Punkt bestimmen, und hiedurch das verlangte △ ABC konstruiren.

Auflösung. Ziehe an den mit ϱ um O beschriebenen ⊙ eine Tangente AB, und lege zu derselben zwei um h″ und $\frac{h''}{2}$ entfernte ∓ ∓ L und L′. Hierauf zeichne man in beliebiger Lage eine Tangente ED = $\frac{b-c}{2}$, beschreibe um O mit OE eine Kreislinie, lege durch den Schneidungspunkt E mit L′ eine Berührungslinie an den ⊙ mit ϱ, und ziehe endlich aus dem neugebildeten Durchschnittspunkt C mit L eine zweite Tangente an denselben ⊙, so erhält man das verlangte △ ABC.

Beweis. Nach der Konstruktion hat △ ABC gerade in die Stücke h″ und ϱ erhalten. Da nun die ∓ L′ von L und AB gleich weit absteht, muß CE = EB, also auch, wenn man ED = EF absetzt, CF = DB sein. Hieraus ergiebt sich aber, da nach der Zeichnung ED = $\frac{b-c}{2}$ ist, daß AC — AB oder (1355) CD — DB = CD — CF = FD = (b—c) sein muß, △ ABC folglich sämmtliche gegebenen Stücke enthält.

2011. Fig. 236. **Aufgabe.** △ aus h″, ϱ″, (b+c). (Analogie zu 2010).

Analysis. Da nach 1419 die zu den $\odot\odot$ von ϱ'' und ϱ''' gehörende gemeinschaftliche Tangente $R'Q' = (b + c)$ ist, also das $\triangle OQ'R'$ nebst der $R'Q'$ halbirenden Transversale OZ' durch Hilfe von ϱ''' gezeichnet werden kann, so läßt sich ein Ort für Z' (Mitte von a) bestimmen. Denkt man sich aber die Lage von AB fest, und zu derselben durch Z' eine $\fdiagup$ gezogen, so wird diese h'' halbiren, und deshalb einen zweiten Ort für Z' bilden. Man kann also diesen Punkt feststellen, und hiedurch das verlangte $\triangle$ ABC konstruiren.

Auflösung. Ziehe an den mit ϱ''' um O beschriebenen $\odot$ eine Tangente AB, und lege zu derselben zwei um h'' und $\frac{h''}{2}$ entfernte $\fdiagup\,\fdiagup$. Hierauf zeichne man in beliebiger Lage eine Tangente $Q'Z' = \frac{b + c}{2}$, beschreibe um O mit OZ' eine Kreislinie, lege durch den Schneidungspunkt Z' mit der um $\frac{h''}{2}$ von AB entfernten $\fdiagup$ eine Berührungslinie an den $\odot$ mit ϱ''', und ziehe endlich aus dem neu gebildeten Durchschnittspunkt C mit der um h'' von AB entfernten $\fdiagup$ eine zweite Berührungslinie an denselben $\odot$, so erhält man das verlangte $\triangle$ ABC.

Beweis. Nach der Konstruktion hat $\triangle$ ABC geradezu die Stücke h'' und ϱ''' erhalten. Da nun die Z' durchlaufende $\fdiagup$ zu AB von dieser Linie halb so weit absteht als die C durchschneidende $\fdiagup$ zu AB, so muß $CZ' = BZ'$, also auch, wenn man $Z'Q' = Z'R'$ absetzt, $BQ' = CR'$ sein. $BQ' = CQ' - BC$ ist $= \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC$, da nach 339 $CQ' = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC$ sein muß. Dieselbe Länge haben aber auch nach 1354 die von dem $\odot$ im $\triangle$ bestimmten Tangenten AE und AD, also ist $BQ' + CR' = AE + AD$. Nun ist ferner $CB = CD + BE$, folglich hat sich durch die Konstruktion $AB + AC = R'Q' = (b + c)$ bestimmt, und es enthält $\triangle$ ABC wirklich alle gegebenen Stücke.

2012. Fig. 379. Aufgabe. △ aus h″, ϱ, (b+c).

Analyſis. Sucht man aus h″ und ϱ, oder was daſſelbe iſt aus h und ϱ, ein anderes Stück des △ abzuleiten, ſo wird man (durch den Beweis von 2008) darauf geleitet das von ϱ′ bedingte △ IFN mit dem von h und ϱ bedingten △ ANR zu vergleichen. Hiedurch erhält man, wenn durch O und I ∥ ⫫ zu BC, durch N aber zu IB gezogen werden, zunächſt

h : ϱ′ = AN : NI, oder d. A. d. B. Gl.
h+ϱ′ : ϱ′ = AI : NI, oder
h+ϱ′ : ϱ′ = AB : BV, alſo auch, da VBN ein △ iſt,
h+ϱ′ : ϱ′ = AB : BN, oder, da BO ∠ ABC halbirt,
h+ϱ′ : ϱ′ = AO : ON, und
h+ϱ′ : ϱ′ = AU : UR, d. h.
h+ϱ′ : ϱ′ = h — ϱ : ϱ. Hieraus folgt aber d. S. d. B. Gl.

h : ϱ′ = h — 2ϱ : ϱ, weshalb mittelſt dieſer Proportion ϱ′ beſtimmt werden kann. Dadurch reduzirt ſich die Aufgabe, indem auf gleiche Weiſe h″ : ϱ‴ = h″ — 2ϱ : ϱ ſein wird, auf △ aus h″, ϱ‴, (b+c), welche in 2011. gelöſt iſt.

Anmerkung 1). Aus der vorſtehenden Analyſis folgt mittelſt der Proportion h : ϱ′ = h — 2ϱ : ϱ

1) das Datum: wenn zwei von den 3 Stücken h, ϱ und ϱ′ gegeben ſind, läßt ſich ſtets das dritte beſtimmen.

2) ergiebt ſich, da ıI : IN = AO : ON gefunden wurde ∠ OBI aber = R iſt, daß der O, B und I durchlaufende Ort für die beiden Centra O und I (ſiehe 325), welcher mit ſeinem Mittelpunkt in die Kreislinie ums △ ABC oder in die Mitte von OI fällt, in Beziehung auf die Punkte A und N den 593 angegebenen Ort bildet.

Anmerkung 2). Das in der vorſtehenden Analyſis entwickelte Datum läßt ſich auch auf folgende Art herleiten:

Da nach 841 $2f^2 = (a+b+c)\varrho$, und nach 1542 auch $= (b+c-a)\varrho'$ ist, ergeben sich die beiden Proportionen

$a+b+c : a = h : \varrho$, und

$b+c-a : a = h : \varrho'$, aus denen zwei andere durch S. u. A. d. Verh. Gl., nämlich

---

$b+c : a = h-\varrho : \varrho$, und

$b+c : a = h+\varrho' : \varrho'$ hervorgehen, also wegen = Verh.

$h-\varrho : \varrho = h+\varrho' : \varrho'$, oder d. S. d. V. Gl.

$h-2\varrho : \varrho = h : \varrho'$ sein muß.

Zugleich ergiebt sich aus der letzten Proportion durch S. d. h. Gl.

$2\varrho : \varrho'-\varrho = h : \varrho'$

2913. Fig. 381. Aufgabe. $\triangle$ aus h, r, ϱ.

Analysis. 1). Nimmt man A festliegend an, so zeigt sich, da nach 563, $2hr = AE \times AG$ sein muß, und E sich in einer Kreislinie befindet nach 590 eine gerade Linie als Ort für G gegeben. Sucht man jetzt h und ϱ gemeinschaftlich zu benutzen, so findet sich, da sich G in einer geraden Linie befindet, und $AG : GM' = h : \varrho$ ist, ferner nach 514 ein Ort für M'. Die noch nicht gemeinschaftlich benutzten Stücke r und ϱ aber bestimmen endlich nach 571 einen zweiten Ort für M', weshalb sich dieser Punkt feststellen, und hierauf $\triangle$ ABC auf mehreren Wegen ableiten läßt.

Auflösung. Beschreibe um M zwei Kreislinien, von denen die eine den Radius r, die andere aber einen Halbmesser hat, dessen Länge die mittlere Proportionale zwischen r und $r-2\varrho$ ist, ziehe aus einem beliebigen Punkte A der zu r gehörenden Kreislinie einen Durchmesser AF, setze $AI = h$, $IN = \varrho$ ab, errichte in N auf AF einen $\perp$ NM', verlängere die von dem Schneidungspunkte desselben mit der zweiten Kreislinie bestimmte Linie AM' bis E, und beschreibe um diesen Punkt mit EM' eine Kreislinie, so bilden die Schneidungspunkte B und C die beiden fehlenden Winkelspitzen des verlangten $\triangle$ ABC.

Beweis. Da CE = EB, ist EA Halbirungslinie für α. Da CE = EM', und $\angle$ CEM' = β, ist $\angle$ M'CE = $R - \frac{\beta}{2}$, weshalb $\angle$ M'CB = $R - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$ sein muß, also γ durch CM' halbirt wird, und folglich M' den Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$ ABC bildet. Der Radius M'Q ist aber auch = ϱ: denn nach der Konstruktion hat man

$r - 2\varrho : MM' = MM' : r$, also d. h. Gl.

$r - 2\varrho + MM' : MM' + r = MM' : r$, ferner d. S. d. M. Gl.

$2\varrho : r - MM' = r + MM' : r$, oder

$\varrho : M'R = M'S : 2r$. Es ist aber

$AM' : M'R = M'S : M'E$, folglich muß

$\varrho : AM' = M'E : 2r$ sein. Nun ist zugleich

$M'Q : AM' = BE : EO$, da $\triangle$ AM'Q $\sim$ $\triangle$ OBE,

also ist wirklich M'Q = ϱ, da alle übrigen Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Daß AD = h ist, ergibt sich endlich aus der, wegen der Gleichheit des $\angle$ MAE mit $\angle$ EAD, statt findenden Kongruenz der $\triangle\triangle$ ANM' und ATM', da aus derselben AN = AT, oder AI — IN = DA — DT, d. h. nach der Konstruktion und dem vorangehenden Theil des Beweises h — ϱ = AD — ϱ hervorgeht. Es besitzt also das gezeichnete $\triangle$ ABC wirklich sämmtliche gegebenen Stücke h, r und ϱ.

Analysis 2). Fig. 378. Nach 2007 ist der von der Kreislinie und $\triangle$ und der Mitte von a begrenzte, auf dieser Seite stehende $\perp$ HF durch h und ϱ gegeben. Es läßt sich also mittelst eines in H auf MF oder r errichteten $\perp$ die Lage und Größe von CB oder a bestimmen. Hieraus folgt aber, daß man nur zwischen diese Seite und die Kreislinie um M nach 79 h zu schieben hat, um den Punkt A, und mittelst desselben das verlangte $\triangle$ ABC zu erhalten.

Auflösung. Schneide von MF oder r die mittelst der Proportion $h - 2\varrho : \varrho = \varrho : HF$ bestimmte Länge FH ab, lege durch H eine zu FM winkelrechte Linie, und beschreibe

um M mit MF einen ⊙, so ergeben sich die Punkte B und C. Schiebt man nun zwischen diese Kreislinie und CB nach 79 h, so bestimmt sich A, und hiedurch das verlangte △ ABC.

Beweis. Ergiebt sich wörtlich wie in 2007, nur ist r statt t zu lesen.

Zusatz. Es sind 2 ≦ Resultate möglich.

2014. Fig. 382. Aufgabe. △ aus h, h′, ϱ.

Analysis 1). Da MB und MC die ∠ β und γ halbiren, ist QN ; NA, oder ϱ : h—ϱ = EM : MA = EB : BA = EC : CA. Theilt man also eine beliebige Linie AE in M nach dem Verhältniß ϱ : h—ϱ, so läßt sich nach 593 ein Ort bestimmen, in welchem beide Endpunkte einer Sehne BC von der Eigenschaft fallen müssen, daß die vorstehenden Proportionen erfüllt werden. Da aber

CB : CA = h′ : h, und nach dem Vorigen

CA : CE = h—ϱ : ϱ ist, so muß sich durch

Zus. s. CB : CE = h′(h—ϱ) : hϱ ergeben.

Da nun E festliegt, und sich B in einer Kreislinie befindet, so hat man durch das Verhältniß von CB : CE nach 529 einen zweiten Ort für C, weshalb dieser Punkt, und mittelst desselben die Gestalt des verlangten △ festgestellt werden kann, der sich schließlich die entsprechende Größe durch eins der vorgeschriebenen Stücke, z. B. h′, geben läßt.

Auflösung. Theile eine beliebige Linie AE in M nach dem Verhältniß h—ϱ : ϱ = MA : ME, bestimme die Punkte G und I so, daß MG : EG ebenfalls = h—ϱ : ϱ, MA : MI aber = h : h′ wird, beschreibe um G mit GM einen ⊙, konstruire mittelst desselben für den Punkt E und das Verhältniß MI : ME den 529 angeführten Kreisort, lege eine Linie durch E und den Schneidungspunkt C beider Kreislinien, und zeichne ein dem erhaltenen △ ABC ∽ △ mit einer von den gegebenen Höhen, so bildet dies das verlangte △.

Beweis. Nach der Auflösung ist
$MA : MI = h : h'$, und
$ME : MA = \varrho : h - \varrho$, also durch Zus. f.

$ME : MI = h\varrho : h'(h-\varrho)$. Wegen des konstruirten Orts ist aber
$ME : MI = CE : CB$, folglich ergiebt sich

$CE : CB = h\varrho : h'(h-\varrho)$. Wegen des Orts um G ist jedoch nach 593
$CA : CE = h-\varrho : \varrho$, woraus durch Zusammensetzung

$CA : CB = h : h'$ folgt. Ferner ist
$AM : ME = h-\varrho : \varrho$ gezeichnet, also ist d. A. d. B. Gl.
$AE : ME = h : \varrho$, oder
$AQ : MF = h : \varrho$. Da nun
$BD : AQ = h' : h = CB : CA$ bewiesen ist, erhält man endlich

$MF : AQ : BD = \varrho : h : h'$, weshalb das mit h' ∞ gezeichnete △ ABC auch die beiden anderen Stücke h und ϱ enthalten muß.

Analysis 2). Durch h und ϱ ist ϱ', durch h' und ϱ aber ϱ'' nach 2012 gegeben; man erhält also △ aus ϱ, ϱ', ϱ'' zu konstruiren, welche Aufgabe in der Analysis 1) von 2049 selbstständig gelöst ist.

Analysis 3). Da nach 481 ein mit den Seiten h', h, $\frac{hh'}{h''}$ ($= x$ angenommen) konstruirtes △ dem gesuchten ∞ sein muß, und $2f^2 = (a+b+c)\varrho$ nach 341 ist, ergeben sich die beiden Proportionen
$(a+b+c) : a = (h+h'+x) : h'$ und
$(a+b+c) : a = h : \varrho$, aus deren Vergleichung sich

$(h+h'+x) : h' = h : \varrho$ ergiebt. Mittelst dieser Proportion läßt sich aber $x = \frac{hh'}{h''}$, also auch h'' bestimmen. Folg-

lich hat man △ aus h, h′, h″ zu konstruiren, welche Aufgabe 1665 gelöst ist.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Aus der Analysis 3) geht hervor, daß mittelst der Proportion $h+h'+\frac{hh'}{h''}:h'=h:\varrho$ aus 3 von den 4 Stücken h, h′, h″, ϱ stets das vierte, ohne vorhergehende Zeichnung des △, angegeben werden kann.

2015. Fig. 383. Aufgabe. △ aus h, t, ϱ′. (Analogie zu 2007.)

Analysis 1). Sei AH = t, AG = h. △ AGH ist durch h und t gegeben. Sucht man ϱ′ mit h in Verbindung zu bringen, so ergiebt sich Folgendes: es ist △ABF ∽ △DBF (∠FAB = ∠DBF), also AB:BD = BF:DF, oder, da ∠CBO = ∠NBO, u. nach 325 AO:DO = OF:DF. Aus den ∽ △△AGD u. DOE folgt AO:DO = h+ϱ′ : ϱ′, also wegen = B.

h+ϱ′:ϱ′ = OF:DF, und d. A. d. B. Gl.
h+2ϱ′:ϱ′ = OD:DF, oder
h+2ϱ′:ϱ′ = ϱ′ : ⊥FH, aus welcher Proportion der ⊥ FH gefunden werden kann. Durch Hilfe dieser Linie und des von t und h bestimmten △ AGH, läßt sich endlich durch Bestimmung von r, welche mittelst FA und ∠HFA = ∠FAM statt findet, das verlangte △ ABC konstruiren.

Auflösung. } Lassen sich analog mit 2007 bilden.
Beweis. }

Analysis 2). Nach 2012 ergiebt sich ϱ durch h und ϱ′; man hat also △ aus h, t, ϱ, 2007, zu verzeichnen.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: durch 2 von den 3 Stücken h, ϱ′ und dem ⊥ HF, Fig. 383., ist stets das dritte, aus der Proportion h+2ϱ′ : ϱ′ = ϱ′ : ⊥ HF, bestimmt.

Beweis. Nach der [illegible] △ aus h, t, ϱ‴.

MA : MI = h : h′

ME : MA = ϱ [illegible] und ϱ‴ in Verbindung zu

ME : MI = [illegible]

ME : MI = [illegible] auf der den Bogen CB halbirende

CE : CB [illegible] FI ein Durchmesser, und FB = FC

[illegible] FAB und FBD Supplemente glei-

[illegible] FBC sind, ist △ ABF ∽ △ DBF, also

CA [illegible] BF : DF, oder, da OB ∠ ABD halbirt, und

CA [illegible] FB nach 1422 = FO ist,

A [illegible] OF : DF. Aber

AO : OD = AN : OE, folglich muß, w. = Verh.

[illegible] ϱ‴ = OF : DF, und deshalb d. S. d. V. Gl.

[illegible] ϱ‴ = DO : DF sein. Da nun zugleich

EO : ⊥ FH = DO : DF ist, ergiebt sich w. = Verh.

2ϱ‴ − h : ϱ‴ = ϱ‴ : ⊥ FH, aus welcher Proportion der ⊥ FH gefunden werden kann. Durch Hilfe dieser Linie und des von t und h bestimmten △ AGH, läßt sich endlich durch Bestimmung von r, welche mittelst AF und ∠ MAF = ∠ FAM geschehen kann, das verlangte △ ABC konstruiren.

Auflösung. } Lassen sich ähnlich wie in 2007 bilden.
Beweis. }

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: durch 2 von den 3 Stücken h, ϱ‴ und ⊥ HF, Fig. 384., ist stets das dritte, aus der Proportion 2ϱ‴ − h : ϱ‴ = ϱ‴ : ⊥ FH, bestimmt.

2017. Fig. 385. Aufgabe. △ aus t, ϱ′, (b − c). (Analogie zu 2008.)

Analysis. Sucht man t oder AE in Verbindung mit (b − c) und ϱ′ zu betrachten, so läßt sich, da von t das △ halbirt wird, nach 1541 vermuthen, daß hiezu die Fläche des △ behilflich sein wird. Dies bestätigt sich in folgender Art: △ ABC, oder 2 △ EAB, oder 2 △ OAB + 2 △ OAE − − 2 △ EOB ist = △ AOB + △ AOC − △ COB, woraus

$\triangle OAB + 2\triangle OAE = \triangle AOB + \triangle AOC$, also auch
$EA = \triangle AOC - \triangle AOB$, oder

$$\therefore A = b\,\frac{\varrho'}{2} - c\,\frac{\varrho'}{2}, \text{ und}$$

$$\triangle OEA = (b-c)\,\frac{\varrho'}{2} \text{ folgt.}$$

Setzt man nun $DB = CF$ ab, so bestimmt sich, da $BD - CD = BG - CI = AG - c - AI + b = (b-c)$ ist, auch $FD = (b-c)$, weshalb $2\triangle OEA = FD \times \frac{\varrho'}{2} = FE \times \varrho' = 2\triangle FOE$, also $AF = OE$ sein muß. Hieraus ergiebt sich ferner, daß FA den Endpunkt H des $\perp$ auf FD stehenden Durchmessers DH durchläuft, da zugleich $DE : EF = DO : OH = 1:1$ ist. $\triangle HFD$ läßt sich aber durch $2\varrho'$ und $(b-c)$ zeichnen, folglich hat man aus der Mitte E von DF die Lage FH mit t zu schneiden, um A, und hiedurch auch mittelst ϱ' das verlangte $\triangle ABC$ zu konstruiren.

Auflösung, Beweis. } Ergeben sich analog mit 2008.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, da sich in derselben $2\triangle OEA = DE \times \varrho'$ ergab:

1) daß in jedem $\triangle ABC$, $\triangle EOA = \triangle EOD$ ist.

2) Konstruirt man ein $\triangle HDF$, beschreibt über einer Kathete, als Durchmesser genommen, einen $\odot$, und zieht an denselben aus einem beliebigen Punkte A der Verlängerung der Hypotenuse Tangenten AB und AC, so bestimmt sich stets $BF = DC$.

Durch Vergleichung mit Anmerkung 2) von 2008 ergiebt sich:

daß alle Punkte der Lage HF sowohl auf der einen als auf der anderen Seite von HF die vorher angeführte Eigenschaft besitzen. (Vergl. 2018 Anmerk. 2).

3) In jedem $\triangle$ schneidet die Verbindungslinie

2016. Fig. 384. Aufgabe. △ aus h, t, ϱ‴. (Analogie zu 2007 und 2015.)

Analysis. Sucht man h und ϱ‴ in Verbindung zu bringen, so ergibt sich Folgendes.

Da die Linie DAF auf der den Bogen CB halbirende Linie AI ⊥ steht, muß FI ein Durchmesser, und FB = FC sein. Da hiernach die ∠ FAB und FBD Supplemente gleicher ∠ FCB und FBC sind, ist △ ABF ∽ △ DBF, also

AB : BD = BF : DF, oder, da OB ∠ ABD halbirt, und
‖ FB nach 1422 = FO ist,
AO : OD = OF : DF. Aber
AO : OD = AN : OE, folglich muß, w. = Verh.

h—ϱ‴ : ϱ‴ = OF : DF, und deshalb d. G. d. B. Fl. 2ϱ‴—h : ϱ‴ = DO : DF sein. Da nun zugleich
EO : ⊥ FH = DO : DF ist, ergibt sich w. = Verh.

2ϱ‴—h : ϱ‴ = ϱ‴ : ⊥ FH, aus welcher Proportion der ⊥ FH gefunden werden kann. Durch Hilfe dieser Linie und des von t und h bestimmten △ AGH, läßt sich endlich durch Bestimmung von r, welche mittelst AF und ∠ MAF = ∠ FAM geschehen kann, das verlangte △ ABC konstruiren.

Auflösung. } Lassen sich ähnlich wie in 2007 bilden.
Beweis. }

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt das Datum: durch 2 von den 3 Stücken h, ϱ‴ und ⊥ HF, Fig. 384., ist stets das dritte, aus der Proportion 2ϱ‴—h : ϱ‴ = ϱ‴ : ⊥ FH, bestimmt.

2017. Fig. 385. Aufgabe. △ aus t, ϱ′, (b—c). (Analogie zu 2008.)

Analysis. Sucht man t oder AE in Verbindung mit (b—c) und ϱ′ zu betrachten, so läßt sich, da von t das △ halbirt wird, nach 1541 vermuthen, daß hiezu die Fläche des △ behilflich sein wird. Dies bestätigt sich in folgender Art: △ABC, oder 2△EAB, oder 2△OAB + 2△OAE — — 2△EOB ist = △AOB + △AOC — △COB, wornus

$2\triangle OAB + 2\triangle OAE = \triangle AOB + \triangle AOC$, also auch
$2\triangle OEA = \triangle AOC - \triangle AOB$, oder

$2\triangle OEA = b\,\frac{\varrho'}{2} - c\,\frac{\varrho'}{2}$, und

$2\triangle OEA = (b-c)\,\frac{\varrho'}{2}$ folgt.

Setzt man nun $DB = CF$ ab, so bestimmt sich, da $BD - CD = BG - CI = AG - c - AI + b = (b-c)$ ist, auch $FD = (b-c)$, weshalb $2\triangle OEA = FD \times \frac{\varrho'}{2} = FE \times \varrho' = 2\triangle FOE$, also $AF \parallel OE$ sein muß. Hieraus ergiebt sich ferner, daß FA den Endpunkt H des $\perp$ auf FD stehenden Durchmessers DH durchläuft, da zugleich $DE : EF = DO : OH = 1:1$ ist. $\triangle HFD$ läßt sich aber durch $2\varrho'$ und $(b-c)$ zeichnen, folglich hat man nur aus der Mitte E von DF die Lage FH mit t zu schneiden, um A, und hiedurch auch mittelst ϱ' das verlangte $\triangle ABC$ zu konstruiren.

Auflösung, Beweis. } Ergeben sich analog mit 2008.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, da sich in derselben $2\triangle OEA = DE \times \varrho'$ ergab:

1) daß in jedem $\triangle ABC$, $\triangle EOA = \triangle EOD$ ist.

2) Konstruirt man ein $\triangle HDF$, beschreibt über einer Kathete, als Durchmesser genommen, einen $\odot$, und zieht an denselben aus einem beliebigen Punkte A der Verlängerung der Hypotenuse Tangenten AB und AC, so bestimmt sich stets $BF = DC$.

Durch Vergleichung mit Anmerkung 2) von 2008 ergiebt sich:

daß alle Punkte der Lage HF sowohl auf der einen als auf der anderen Seite von HF die vorher angeführte Eigenschaft besitzen. (Vergl. 2018 Anmerk. 2).

3) In jedem $\triangle$ schneidet die Verbindungslinie

zwischen einem Berührungspunkte F des ⊙ im △ mit der gegenüberliegenden ∠spitze A den Endpunkt H des auf der Gegenseite a ⊥ stehenden Durchmessers DH des zugehörigen ⊙ am △.

4) Durch (b—c) und ϱ' läßt sich stets ein Ort für die Spitze A des zugehörigen △ zeichnen.

2018. Fig. 386. Aufgabe. △ aus t, ϱ''', (b+c). (Analogie zu 2008 und 2017.)

Analysis. Sucht man t oder AE in Verbindung mit (b+c) und ϱ''' zu betrachten, so läßt sich, da von t das △ halbirt wird, nach 1541 vermuthen, daß hiezu die Fläche des △ behilflich sein wird. Dies bestätigt sich in folgender Art: $\triangle ABC$, oder $2\triangle EAB$, oder $2\triangle EOB + 2\triangle OAE - 2\triangle OAB$ ist $= \triangle COB + \triangle CQA - \triangle OAB$, woraus

$$2\triangle OAE - 2\triangle OAB = \triangle COA - \triangle OAB,$$

also auch $2\triangle OAE = \triangle COA + \triangle OAB$,

oder $$2\triangle OAE = b\frac{\varrho'''}{2} + c\frac{\varrho'''}{2},$$

und $$2\triangle OAE = (b+c)\frac{\varrho'''}{2}$$ folgt.

Setzt man nun DB = CF ab, so bestimmt sich, da BD + CD = a, + 2BD = a + 2CD — 2a = 2CD — a, und nach 339 = b + c + a — a = (b + c) ist, auch FD = (b + c), weshalb $2\triangle OEA = FD \times \frac{\varrho'''}{2} = FE \times \varrho''' = 2\triangle FOE$, also HF ∦ OE sein muß. Hieraus ergiebt sich ferner, daß FH den Endpunkt H des ⊥ zu FD stehenden Durchmessers DH durchläuft, da zugleich DE : EF = DO : OH = 1 : 1 ist. △ HFD läßt sich aber durch $2\varrho'''$ und (b + c) zeichnen, folglich hat man nur aus der Mitte E von DF die Lage FH mit t zu schneiden, um A, und hiedurch auch mittelst ϱ''' das verlangte △ ABC zu konstruiren.

Auflösung. } Ergeben sich analog mit 2008.
Beweis. }

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, da sich in derselben $2\triangle OEA = ED \times \varrho'''$ ergab:

1) daß in jedem $\triangle$ ABC, $\triangle$ AOE $=$ $\triangle$ EOD ist.

2) Konstruirt man ein $\triangle$ HDF, beschreibt über einer Kathete als Durchmesser einen $\odot$, und zieht an denselben aus einem beliebigen Punkte A der Hypotenuse Tangenten AB und AC, so bestimmt sich stets BD $=$ CF.

Durch Vergleichung mit der Anmerk. 2) von 2008 und mit 2017 ergiebt sich:

daß nicht allein alle Punkte der Hypotenuse selbst, sondern auch jeder Punkt der beiden entgegengesetzten Verlängerungen die vorher angeführte Eigenschaft besitzen.

3) Fig. 236. Verbindet man die Berührungspunkte R′ und Q′ zweier dieselbe Seite a eines $\triangle$ tangirenden $\odot\odot$ am $\triangle$ wechselseitig mit den Endpunkten D′ und I′ der von Q′ und R′ aus gezogenen Durchmesser durch gerade Linien, so bestimmt sich deren Schneidungspunkt in der Spitze A des Gegen$\angle$ von a.

4) Durch (b+c) und ϱ''' läßt sich stets ein Ort für die Spitze A des zugehörigen $\triangle$ zeichnen.

2019. Aufgabe. $\triangle$ aus h, ϱ', (b+c).

Analysis 1). Nach 2012 ergiebt sich ϱ durch h und ϱ'; man erhält also $\triangle$ aus h, ϱ, (b+c) (1736) zu konstruiren.

Analysis 2). Da $2f^2 = (b+c-a)\,\varrho'$ nach 1541 ist, muß $b+c-a : a = h : \varrho'$, also d. Abd. d. B. Gl.

$b+c : a = h+\varrho' : \varrho'$ sein, durch welche Proportion a bestimmt werden kann, und sich die Aufgabe auf $\triangle$ aus a, h, (b+c), siehe 1728, reduzirt.

2020. Aufgabe. $\triangle$ aus h, ϱ', (b−c).

Analysis 1). Nach 2012 ergiebt sich ϱ durch h und ϱ'; man erhält also $\triangle$ aus h, ϱ, (b−c), 2009, zu verzeichnen.

Analyſis 2). Fig. 383. Nach 2015 iſt durch h und ϱ' der $\perp$ FH beſtimmt. Da $(b-c) = EN - CQ = BE - CE$ iſt, ergiebt ſich ferner durch Beſtimmung von $BI = CE$, $EI = (b-c)$, und das $\triangle$ HIO durch Hilfe von ϱ'. Nun liegt H in der Mitte von EI, alſo erhält man nach der Zeichnung dieſes $\triangle$ mittelſt FH die Lage OF, und hat folglich nur zwiſchen dieſe Lage und die von EI nach 79 h zu ſchieben, um A, und darauf das verlangte $\triangle$ ABC zu erhalten.

Analyſis 3). Fig. 385. Durch $(b-c)$ und ϱ' ergiebt ſich nach 2017 ein Ort für A, wenn man die Hypotenuſe HF des aus den Katheten $DF = (b-c)$, und $DH = 2\varrho'$ gezeichneten $\triangle$ DHF verlängert. Man hat alſo nur zwiſchen dieſen Ort und die Lage DF nach 79 h zu ſchieben, um das verlangte $\triangle$ ABC zu erhalten.

2021. Aufgabe. $\triangle$ aus h, ϱ''', $(b+c)$. (Analogie zu 2009.)

Analyſis 1). Fig. 384. Nach 2016 iſt durch h und ϱ''' der $\perp$ FH beſtimmt. Da $(b+c) = CQ + BS = CE + BE$ iſt, ergiebt ſich durch Beſtimmung von $BT = CE$, $ET = (b+c)$, und das $\triangle$ ETO durch Hilfe von ϱ'''. Nun liegt aber H in der Mitte von ET, alſo erhält man nach der Zeichnung dieſes $\triangle$ mittelſt FH die Lage OF, und hat folglich nur zwiſchen dieſe Lage und die von ET nach 79 h zu ſchieben, um A, und darauf das verlangte $\triangle$ ABC zu erhalten.

Analyſis 2). Fig. 386. Nach 2018 bildet die Hypotenuſe HF eines mit den Katheten $HD = 2\varrho'''$, und $DF = (b+c)$ gezeichneten $\triangle$ einen Ort für A. Man hat alſo nur zwiſchen dieſen Ort und die Lage DF nach 79 h zu ſchieben, um das verlangte $\triangle$ ABC zu erhalten.

2022. Aufgabe. $\triangle$ aus h, ϱ''', $(b-c)$. (Analogie zu 1736).

Analyſis. Da $2f^2 = (b+a-c)\,\varrho'''$ nach 1541 iſt, muß $b+a-c : a = h : \varrho'''$, alſo d. G. d. B. Gl. $(b-c) : a = h-\varrho''' : \varrho'''$ ſein, durch welche

Proportion a bestimmt werden kann, und sich die Aufgabe auf △ aus a, h, (b—c), siehe 1729, reduzirt.

2023. Aufgabe. △ aus h, r, ϱ′.

Analysis. Durch h und ϱ′ ergiebt sich nach 2012 ϱ; man erhält also 2013 zu konstruiren.

2024. Fig. 384. Aufgabe. △ aus h, r, ϱ‴.

Analysis. Da sich nach 2016 durch h und ϱ‴ der ⊥ HF ergiebt, hat man nur FM = r abzuschneiden, in H auf FH einen ⊥ BC zu errichten, um M mit MF einen ⊙ zu beschreiben, und zwischen die Lage BC und die Kreislinie h zu schieben, um A, und hierauf das verlangte △ ABC durch Verbindung von A mit B und C festzustellen.

2025. Aufgabe. △ aus h, h′, ϱ′. (Analogie zu 2014.)

Analysis 1). Führt durch 2012 zu 2014.

Analysis 2). Da nach 481 ein mit den Seiten $\frac{hh'}{h''}$, h, $\frac{hh'}{h''}$ (= x angenommen) konstruirtes △ dem gesuchten ähnlich sein muß, und $2f^2 = (b+c-a)\,\varrho'$ nach 1541 ff, ergeben sich die beiden Proportionen

(b+c—a) : a = (h+x—h′) : h′, und

(b+c—a) : a = h : ϱ″, aus deren Vergleichung sich

(h+x—h′) : h′ = h : ϱ′ ergiebt. Mittelst dieser Proportion läßt sich aber $x = \frac{hh'}{h''}$, also auch h″ bestimmen. Folglich hat man △ aus h, h′, h″, siehe 1665, zu konstruiren.

Anmerkung. Aus der Analysis 2) geht hervor, daß aus 3 von den 4 Stücken h, h′, h″, ϱ′ stets das vierte, ohne vorhergehende Zeichnung des △, angegeben werden kann.

2026. Aufgabe. △ aus h, h′, ϱ″.

Analysis 1).
Analysis 2). } Ergeben sich ähnlich wie in 2025.

2027. Fig. 236. Aufgabe. △ aus h, h′, ϱ‴.

Analyſis 1). Zieht man, um h und ϱ‴ in Verbindung zu ſetzen, von D′ und Q′ Linien durch A, ſo folgt nach Anmerk. 3) von 2018, daß dieſelben die Endpunkte R′ und I′ des D′Q′ ∦ Durchmeſſers von dem mit ϱ″ beſchriebenen ⊙⊙ treffen müſſen. Nun iſt

$2\varrho''' : h = R'D' : R'A$, und

$2\varrho'' : 2\varrho'' - h = I'Q' : I'A$, folglich ergiebt ſich, da $\triangle AR'I' \sim \triangle AD'Q'$ iſt,

---

$2\varrho''' : h = 2\varrho'' : 2\varrho'' - h$, u. durch S. d. V. Gl. $2\varrho''' - h : h = \varrho''' : \varrho''$, durch welche Proportion ſich ϱ″ beſtimmen läßt. Durch ϱ″ und h′ erhält man aber nach 2012 ϱ, und durch ϱ und ϱ‴ auf demſelben Wege h″; man hat alſo die Aufgabe h, h′, h″, ſiehe 1665, zu verzeichnen.

Analyſis 2). Da nach 1541, $2f^2 = (b+a-c)\,\varrho''' = (c+a-b)\,\varrho''$ iſt, ergeben ſich die beiden Proportionen:

$b+a-c : a = h : \varrho'''$, und

$c+a-b : a = h : \varrho''$, aus denen ſich d. S. d. V. Gl. 2 andere:

$b-c : a = h-\varrho''' : \varrho'''$ und

$b-c : a = \varrho''-h : \varrho''$ ableiten laſſen, alſo wegen Ähn.

$h-\varrho''' : \varrho''' = \varrho''-h : \varrho''$, oder d. S. d. V. Gl. $2\varrho'''-h : h = \varrho''' : \varrho''$ ſein muß, durch welche Proportion ſich ϱ″ beſtimmen, und die Analyſis wie in 1) vollenden läßt.

Analyſis 3). Da nach 481 ein mit den Seiten h′, h, $\frac{hh'}{h''}$ (= x angenommen) konſtruirtes △ dem geſuchten ∼ ſein muß, und $2f^2 = (b+a-c)\,\varrho'''$ nach 1541 iſt, ergeben ſich die beiden Proportionen:

$(b+a-c) : a = (h+h'-x) : h'$, und
$(b+a-c) : a = \quad h \quad : \varrho'''$, aus deren Vergl.
$(h+h'-x) : h' = \quad h \quad : \varrho'''$ folgt. Mittelst dieser Proportion läßt sich aber $x = \frac{hh'}{h''}$, also auch h'' bestimmen. Folglich hat man $\triangle$ aus h, h', h'' (1665) zu konstruiren.

Anmerkung. Aus der Analysis 1), und eben so aus der Analysis 2) ergiebt sich mittelst der Proportion $2\varrho''' - h : h = \varrho''' : \varrho''$ das

Datum: wenn 2 von den 3 Stücken ϱ'', ϱ''', h eines $\triangle$ gegeben sind, so läßt sich stets das dritte bestimmen.

Aus der Analysis 3) geht hervor,

daß aus 3 von den 4 Stücken h, h', h'', ϱ''' stets das vierte, ohne vorhergehende Zeichnung des $\triangle$, bestimmt werden kann.

2028. Fig. 387. Aufgabe. $\triangle$ aus r, ϱ', $(b-c)$. (Analogie zu 1986.)

Analysis. Es läßt sich vermuthen, daß auf analoge Weise, wie sich in den g. Bestr. §. 12 ein mit dem $\odot$ ums $\triangle$ konzentrischer $\odot$ durch r und ϱ als Ort für das Centrum von ϱ ergab, durch r und ϱ' der Radius MO eines Orts für den Mittelpunkt von ϱ' bestimmbar sein wird. Bezeichnet H den Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$, so muß nach 1422 $EH = EB = EC = EO$ sein, also, da $\triangle$ OAD $\sim$ $\triangle$ EFC, und deshalb

$AO : 2r = \varrho' : EC$ ist, auch
$AO : 2r = \varrho' : EO$ sein. Da aber
$AO : OG = OI : EO$ ist, ergiebt sich ferner

$2r : OG = OI : \varrho'$, oder
$r : OM + r = OM - r : 2\varrho'$, woraus d. A. d. §. Gl.
$OM : OM + r + 2\varrho' = r : OM + r$, und d. S. d. V. Gl.
$r + 2\varrho' : OM = OM : r$ hervorgeht, also der Ort für O

gefunden ist. Da nun außerdem BS — CD, oder (b — c) = BN — NC = NQ gegeben ist, wenn man NC = BQ abschneidet, so zeigt sich △ NOQ bestimmt. Zeichnet man also zunächst dieses △ aus NO = ϱ′, und NQ = (b — c), und errichtet in T, der Mitte von NQ, einen ⊥ TF, so bildet derselbe einen Ort für M, und ist nur von O aus mit der gefundenen Länge OM zu schneiden, um M festzustellen, worauf sich das gesuchte △ ABC selbst ergeben muß, wenn man um M den ⊙ mit r beschreibt, NQ nach beiden Seiten verlängert, und durch B und C Tangenten an den ⊙ mit ϱ′ legt.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, daß sich stets ein Ort für das Centrum eines ⊙ am △ bestimmen läßt, wenn der Mittelpunkt des ⊙ ums △ festliegt, und umgekehrt, sobald die Halbmesser beider Kreislinien gegeben sind.

2029. Fig. 236. Aufgabe. △ aus r, ϱ‴, (b + c). (Analogie zu 1986.)

Analysis. Nach 1419 ist Q′R′ = (b + c), und BQ′ = CR′. Folglich muß sich ein Ort für den Mittelpunkt des ⊙ ums △ ergeben, wenn man in Z′, der Mitte von R′Q′, einen ⊥ auf diese Länge errichtet. Da sich aber nach Festlegung von O mittelst des ⊥ OQ′ = ϱ‴ ein zweiter Ort nach 2028 für den zu r gehörenden Mittelpunkt bestimmen läßt, so ist derselbe konstruirbar. Nach der Feststellung dieses Punkts ergiebt sich schließlich das gesuchte △ ABC, wenn man den ⊙ mit r wirklich beschreibt, und aus B und C Tangenten an den ⊙ mit ϱ‴ legt.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2030. Fig. 387. Aufgabe. △ aus r, ϱ′, $(\beta - \gamma)$. (Analogie zu 1987.)

Analysis. Da nach 332 $\angle MAO = \frac{\beta - \gamma}{2}$, ferner MA = r gegeben ist, und MO nach 2028 gefunden werden

kann, so läßt sich △ MOA zeichnen, und hierauf mittelst ϱ' das verlangte △ ABC ableiten.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2031. Fig. 384. Aufgabe. △ aus r, ϱ''', $(\beta-\gamma)$. (Analogie zu 1987.)

Analysis. Nach 332 ist $\angle(rm) = \angle MAI = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Nun muß aber $\angle DAI = R$ sein, also ergiebt sich $\angle MAO = R \pm \frac{\beta-\gamma}{2}$, weshalb △ AMO gezeichnet werden kann, da außerdem die Seiten $AM = r$, und MO, als mittlere Proportionale zwischen r und $r + 2\varrho'''$, nach 2028 gegeben sind. Nach der Feststellung dieses △ läßt sich schließlich mittelst ϱ''' das verlangte △ ABC ableiten.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2032. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ', b.

Analysis. Nach 2012 ergiebt sich h durch ϱ und ϱ'; man erhält also 799 zu konstruiren.

2033. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ', t.

Analysis. Führt durch 2012 zu 2007.

2034. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ', h'.

Analysis. Führt durch 2012 zu 2014.

2035. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ', m.

Analysis. Führt durch 2012 zu 813.

2036. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ', $(b+c)$.

Analysis. Führt durch 2012 zu 1736.

2037. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ', $(b-c)$.

Analysis. Führt durch 2012 zu 2009.

2038. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ'', $(b+c)$.

Analysis. Führt durch 2012 zu 2011.

2039. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ'', $(b-c)$.

Analysis. Führt durch 2012 zu 2010.

2040. Aufgabe. △ aus ϱ, ϱ'', h.

Analysis. Führt durch 2012 zu 2014.

2041. Aufgabe. △ aus ϱ', ϱ'', h.

Analyſis. Führt durch 2012 zu 2040, oder durch 2027 zu 2025.

Anmerkung. △ aus ϱ, ϱ', h und △ aus ϱ'', ϱ''', h ſind unmögliche Aufgaben, ſiehe 2012 und 2027.

2042. Fig. 236. Aufgabe. △ aus ϱ'', ϱ''', h.

Analyſis. Nach 2027 ergiebt ſich h durch ϱ'' und ϱ'''; h und b beſtimmen aber γ nach 114, ſchiebt man alſo nach 306 in γ ſelbſt den ⊙ mit ϱ''', und in den Neben∠ den ⊙ mit ϱ'', ſo ergiebt ſich das verlangte △ ABC durch Konſtruktion der beiden die Centrale durchſchneidenden Tangenten.

2043. Aufgabe. △ aus ϱ'', ϱ''', t.

Analyſis. Führt durch 2027 zu 2016.

2044. Fig. 236. Aufgabe. △ aus ϱ'', ϱ''', m.

Analyſis. Führt durch 2027 zu △ aus h, m, ϱ''', welche Aufgabe ſich dadurch löſen läßt, daß man das ◺ UAG' aus h und m zeichnet, AY ⊥ AU errichtet, $\varrho''' = OQ'$ ⊥ zur Lage UG' zwiſchen dieſe und AY ſchiebt, und aus A an den um O beſchriebenen ⊙ beide Tangenten zieht.

2045. Fig. 236. Aufgabe. △ aus ϱ'', ϱ''', (b—c).

Analyſis. Nach 1419 iſt $R'F + Q'F = (b+c)$. Durch Analogie kömmt man darauf zu unterſuchen: ob die ungleichartige Berührungslinie HQ eben ſo (b—c) enthält, wie $R'Q'$ (b+c). Hiezu müſſen mit AH und AQ zwei Linien verglichen werden, deren Differenz (b—c) iſt. Es findet dies ſtatt bei CF und FB nach 1355, welche Längen nach 1543 Anm. 2) BG und CG, alſo auch nach 1418 Anm. 2) AH und AI gleich ſind; folglich hat man AH—AQ = (b—c). Die △△ HAN und OAQ ſind aber ∾, demnach iſt auch HA : AQ = ϱ'' : ϱ''', oder d. S. d. M. Gl. (b—c) : $\varrho'' - \varrho''' = HA : \varrho''$, alſo HA gegeben. Mittelſt dieſer Länge läßt ſich nun das geſuchte △ konſtruiren, wenn man nach der Zeichnung des ⊙ mit ϱ'' durch HA den ∠ HAR feſtlegt, in den Scheitel∠ deſſelben nach 306 den ⊙ mit ϱ'''

schiedt, und zu beiden ⊙⊙ die gemeinschaftliche Tangente R'Q' nach 318 zieht.

2046. Aufgabe. △ aus ρ, ρ', r.

Analysis. Durch ρ und ρ' ergiebt sich nach 2012 h; man erhält also 2013 zu konstruiren.

2047. Aufgabe. △ aus ρ', ρ'', r.

Analysis. Nach 2027 ergiebt sich h'' durch ρ' und ρ''; man erhält also △ aus r, ρ', h''; oder was dasselbe ist, △ aus r, ρ''', h, siehe 2024, zu verzeichnen.

2048. Fig. 286. Aufgabe. △ aus ρ', ρ'', ρ'''.

Analysis 1). Da die △△ NCR und MCG, ferner die △△ OBQ' und MBG ∾ sind, so hat man NC : CM = ρ'' : ρ', und MB : BO = ρ' : ρ'''. Diese beiden Verhältnisse der nach 1417 von den Höhen in den Seiten NM und MO des △ NMO gebildeten Abschnitte bestimmen aber die Gestalt dieses △ in folgender Art. Hat man eine beliebige Linie NM in C nach dem Verhältniß ρ'' : ρ' getheilt, so ergiebt sich die Lage von CO, wenn man in C auf NM einen ⊥ errichtet. Da ferner MB : BO = ρ' : ρ''' gegeben ist, läßt sich aber auch der Endpunkt V' des aus B auf MN gefällten ⊥ feststellen, wenn man CM nach dem zuletzt genannten Verhältniß theilt, also ferner die Lage des ⊥ BV' bestimmen. Nun liegt jedoch B zugleich in einer über NM als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, folglich kann dieser Punkt und △ MNO der Gestalt nach gezeichnet werden. Aus △ NMO folgt weiter △ ABC durch Verbindung der Punkte A, B und C; man hat also nur ein demselben ∾ △, welches ρ' als Radius des ⊙ am △ enthält, zu konstruiren, um das verlangte eigentliche △ ABC zu erhalten.

Analysis 2). Durch ρ'' und ρ''' erhält man h nach 2027, durch ρ''' und ρ' ferner h', und durch ρ' und ρ'' endlich h'', gleichfalls nach 2027; folglich ist nur △ aus h, h', h'', siehe 1665, zu lösen.

2040. Aufgabe. $\triangle$ aus ϱ, ϱ', ϱ''.

Analysis 1). Aus der in 2027 entwickelten Proportion:

$2\varrho''' - h : h = \varrho''' : \varrho''$ folgt d. A. d. B. Gl.

$\varrho'' + \varrho''' : \varrho'' = 2\varrho''' : h$. Nun ist nach dem Schluß d. Anm. v. 2012

$2\varrho : \varrho' - \varrho = h : \varrho'$, also hat man d. Zus. f.

$\varrho(\varrho'' + \varrho''') : \varrho''(\varrho' - \varrho) = \varrho''' : \varrho'$, oder

$\varrho'' + \varrho''' : \varrho' - \varrho = \varrho''\varrho''' : \varrho\varrho'$, aus welchen Proportionen ϱ''' entwickelt werden kann [ϱ'' ins 2te Glied gestellt und die h. Gl. subtrahirt]. Hiemit ist aber die Aufgabe auf die vorhergehende: $\triangle$ aus ϱ', ϱ'', ϱ''', reduzirt.

Analysis 2). Fig. 236. Die Centralen der zu ϱ', ϱ'', ϱ''' gehörenden $\odot$ stehen, wie in 1417 gezeigt wurde, $\perp$ auf m, m', m'', und durchlaufen die Punkte A, B und C; folglich bilden MA, NB, OC die Höhen des $\triangle$ NMO. Nun ist durch $\varrho'' : \varrho$, oder NR' : WF, NB : BW, und durch $\varrho' : \varrho$, oder MS : WD, MA : AW gegeben, weshalb man nur zu untersuchen hat: ob sich die Gestalt des $\triangle$ NOM durch die Verhältnisse der Höhen zu den von ihrem Durchschnitt gebildeten Abschnitten bestimmen läßt. Dies findet aber statt: denn zieht man durch W, WT $\perp$ MO, und WT' $\perp$ NO, so ergiebt sich NM : MT = NB : BW; MN : NT' = MA : AW, und $\angle$ NWT = $\angle$ T'WM = R, weshalb, nach Feststellung der Linien NM, NT, NT', sich durch 2 über NT und MT' beschriebene Halbkreise der Punkt W bestimmt, also durch Fällung zweier $\perp\perp$ aus N und M auf die Lagen von MW und NW $\triangle$ NMO der Gestalt nach ergeben muß. Aus $\triangle$ NMO erhält man ferner $\triangle$ ABC durch Verbindung der Punkte A, B und C; konstruirt man also ein demselben $\sim$ $\triangle$ mit einem Radius des $\odot$ im $\triangle = \varrho$, so bildet dies endlich das eigentliche $\triangle$ ABC.

Analysis 3). Durch ϱ und ϱ' ergiebt sich h, durch ϱ und ϱ'' ferner h' nach 2012, durch ϱ' und ϱ'' endlich h'' nach 2027; man hat also $\triangle$ aus h, h', h'', siehe 1665, zu verzeichnen.

Anmerkung. Aus der in Analysis 1) entwickelten Proportion $\varrho'' + \varrho''' : \varrho' - \varrho = \varrho''\varrho''' : \varrho\varrho'$ geht hervor,

daß sich aus 3 von den 4 die 3 Seiten eines Δ berührenden $\odot\odot$ stets der vierte, ohne vorhergehende Zeichnung des Δ, ableiten läßt.

2tes Kapitel.

Vierecks-Aufgaben aller Art.

2050. Fig. 388. Lehrsätze.

4) Verbindet man die Halbirungspunkte I und S, Q und O der Gegenseiten eines $\square$, so ergiebt sich $2(OQ^2 + IS^2) = (a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)$.

Beweis. Halbirt man die Diagonalen in N und R, so bildet INSR ein $\square$, dessen Seiten $\frac{b}{2}$ und $\frac{d}{2}$ sind, weshalb nach 217 $IS^2 + RN^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}d^2$ ist. In derselben Art ergiebt sich in dem $\square$ ORQN, $OQ^2 + RN^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$, folglich erhält man durch Subtraktion $OQ^2 - IS^2 = (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2) - (\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}d^2)$, oder $2(OQ^2 - IS^2) = (a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)$.

2) Verbindet man in einem $\square$ die Halbirungspunkte I und S zweier Gegenseiten, und die Halbirungspunkte R und N der beiden Diagonalen, so ergiebt sich $2(IS^2 - RN^2) = (e^2 + e'^2) - (a^2 + c^2)$.

Beweis. Halbirt man b und d in O und Q, so bildet IQSO ein $\square$, dessen Seiten $\frac{e}{2}$ und $\frac{e'}{2}$ sind, weshalb nach 217 $IS^2 + OQ^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}e'^2$ ist. Ferner bildet ORQN ein $\square$, dessen Seiten $\frac{a}{2}$ und $\frac{c}{2}$ sind, weshalb $RN^2 + OQ^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$ ist, und sich durch Subtraktion

beider Werthe $IS^2 - RN^2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2) - (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2)$, oder $2(IS^2 - RN^2) = (e^2 + e'^2) - (a^2 + c^2)$ ergiebt.

2051. Fig. X. Datum. In jedem $\square$ stehen die Fläche f^2, ein $\angle$, z. B. $\angle(ab)$, und die Differenz der Quadrate beider Diagonalen $(e'^2 - e^2)$, oder was dasselbe ist, in jedem $\triangle$ stehen die Stücke f^2, $\left[t^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ und α in solcher Beziehung, daß sich durch zwei dieser Stücke das dritte bestimmt.

Beweis. Sei $FB = q$, $FD = h$. Nach 204 ist

$c'^2 = a^2 + b^2 + 2aq$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2aq$, also muß

$c'^2 - c^2 = 4aq$ sein. Da nun $f^2 = ah$ ist, ergiebt sich deshalb

$c'^2 - c^2 : f^2 = 4aq : ah$ oder

$c'^2 - c^2 : 4f^2 = q : h$.

Durch $q : h$ ist aber $\triangle$ DBF der Gestalt nach bestimmt, also auch $\angle(ab)$ gegeben. Hieraus geht genügend hervor, daß durch $\angle(ab)$ und f^2 auch $(c'^2 - c^2)$, durch $\angle(ab)$ und $(c'^2 - c^2)$ aber f^2 gegeben ist.

2052. Fig. 388. Aufgabe. $\square$ aus a, $b + c$, d, $\angle(ee')$.

Analysis. Halbirt man a, $b + c$, d in I, Q, S und O, so ergiebt sich nach 205b. F von dem $\square$ $OIQS$, $OQ^2 - IS^2$. Da von demselben aber auch $\angle OSQ = \angle(ee')$ gegeben ist, so läßt sich nach 2051 die Fläche des $\square$ und damit auch die Fläche f^2 des doppelt so großen $\square$ $ABCD$ bestimmen, wodurch sich die Aufgabe auf $\square$ aus f^2, a, b, d, $\angle(ee')$, siehe 2076, reducirt.

2053. Fig. 388. Aufgabe. $\square$ aus a, a, a, e', $\angle(bd)$. (Analogie zu 2052.)

Analysis. Halbirt man a, c, d, e' in I, S, R und R, so ergiebt sich nach 205a. F von dem $\square$ $IRSR$, $IS^2 - RN^2$. Da von demselben aber auch $\angle RIN = \angle(bd)$

gegeben ist, so läßt sich nach 2051 die Fläche des $\square$, und mittelst derselben, durch Hilfe des $\angle$ (bd), nach 486 RI × IN, folglich auch (bd) bestimmen, wodurch sich die Aufgabe auf $\square$ aus a, e, e', (bd), $\angle$ (bd), sieht 2054, reduzirt.

2054. Fig. 388. Aufgabe. $\square$ aus a, e, e', (bd), $\angle$ (bd).

Analysis. Halbirt man a, e und e' in I, R und N, und verbindet I mit R und N, so ergeben sich die gezogenen Linien $\parallel$ b und d, also $IN = \frac{b}{2}$, $IR = \frac{d}{2}$, weshalb IN × IR bestimmt ist, während sich die Lage der Punkte N und R in zwei um A und B mit $\frac{e}{2}$ und $\frac{e'}{2}$ beschriebenen Kreislinien findet. Nun hat man aber auch $\angle RIN = \angle$ (bd) erhalten, während Punkt I festliegt, und Punkt N sich in einer um A mit $\frac{e}{2}$ gezeichneten Kreislinie bestimmt, folglich läßt sich nach 589. a. ein zweiter Ort für den Punkt R bestimmen, also auch dieser Punkt selbst feststellen, und hierauf das verlangte $\square$ ABCD durch Konstruktion zweier $\parallel$ zu IN und IR ableiten.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2054. a. Fig. 242. Aufgabe. $\square$ aus a, h, (b + d), ($\angle$ A + $\angle$ B),

Analysis. Durch (b + d), ($\angle$ A + $\angle$ B) und h läßt sich das 169 angeführte $\triangle$ BCH nach 1996 zeichnen, und darauf mittelst a das verlangte $\square$ ABCD ableiten.

2054. b. Fig. 242. Aufgabe. $\square$ aus a, h, (b − d), ($\angle$ A + $\angle$ B).

Analysis. Führt wie in 2054. a. zu 1997.

2054. c. Fig. 242. Aufgabe. $\square$ aus a, h, (e + e'), $\angle$ (ee').

Analysis. Durch (e + e'), $\angle$ (ee') und h läßt sich das 171 angeführte $\triangle$ BFD nach 1996 konstruiren, und darauf mittelst a das verlangte $\square$ ABCD ableiten.

2054. d. Fig. 242. Aufgabe. □ aus a, b, (e — e'), ∠ (ee').

Analysis. Führt wie in 2054. c. zu 1997.

2054. e. Fig. 242. Aufgabe. □ aus (a+b+c+d), b, (e+e'), ∠ (ee').

Analysis. Durch (e+e'), ∠ (ee') und h läßt sich das 171 angeführte △ BFD nach 1996 zeichnen. Mittelst desselben ergiebt sich FD = (a+c), also auch durch Subtraction von (a+b+c+d), (b+d) oder die Summe der Seiten BH und BC des 169 angeführten △ BCH. Da nun die Lage der FD halbirenden Linie BN gegeben ist, so findet sich, wenn man GN = BN bestimmt, BH + GH = (b+d) so festzustellen, daß H in FD fällt, welche Aufgabe 1732 gelöst ist, u. s. w.

2054. f. Fig. 242. Aufgabe. □ aus (a+b+c+d), h, (e — e'), ∠ (ee').

Analysis. Ergiebt sich wörtlich wie in 2054. e., nur ist (e — e') statt (e+e'), 1997 statt 1996 zu lesen.

2055. Aufgabe. □ aus e, e', ∠ (be'), ∠ (de).

Analysis. 1) Fig. 389. Durch e und ∠ (ed) ergiebt sich nach 114 die aus C auf d gefällte Höhe, durch e' und ∠ (be') ferner die aus D auf b gefällte Höhe. Da nun △ ADC = △ BDC ist, so folgt nach 482 hieraus, daß AD : BC, angenommen = m : n, gegeben ist. Legt man jetzt △ BDC so an △ ADC, daß AN = e', AO = b wird, und zieht CR ∥ NO, so erhält man

NO : CR = AN : AC, oder

DC : CR = e' : e, also bekannt.

Nun ist aber auch

AO : AR = AN : AC = e' : e, und

AD : AO oder BC = m : n gefunden, folglich muß b.

Bus. setz.

AD : AR = e'm : en sein.

Von dem □ DARC sind demnach folgende Stücke vorhanden: ∠ DAC, ∠ CAR, AD : AR, und DC : CR.

Aus diesen Stücken läßt sich die Gestalt des ▱ nach Feststellung der Punkte D und R, mittelst der Lage AC und des Orts 593 bestimmen, also auch schließlich durch Benutzung von e und e′ das verlangte ▱ ABCD ableiten.

Analysis 2). Fig. 390. Legt man △ AFC so in den Scheitel ∠ von F, daß GF = FA, und HF = FC wird, so ergiebt sich GH = e, und es ist in dem ▱ GHBD ferner ∠ HGF = ∠ CAF = 2R − ∠ (ed), ∠ GBD = 2R − ∠ (be′), und DB = e′ gegeben. ▱ GHBD ist aber ein ▭, da DF : FA = FC : FB, also auch DF : FG = FH : FB, mithin △ GFD ∼ △ HFB, und deshalb BH ∥ GD sein muß. Folglich ist das ▱ bestimmt, und es kömmt nur darauf an: die Aufgabe ▭ aus b, d, ∠ (e′d), ∠ (be′) zu lösen, was 682 geschehen ist, und hierauf durch Umklappung des △ GFH das ▭ ABCD abzuleiten.

Anmerkung. Die Analysis 1) ist von dem Kadetten v. Schulenburg gefunden.

2056. Fig. 391. Aufgabe. ▭ aus b, d, e, e′.

Analysis. Verbindet man die Mitten I und S der Seiten b und d, so bildet NR zugleich die Verbindungslinie der Mitten von e und e′, und IN ergiebt sich = RS $\left(= \frac{a}{2}\right)$, also 2IR = IS + RN, 2IN aber = IS − RN. Da nun nach 2050 2.) 2(IS² − RN²), oder 2(IS + RN)(IS − RN) = (e² + e′²) − (b² + d²) ist, so zeigt sich nach dem Vorigen IR × IN gegeben. Denkt man sich aber AD oder d festgelegt, und um A mit AR = $\frac{e}{2}$, um D mit DN = $\frac{e'}{2}$ Kreislinien beschrieben, so bilden diese Oerter für R und N, weshalb nach der Bestimmung von I in der Mitte von d sich durch IR × IN und den ⊙ um A ein zweiter Ort für N nach 592 konstruiren läßt, folglich dieser Punkt bestimmt werden kann, und sich mittelst Verlängerung von DN

und AR, und der Zeichnung zweier durch A und D $\perp$ IS laufenden Linien das verlangte $\square$ ABCD ergeben muß.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung 1) Vergleicht man die vorstehende Aufgabe mit 2053, so zeigt sich, daß jene einen einzelnen Fall von 2053 bildet, da nur der $\angle$ (b d) (bei dem $\square$ $\angle$ (ac)) in 0 übergegangen ist.

Anmerkung 2). Da $IN = \frac{a}{2}$, und $IR = \frac{c}{2}$ ist, geht durch 2050. 2) und die vorstehende Analysis hervor, daß in jedem $\square$ $2ac = (e^2 + e'^2) - (b^2 + d^2)$ ist. (Analogie zum Ptolomäischen Lehrsatz).

2057. Fig. 392. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus a, b, c, d.

Analysis. Da $\angle B + \angle D = 2R$ ist, lege man $\triangle$ ADC so in die Verlängerung von BC, daß $BG = c$, $BF = d$ wird, so muß $FG = AC$ sein. Zieht man AH $\perp$ FG, so ergiebt sich

$BF : BA = BG : BH$, oder

$d : a = c : BH$, weshalb BH gegeben ist. Nun ist aber auch

$FG : AH = BF : BA$, oder

$AC : AH = d : a$, folglich läßt sich $\triangle$ CAH konstruiren, indem man $CH = b + BH$ zeichnet, hierauf den Ort für A nach 593 mittelst des Verhältnisses $AC : AH$ bestimmt, und denselben durch $BA = a$ von B aus schneidet. Dann wird sich schließlich das gesuchte $\square$ ABCD durch Feststellung des $\triangle$ ACD mittelst c und d ergeben.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Die vorstehende Analysis ist von dem Kadetten v. Schulzenburg gefunden.

2058. Fig. 393. Aufgabe. $\square$ im $\odot$ aus a, c, e, e'. (Analogie zu 2057).

Analysis. Sieht man b und d als Diagonalen des $\square$ an, so erhält man die Aufgabe 2057; nur hat man für

□ ABCDA zu lesen ABDCA, d. h. a bleibt a, für b aus 2057 kommt e′, e bleibt, statt d kommt e, statt ∠ (a b) + ∠ (c d) = 2R ergiebt sich hier ∠ (a e′) = ∠ (c e). Hieraus folgt, daß man △ ACD jetzt in den Scheitel∠ von DBA zu legen hat, während dort △ ADC in den Neben∠ von ABC gelegt wurde. Ist jenes nun so geschehen, daß BF = e, BG = c ist, so muß FG = AD sein. Zieht man ferner AH ∦ FG, so ergiebt sich

FB : BA = BG : BH, oder

e : a = c : BH, weshalb BH bestimmt werden kann. Nun ist aber auch

FG : AH = BF : BA, oder

AD : AH = e : a, folglich läßt sich △ DAH konstruiren, indem man DH = BH — e′, oder e′ — BH zeichnet, hierauf den Ort für A nach 593 mittelst des Verhältnisses AD : AH bestimmt, und denselben durch BA = a von B aus schneidet. Dann wird sich schließlich das gesuchte □ ABCD durch Feststellung des △ ACD mittelst c und e ergeben.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

2059. Fig. 394. Aufgabe. □ um ⊙ aus a, b, ∠ A, ∠ C.

Analysis. Da AB — BC, oder a — b = AD — DC nach 294 sein muß, so wird sich, wenn man um A einen ⊙ mit a — b, und um B einen zweiten ⊙ mit b beschreibt, DI = DC ergeben, und deshalb ein um D mit DC gezeichneter ⊙ in I die ⊥ AD errichtete Linie L berühren. Da nun AB = a, ∠ BAI = ∠ A, AI = a — b, der ⊥ L und die Kreislinie um B mit b festgelegt werden können, hat man also die folgende Aufgabe zu lösen: einen ⊙ zu konstruiren, welcher die Linie L in I berührt, und den ⊙ um B so durchschneidet, daß zwei aus den Mittelpunkten D und B nach einem Durchschnittspunkte C gezogene Linien den ∠ BCD = ∠ C einschließen. Diese Aufgabe ist 1574 zu finden.

2060. Fig. 396. Aufgabe. △ um ⊙ aus a, c, ∠ A, ∠ C.

Analysis. Zieht man BF ∦ CD, und FD ∦ BC, um a und c in Verbindung zu bringen, so ergiebt sich ∠ DFB = ∠ C, BF = c, und FD = b. Da nun AB + BF, oder a + c = AD + DF sein muß, so wird sich, wenn man um A einen ⊙ mit a + b oder (b + d), und um B einen zweiten ⊙ mit c beschreibt, DF = DI bestimmen, und deshalb ein um D mit DF gezeichneter ⊙ in I die ⊥ AD errichtete Linie L berühren. Da nun AB = a, ∠ BAI = ∠ A, AI = a + c, der ⊥ L und die Kreislinie um B mit c festgelegt werden könnten, hat man also dieselbe Hülfsaufgabe 1574, wie am Schluß der vorhergehenden Nummer zu lösen.

2061. Aufgabe. △ um ⊙ aus a, b, c, ϱ.

Analysis. Durch a, b und c ergiebt sich d nach 295, durch a + b + c + d und ϱ aber f^a nach 1533, folglich hat man △ aus f^a, a, b, c, d, welche Aufgabe 2079 enthält, zu lösen.

2064. Fig. 292. Aufgabe. △ um ⊙ aus ϱ, ϱ′, ϱ″, ϱ‴.

(ϱ′ ist der Radius des a und die Verlängerungen von b und d berührenden ⊙, ϱ″ der Radius des b und die Verlängerungen von a und c berührenden ⊙ u. s. w.)

Analysis. Denkt man sich NM mit beliebiger Länge festgelegt, so bestimmt sich die verhältnißmäßige Lage der Punkte H und F, da NM : NH = ϱ : ϱ′, und NM : NF = ϱ : ϱ‴ sein muß. Ferner bilden die über MH und MF als Durchmesser gezeichneten Halbkreislinien Oerter für die Punkte B und C, da ∠ HBM = ∠ MCF = R (Halbirungslinien zweier Neben ∠) ist. Nun sind zugleich die Verhältnisse HB : BI = ϱ′ : ϱ″, und FC : CI = ϱ‴ : ϱ″ (△ HOB ∼ △ BIS, und △ ISC ∼ △ RCF) gegeben, folglich lassen sich nach 521 zwei Oerter für den Punkt I konstruiren, und dieser selbst bestimmen. Beschreibt man jetzt um I mit dem

auf BC gefällten ⊥ IS einen ⊙, legt an denſelben aus B und C Tangenten, und beſtimmt ∠ DNH = ∠ CNH, ſo muß ABCD die Geſtalt des geſuchten □ haben, weshalb demſelben nur mittelſt ϱ die entſprechende Größe zu geben iſt, um das eigentliche □ ABCD zu erhalten.

2065. Fig. 292. Aufgabe. □ in und um ⊙ aus ϱ', ϱ'', ϱ'''.

Analyſis. Da ABCD □ im ⊙ iſt, muß $\frac{1}{2}$∠ DCB = $\frac{1}{2}$∠ BAN, und $\frac{1}{2}$∠ ADC = $\frac{1}{2}$∠ ABN, alſo △ AHB ∾ △ DMC, und aus ähnlichen Gründen △ AMB ∾ △ DFC ſein. Hieraus ergeben ſich die Proportionen

a : c = ϱ' : ϱ, und

a : c = ϱ : ϱ''', folglich hat man

ϱ' : ϱ = ϱ : ϱ''', weshalb ϱ beſtimmt werden kann, und ſich die Aufgabe auf □ um ⊙ aus ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ſiehe 2064, reduzirt.

Anmerkung. Da ſich auf demſelben Wege wie in der vorſtehenden Analyſis außer der Proportion

ϱ' : ϱ = ϱ : ϱ''' auch die zweite

ϱ'' : ϱ = ϱ : ϱ^{IV} entwickeln läßt, alſo

ϱ' : ϱ'' = ϱ^{IV} : ϱ''' oder $\varrho'\varrho'''$ = $\varrho''\varrho^{IV}$ ſein muß, ſo ergeben ſich für jedes □ in und um ⊙ folgende beiden Sätze:

1) Der Radius des ⊙ im □ iſt die mittlere Proportionale zwiſchen den Radien zweier ⊙⊙ am □, welche die Verlängerungen des einen Paars Gegenſeiten und das andere Paar Gegenſeiten ſelbſt berühren.

2) Das Rechteck aus den Radien zweier das eine Paar Gegenſeiten ſelbſt berührenden ⊙⊙ am □ iſt dem Rechteck aus den Radien der beiden übrigen ⊙⊙ am □ gleich.

In dieſen Sätzen iſt zugleich das Datum enthalten, daß, wenn zwei von den 3 Stücken ϱ, ϱ', ϱ''' oder ϱ, ϱ'', ϱ^{IV} gegeben ſind, ſtets das dritte beſtimmt iſt, und

daß aus 3 von den 4 Stücken ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV} das vierte, ohne vorhergehende Zeichnung des $\square$, gefunden werden kann.

2666. Fig 292. Der zweite Satz der vorstehenden Anmerkung findet bei jedem $\square$ um $\odot$ statt, d. h.

In jedem $\square$ um $\odot$ ist das Rechteck aus den Radien zweier das eine Paar Gegenseiten selbst berührenden $\odot\odot$ am $\square$ dem Rechteck aus den Radien der beiden übrigen $\odot\odot$ am $\square$ gleich, oder $\varrho'\varrho'''$ ist $= \varrho''\varrho^{IV}$.

Beweis. Zunächst läßt sich zeigen: daß die 4 Centralen der 4 $\odot\odot$ am $\square$ ein $\square$ im $\odot$ bilden. Da nämlich $\angle$ R'DC $+ \angle$ RCD $= 2R + \angle$ N, und deshalb $\angle$ FDC $+ \angle$ FCD $= R + \frac{\angle N}{2}$, also $\angle$ GFI $= R - \frac{\angle N}{2}$ ist, $\angle$ GHI aber nach 326 $= R + \frac{\angle N}{2}$ sein muß, so ergiebt sich $\angle$ GHI $+ \angle$ GFI $= 2R$, aus welchem Grunde GHIF wirklich ein $\square$ im $\odot$ ist.

Hieraus folgt $\triangle$ AHM $\sim \triangle$ MIC, und $\triangle$ MAG $\sim \triangle$ MFC, ($=$ Peripherie $\measuredangle$), weshalb

AH : CI $=$ AM : MC, und

AG : CF $=$ AM : MC, also w. $=$ Verh.

AH : AG $=$ CI : CF statt findet. Nun ist aber

AH : AG $= \varrho' : \varrho^{IV}$, ($\triangle$ AHO' $\sim \triangle$ AGS), und

CI : CF $= \varrho'' : \varrho'''$, ($\triangle$ CIS $\sim \triangle$ CFR), also muß

$\varrho' : \varrho^{IV} = \varrho'' : \varrho'''$, oder

$\varrho'\varrho''' = \varrho''\varrho^{IV}$ sein, w. z. b. w.

Aus diesem Gesetz folgt zugleich das

Datum: wenn 3 von den 4 Radien ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV} der $\odot\odot$ am $\square$ eines $\square$ um $\odot$ gegeben sind, so läßt sich stets der 4te bestimmen, und $\square$ um $\odot$ aus ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV} ist eine unmögliche Aufgabe.

3tes Kapitel.

Verwandlungen.

2067. Aufgabe. Gegeben P und ein festlie, gender ∠ C; man soll eine, △ ABC = f^2 bestim, mende Linie durch P legen.

Analysis. 1ster Fall. Fig. 396. P liegt außerhalb des ∠ C. Legt man durch P eine ∦ zu BC, und bestimmt ▱ CD = f^2, so ergeben sich die ∾ △△ PAG, PED und EFB, also △PED : △PAG = $PD^2 : PG^2$, oder d. S. d. V. Gl. △PED—△PAG : △PAG = $PD^2 - PG^2 : PG^2$, und △FEB : △PAG = $BF^2 : PG^2$. Hier, aus folgt $BF^2 = PD^2 - PG^2$, da sich in beiden Proportionen drei = Glieder finden. Nun sind PD, PG und Punkt F gegeben, folglich läßt sich BF, und mittelst dieser Länge die verlangte Linie PB bestimmen.

2ter Fall. Fig. 396. a. P liegt innerhalb des ∠ C. Die Analysis des ersten Falls paßt wörtlich für den 2ten, wenn man Fig. 396. a. benutzt.

Auflösung für beide Fälle. Fig. 396 u. Fig. 396. a. Lege durch P eine ∦ PI zu einem Schenkel des ∠ C, bestimme ▱ GF = f^2, beschreibe über PD einen Halbkreis, schneide PH = PG, DI = DH ab, und ziehe IB ∦ CG, so bildet PB die verlangte Linie.

Beweis für beide Fälle.

△ PAG ∾ △ PED ∾ △ EFB, also ist

△ PED : △ PAG = $PD^2 : PG^2$, oder d. S. d. V.

△ PED—△PAG : △PAG = $PD^2 - PG^2 : PG^2$, und

△FEB : △PAG = $BF^2 : PG^2$. Hier, aus folgt △PED—△PAG = △ FEB, da BF^2, oder DI^2, oder $DH^2 = PD^2 - PH^2$, oder $PD^2 - PG^2$ ist, und außerdem noch 2 Glieder der letzten Proportionen gleich sind. Addirt man zu den gleich erhaltenen Werthen ▱

AEFC, so ergiebt sich endlich ▱ GF = △ ABC, w. zu beweisen war.

Zusatz. Es sind 2 Resultate möglich.

Von diesen bildet im ersten Fall △ A′B′C (Fig. 396) das zweite Resultat, welches also in den Scheitel ∠ des gegebenen ∠ zu liegen kommt. Im Beweise für dasselbe muß A′ statt A, B′ statt B, E′ statt E gelesen, und zuletzt ▭ A′E′FC nicht addirt, sondern subtrahirt werden.

Im zweiten Fall bildet (Fig. 396. a.) △ A′B′C das zweite Resultat. Im Beweise für dasselbe muß A′ statt A, B′ statt B, E′ statt E gelesen, und die Addition des ▭ A′E′FC dadurch vorgenommen werden, daß man das eine Flächenstück desselben, nämlich △ A′B′C addirt, und das andere, △ B′FE′, subtrahirt.

Anmerkung. Aus dem Zusatz der vorstehenden Aufgabe folgt: daß, in Rücksicht auf die g. Betr. §. 26. und 29. angeführten, zusammengehörigen Vierecke, welche hier Fig. 396. durch A′E′FCA′ und Fig. 396. a durch A′E′FCA′ dargestellt werden, die Fläche des gewöhnlichen Vierecks Fig. 396. A′CFE′ = △ B′FE′ — △ B′CA′ in der Analogie Fig. 396. a. durch dieselbe Differenz △ B′FE′ — △ B′CA′ ersetzt wird.

2068. Aufgabe. △ aus f^2, $[a^2 + (b+c)^2]$, α.

Analysis. Durch α ist nach 1354 das Verhältniß $\varrho : \frac{b+c-a}{2}$, angenommen = m : n, gegeben; also auch $(a+b+c)\,\varrho : \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2} = m : n$, oder nach 341 und 205, $4f^2 : (b+c)^2 - a^2 = m : n$, aus welcher Proportion $[(b+c)^2 - a^2]$, also auch durch Addition mit dem gegebenen Stück $[(b+c)^2 + a^2]$, $(b+c)$ bestimmt werden kann, folglich △ aus f^2, $(b+c)$, α nach 1176 zu konstruiren ist.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich das

Datum: wenn 2 von den 3 Stücken eines △ : f^2, α, $[(b+c)^2-a^2]$ gegeben sind, so läßt sich stets das dritte bestimmen.

2069. Fig. 236. Aufgabe. △ aus f^2, $[a^2+(b-c)^2]$, α.

Analysis. Durch α ist das Verhältniß NH : HA, angenommen $= m : n$, oder

$\varrho'' : BR - BA = m : n$, d. h. nach 339

$\varrho'' : \frac{a+b+c}{2} - c = m : n$, oder

$\varrho'' : \frac{a+b-c}{2} = m : n$ gegeben. Hieraus folgt

$\varrho''(a+c-b) : \frac{(a+b-c)\,[a-(b-c)]}{2} = m : n$, oder

nach 1541 und 205.

$4f^2 : [a^2-(b-c)^2] = m : n$. Aus dieser Proportion ergiebt sich $[a^2-(b-c)^2]$, also auch durch Addition mit dem gegebenen Stück $[a^2+(b-c)^2]$, $(b-c)^2$, weshalb man △ aus f^2, $(b-c)$, α nach 1177 zu konstruiren hat.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich das

Datum: aus 2 von den 3 Stücken eines △ : f^2, α, $[a^2-(b-c)^2]$ läßt sich stets das dritte bestimmen.

2070. Aufgabe. △ aus f^2, $(a^2+b^2+c^2)$, α.

Analysis 1). Da sich durch f^2 und α nach 486 bc ergiebt, erhält man durch Addition oder Subtraktion von 2bc zu $(a^2+b^2+c^2)$ nach 204 $[a^2+(b+c)^2]$ oder $[a^2+(b-c)^2]$, weshalb man entweder 2068 oder 2069 zur Lösung der Aufgabe zu konstruiren hat.

Analysis 2). Fig. 397. Zieht man um $(a^2+b^2+c^2)$ einzuführen t oder AD, so ergiebt sich, da nach 218 $b^2+c^2 = 2AD^2+2DC^2$ ist, $b^2+c^2-a^2 = 2AD^2-2DC^2$, also auch, wenn DF ⊥ b steht, nach 209 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2} =$

$AF^2 - FC^2$, oder nach 205 $= (AF + FC)(AF - FC)$. Da aber die Höhe BE auf b, $FE = FC$ bestimmt, erhält man ferner $AF - FC = AE$, also $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = b \times AE$, oder, wenn man $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = s^2$ annimmt, $b : s = s : AE$. Durch α ist jedoch zugleich $h' : AE = m : n$ gegeben, folglich erhält man d. Zus.

$bh' : s^2 = m : n$, oder
$4f^2 : b^2 + c^2 - a^2 = m : n$, aus welcher Proportion $b^2 + c^2 - a^2$ bestimmt werden kann. Subtrahirt man diese Größe von $(a^2 + b^2 + c^2)$, so ergiebt sich $2a^2$, und man hat folglich $\triangle$ aus f^2, a, α, siehe 873, zu konstruiren.

Anmerkung. Aus der Analysis 2) folgt das

Datum: wenn 2 von den 3 Stücken eines $\triangle$: f^2, α^2, $(b^2 + c^2 - a^2)$ gegeben sind, ist stets das dritte bestimmt.

Durch Hilfe der Daten 2068, 2069, 2070 lassen sich viel mehr als die 3 zur Anwendung derselben gewählten Aufgaben bilden.

2071. Fig. 236. **Aufgabe.** $\triangle$ aus f^2, ϱ'', ϱ'''.

Analysis 1). Nach 1541 ergiebt sich durch f^2 und ϱ'' $\frac{a + c - b}{2}$, oder BF nach 1354, oder CG nach 1543, ferner durch f^2 und ϱ''' $\frac{a + b - c}{2}$ oder BG, folglich auch $a = CG + GB$, weshalb man die 1418 gezeigte Aufgabe. $\triangle$ aus a, ϱ'', ϱ''' zu lösen hat.

Analysis 2). Nach 2027 bestimmt sich h durch ϱ'' und ϱ''', f^2 und h geben aber a nach 185, weshalb sich die Aufgabe auch auf diesem Wege auf $\triangle$ aus a, ϱ'', ϱ''' reduzirt.

2072. Fig. 398. **Aufgabe.** $\square$ aus f^2, a, c, $\angle A$, $\angle C$.

Analysis. Verwandelt man f^2 in ein $\triangle$ ABI mit $\angle$ A und Seite a, so bildet DBCI ein $\square$, da, wegen der Gleichheit der $\triangle\triangle$ DCB und DIB, IC $\fallingdotseq$ DB sein muß. Von diesem $\square$ ist IB und $\angle$ DIB mittelst des aus f^2, a, $\angle$ A konstruirbaren $\triangle$ ABI gegeben, DC und $\angle$ DCB sind aber Stücke der Aufgabe; man hat also $\square$ aus e, e', $\angle$ (be) und $\angle$ (de') zu konstruiren, welche Aufgabe 2055 gelöst ist.

2073. Fig. 399. Aufgabe. $\square$ aus f^2, a, $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ (ee').

Analysis. Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten, so ergiebt sich nach 1281 ein der Hälfte von f^2 gleiches $\square$ NQOI, in welchem $\angle$ INQ $=$ $\angle$ (ee') ist. Durch $\angle$ INQ und $\triangle$ INQ $= \frac{1}{4}f^2$ erhält man ferner nach 486 IN $\times$ NQ. Da sich nun zugleich Q in einer mittelst $\angle$ A der Lage nach gegebenen Linie befindet, und N festliegt, so läßt sich nach 588 ein Ort konstruiren, welcher in der mittelst $\angle$ B gleichfalls bestimmten Lage von b Punkt I feststellt. Zieht man hierauf durch A und B $\fallingdotseq$ zu NI und NQ, so muß sich das gesuchte $\square$ ABCD ergeben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2074. Fig. 399. Aufgabe. $\square$ aus f^2, a, b, $\angle$ A, $\angle$ (ee').

Analysis. Ergiebt sich wie in 2073, nur ist hier als zweiter Ort für I die um B mit BI $= \frac{b}{2}$ beschriebene Kreislinie gegeben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2075. Fig. 399. Aufgabe. $\square$ aus f^2, a, $\angle$ A, $\angle$ (ee'), $\angle$ (be).

Analysis. Ergiebt sich wie in 2073, nur ist hier als zweiter Ort für I die, mittelst BN und $\angle$ BIN $=$ $\angle$ (be), nach 320 bestimmbare Kreislinie gegeben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2076. Fig. 399. Aufgabe.

□ aus f^2, a, b, d, ∠ (ee'), oder

□ aus f^2, a, b, c, ∠ (ee').

Analysis. Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten, so ergiebt sich ein der Hälfte von f^2 gleiches □ NIOQ, in welchem ∠ INQ = ∠ (ee') ist. Durch ∠ INQ und △ INQ = $\frac{1}{4}f^2$ erhält man ferner nach 486 IN × NQ. Da sich nun zugleich Q in einer um A mit $AQ = \frac{d}{2}$ beschriebenen Kreislinie befindet, und N festliegt, so läßt sich nach 589. a ein Ort konstruiren, welcher in der mittelst $BI = \frac{b}{2}$ um B gezeichneten Kreislinie den Punkt I feststellt. Zieht man hierauf durch A und B ∦ ∦ zu NI und NQ, so muß sich das gesuchte □ ABCD ergeben.

Auflösung. Zeichne AB = a, und Kreislinien um B und A mit $\frac{b}{2}$ und $\frac{d}{2}$, halbire ferner a in N, bestimme mittelst dieses Punkts und der Kreislinie um A für den ∠ (ee') und NI × NQ = (mn), welches □ durch Konstruktion eines Hilfs-△ aus ∠ (ee') und f^2 abgeleitet werden kann, den 589. a. angeführten Ort, verbinde den Schneidungspunkt I des Orts und der Kreislinie um B mit N, und konstruire ∠ INQ = ∠ (ee'), so ergiebt sich Q in der Kreislinie um A. Verlängert man hierauf AQ und BI, und legt durch A und B ∦∦ zu NI und NQ, so erhält man das gesuchte □ ABCD.

Beweis. Da AC ∦ NI, BD ∦ NQ, AN = NB, und $BI = \frac{b}{2}$, $AQ = \frac{d}{2}$ gezeichnet ist, so muß BC = b, AD = d, ∠ DEC = ∠ (ee') sein, während AB = a geradezu bestimmt wurde. Es ist also nur zu zeigen, daß sich die Fläche des □ ABCD = f^2 ergeben hat. Der nach 589. a. konstruirte Ort hat aber die Eigenschaft, daß jede zwei in N zusammenstoßende Linien, welche in den zusammengehörigen

beiden Kreislinien endigen, und den bei der Feststellung benutzten ∠, hier (ee'), bilden, dasselbe zu der Zeichnung des Orts benutzte Rechteck einschließen: folglich ist NI × NQ = (mn), also △ NIQ nach 485. 3) dem in der Auflösung benutzten Hilfs-△, welches $\frac{1}{4}f^2$ zur Fläche hatte, gleich, und deshalb ▱ IQ = $\frac{1}{2}f^2$, und ▱ ABCD = f^2.

Zusatz. Es sind zwei verschiedene Resultate möglich.

2077. Fig. 399. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, b, ∠ (ee'), (e'd).

Analysis. Wie in 2076 ergiebt sich ∠ INQ = ∠ (ee'), und IN × NQ durch $\frac{1}{4}f^2$ und ∠ (ee'). Da sich nun zugleich I in einer mittelst $BI = \frac{b}{2}$ um B gezeichneten Kreislinie befindet, und N festliegt, so läßt sich nach 589. a. ein Ort konstruiren, welcher in der, mittelst NA und ∠ NQA = ∠ (e'd), nach 320 bestimmten Kreislinie Punkt Q feststellt. Zieht man hierauf durch A und B ∦ ∦ zu NI und NQ, so muß sich das gesuchte ▱ ABCD ergeben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2078. Fig. 399. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, ∠ (ee'), ∠ (be), ∠ (e'd).

Analysis. Wie in 2076 ergiebt sich ∠ INQ = ∠ (ee'), und IN × NQ. Da sich nun zugleich I in einer, mittelst NB und ∠ (be) = ∠ NIB, nach 320 gegebenen Kreislinie befindet, und N festliegt, so läßt sich nach 589. a. ein Ort konstruiren, welcher in der, mittelst NA und ∠ NQA = (e'd), gleichfalls nach 320 bestimmten Kreislinie den Punkt Q feststellt. Zieht man hierauf durch A und B ∦ ∦ zu NI und NQ, so muß sich das gesuchte ▱ ABCD ergeben.

Zusatz. Es sind 2 verschiedene Resultate möglich.

2079. Aufgabe. ▱ aus f^2, a, b, c, d, oder: eine gegebene Fläche durch 4 bestimmte gerade Linien einzuschließen.

Analysis. Fig. 399. Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten, so ergiebt sich ein der Hälfte von f^2 glei-

ches ▱ NIOQ, in welchem nach 2050. 1) durch a, b, c, d $IQ^2 - NO^2$ gegeben ist. Aus der Fläche eines ▱ und dem Unterschied der Quadrate beider Diagonalen lassen sich aber nach 2051 die ∠, z. B. ∠ IOQ, bestimmen, weshalb ∠ (ee') (‡‡ Schenkel) gefunden ist, und sich die Aufgabe auf ▱ aus f^2, a, b, d, ∠ (ee'), siehe 2076, reduzirt.

Auflösung. Fig. 400. Zeichne △ ACB mit den Katheten AC = a, BC = c, beschreibe über AB einen Halbkreis, bestimme das △ ADE aus AD = b, DE = d, schneide AF = AE ab, mache FG = 2f, verlängere den aus F auf GB gefällten ⊥ um HI = BH, und konstruire nach 2076 ein ▱ aus f^2, a, b, d und ∠ (ee') = ∠ HIG, so ergiebt sich das verlangte ▱ ABCD.

Beweis. Fig. 399. und Fig. 400. Außer c hat ▱ ABCD sämmtliche gegebenen Stücke geradezu durch die Konstruktion von 2076 erhalten, es ist also nur zu erweisen, daß (Fi. 399.) DC = c ist. Verbindet man hiezu die Mitten der Seiten, und fällt aus einer ∠spitze I des erhaltenen ▱ INQQ einen ⊥ IS auf Lage QO, so ergiebt sich, da ∠ IOS = ∠ (ee') (‡ ‡ Schenkel) ist, und ∠ (ee') = ∠ GIH, Fig. 400, bestimmt wurde, △ IOS aus Fig. 399. ∽ △ GHI, aus Fig. 400. also:

IS : OS = GH : HI = GH : HB, und
IS : OS = GH × GB : HB × GB, d. h.
IS : OS = GF^2 : FB^2, oder
IS : OS = $4f^2$: $AB^2 - AF^2$, oder
IS : OS = $4f^2$: $AB^2 - AE^2$, d. h.
IS : OS = $4f^2$: $(a^2+c^2) - (b^2+d^2)$, woher auch
IS × OQ : OS × OQ = $4f^2$: $(a^2+c^2) - (b^2+d^2)$, oder
$\frac{f^2}{2}$: 2OS × OQ = $2f^2$: $(a^2+c^2) - (b^2+d^2)$ sein muß.

Nun hat man aber 4OS × OQ nach 2051 = $QI^2 - NO^2$, also ist $2f^2 : 2(QI^2 - NO^2) = 2f^2 : (a^2+c^2) - (b^2+d^2)$,

weshalb $2(QI^2-NO^2) = (a^2+c^2)-(b^2+d^2)$ sein muß. Nach 2050. 1)
ist aber auch $2(QI^2-NO^2) = (a^2+CD^2)-(b^2+d^2)$, folglich hat man $(a^2+CD^2)-(b^2+d^2) = (a^2+c^2)-(b^2+d^2)$, und deshalb wirklich $CD^2 = c^2$, und

$$CD = c \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Da sich $\angle$ (ee') entweder $=\angle$ HIG oder $=\angle$ IGH, Fig. 400, bestimmen läßt, und 2076 selbst 2 Resultate hat, sind bei der vorstehenden Aufgabe 4 verschiedene Resultate möglich.

Anmerkung. Nach der Anmerkung von 2067 bildet $\square$ aus a, e, c, e' und $\triangle$ CDE — $\triangle$ ABE $= q^2$ eine Analogie zu der vorstehenden Aufgabe. Die Analysis ꝛc. findet sich auch ganz auf ähnliche Art.

4tes Kapitel.

Kreis-Aufgaben.

2080. Fig. 401, 401. a., 401. b., 401. c., 401. d., 401. e. Aufgabe. $\odot$ aus P, K, K'.

1) Gleichartige Berührung.

2) Ungleichartige Berührung.

Analysis. Durch 2 Punkte bestimmte sich in der Aufgabe $\odot$ aus P, P', K ein fester Punkt, welcher eine Berührungslinie an den gesuchten $\odot$ ergab, siehe 577. Dasselbe fand bei der Aufgabe $\odot$ aus P, L, K, also bei einem $\odot$ und einer geraden Linie statt, siehe 1878, wo sich jener Punkt insbesondere mittelst der Verlängerung der Verbindungslinie beider Berührungspunkte, und zwar in dem $\perp$ aus M auf L ergab. Folglich läßt sich bei 2 $\odot\odot$ in der Art eine Analogie vermuthen, daß die Verlängerung der zwischen beiden Berührungspunkten liegenden Sehne in dem $\perp$ aus der Mitte eines $\odot$

auf den anderen, d. h. in der Centrale, gleichfalls einen festen Punkt, und ferner die Größe einer Berührungslinie für den gesuchten ⊙ bestimmen wird. Die nähere Untersuchung bestätigt dies nun in folgender Art für alle Fälle der Aufgabe. Da FM ∦ B′μ, also auch ∦ M′B′ ist (△△), weshalb AM′ : AM = r′ : r sein muß, findet sich Punkt A gegeben. Versucht man jetzt die Größe des Rechtecks AB′ × AB, also die Berührungslinie an den gesuchten ⊙ bei Fig. 401, Fig. 401. a, Fig. 401. c und Fig. 401. e, oder die in A auf dem Durchmesser ⊥ stehende Sehne (siehe 365) Fig. 401. b. und Fig. 401. d. zu finden, so wird sich ganz analog der Aufgabe: ⊙ aus P, L, K das Rechteck AB′ × AB gleich dem bekannten AD × AC ergeben. Da nämlich GF, wegen der gleichen ∠ FMG und B′M′D, ∦ B′D ist, so ergiebt sich ∠ ADB′ = ∠ AGF = ∠ ABC, woraus hervorgeht, daß sich die 4 Punkte B,C,D und B′ in einer Kreislinie befinden. Hieraus folgt nun, daß Punkt E gegeben ist, da AB′ × AB = AP × AE, und deshalb auch AP × AE = AD × AC sein muß, man also einen K berührenden ⊙ zu konstruiren hat dessen Peripherie durch P und E geht, welche Aufgabe: ⊙ aus P, P′, K, 577 gelöst ist.

Auflösung. Verlängert man die Verbindungslinie B′F zweier ∦ gezogenen Radien B′M′ und FM, so ergiebt sich der Schneidungspunkt A derselben mit der Centrale. Bestimmt man hierauf E dergestalt, daß AP × AE = AC × AD wird, welches durch Konstruktion einer durch P, C und D gehenden Kreislinie geschehen kann, so erhält man schließlich den gesuchten ⊙, wenn nach 577 eine Kreislinie gezeichnet wird, die K berührt, und durch P und E geht.

Beweis. Nach der Konstruktion wird K von dem gesuchten ⊙ berührt, es bleibt also nur zu beweisen: daß derselbe bei K′ statt findet. Zieht man hiezu eine Linie aus A durch den Berührungspunkt B, und aus M′ die ∦ M′B′ ∦ FM, so muß, da nach der Konstruktion AM′ : AM = r′ : r bestimmt ist, M′B′ = r′ sein, also B′ sich in K′ befinden

Nun hat man ferner ∠ MFB oder ∠ MBF oder ∠ $\mu BB'$ = ∠ $BB'\mu$, also muß $\mu B = \mu B'$ sein, und die B und B' durchlaufende Kreislinie um μ wird K und K' in B und B' berühren. μ ist aber auch wirklich der Mittelpunkt derjenigen Kreislinie, welche durch P geht, da sich nach dem Vorigen, ganz wie in der Analysis, $AD \times AC = AB' \times AB$, also auch $AP \times AE$ nach der Konstruktion $= AB' \times AB$ ergiebt, weshalb Punkt B' nur in der P, E und B durchlaufenden Kreislinie liegen kann.

Anmerkung 1). Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich:

1) durch 2 Kreislinien K und K' sind stets zwei Punkte: A Fig. 401 und A Fig. 401. b, oder: A Fig. 401. c und A Fig. 401. d mitgegeben, welche mit jedem Paar Berührungspunkte B und B' eines gleichartig oder ungleichartig berührenden ⊙ in eine gerade Linie fallen.

2) Das Rechteck aus den beiden von A nach den Berührungspunkten führenden Linien AB und AB' ist für alle Berührungs ⊙⊙ dasselbe, nämlich $= AD \times AC$.

Anmerkung 2). Die Analysis der vorstehenden Aufgabe ist so weitläuftig abgefaßt worden, da sich dieselbe gerade auf dem angegebenen Wege ohne vorhergehende Kenntniß einer anderen Auflösung früher ergeben hat. Kürzer läßt sich die Analysis und der Beweis durch ein ähnliches Verfahren wie in der Analysis 1) von 2082 behandeln. Verfährt man aber wie in der Analysis 2) von 2082, welche zu 2080 führte, so reduzirt sich die vorstehende Aufgabe: ⊙ aus P, K, K' auf: ⊙ aus K, K', K'' 2082, zu deren Lösung dann Analysis 1) benutzt werden muß, so daß sich also beide Aufgaben wechselseitig aufeinander reduziren lassen.

2081. Fig. 401. b. Aufgabe. ⊙ aus P, K = K', ungleichartige Ber.

Analysis. Da MF ∓ und = B'M' ist, bildet A die Mitte von MM'. Der übrige Theil der Analysis ꝛc. ergiebt sich wie in 2080.

2082. Aufgabe. ⊙ aus K, K', K''.

(Es ist im Folgenden nur der Fall berücksichtigt, wenn K, K' und K'' aus einanderliegen. Die übrigen Fälle lassen sich auf ähnliche Weise erledigen. Die Beachtung der Resultate in 2080 und der zu dieser Nummer gehörenden 6 Figuren kann dabei vortheilhaft werden.)

1 Fall). Gleichartige Berührung.

Analysis. 1.) Fig. 402. Verbindet man μ mit M und M'', und verlängert BB'' bis zum Schnitt P mit der verlängerten Centrale, so ergiebt sich nach 301. a. DM'' ∓ Mμ, also auch GB ∓ ED, weshalb P mittelst der Proportion

MP : M''P = r : r'' bestimmt werden kann,

und PG : PE = PB : PD, also auch

PG×PF : PE×PF = PB×PB'' : PD×PB'' statt finden muß.

Da nun PE×PF = PD×PB'' ist, folgt hieraus

PB×PB'' = PG×PF. Zieht man die Berührungslinie PT, so erhält man aber zugleich PB × PB'' = PT², also ist PT² = PG × PF, und deshalb die von einem festen Punkte P nach dem gesuchten ⊙ führende Berührungslinie PT gegeben. Benutzt man in gleicher Art die Kreislinien K und K', so bestimmt sich ein zweiter fester Punkt P' und die Berührungslinie P'T' (P'T'² = P'H × P'I). Es ist folglich ein K berührender ⊙ so zu konstruiren, daß zwei an denselben aus gegebenen Punkten P und P' führende Berührungslinien PT und P'T' vorgeschriebene Längen erhalten, welche Aufgabe: ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K, 2083 gelöst ist.

Auflösung. Ziehe in K, K' und K'' drei ∓∓ Radien MB, M'O, M''D, verlängere BD und BO bis zu den Schneidungspunkten P und P' mit den Centralen (von der größten Kreislinie aus nach den beiden kleineren hin), bestimme 2 mittlere Proportionalen b' und b, jene zwischen P'I

und P'H, diese zwischen PG und PF, und zeichne nach 2083 so einen K berührenden ⊙, daß sich die aus P und P' nach demselben führenden Berührungslinien PT und P'T' = b und b' ergeben, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Nach der Konstruktion wird K von dem um μ gezeichneten ⊙ berührt, es ist also nur darzuthun, daß sich dasselbe für K' und K'' ergeben hat. Verbindet man hiezu μ mit M, und legt M''D ∓ MB, so fällt BG ∓ ED, und es wird nach der Auflösung die Verlängerung von BD in P treffen, weshalb sich durch gleiche Schlüsse wie in der Analysis PB × PB'' = PG × PF (B'' liegt in K'') ergeben muß. Nun ist aber auch PT^2 = PG × PF bestimmt, folglich muß PT^2 = PB × PB'' sein, also B'' zugleich in K'' und der Peripherie um μ liegen.

Da ferner wegen der Parallelität von M''D mit μM, ∠ μBB'' = ∠ M''DB'', also auch ∠ μB''B = ∠ DB''M'' ist, so bildet μB''M'' eine gerade Linie, und es berührt K'' deshalb wirklich den ⊙ um μ. Auf demselben Wege kann schließlich gezeigt werden, daß auch K' von dem ⊙ um μ berührt wird, folglich erfüllt derselbe alle Bedingungen der Aufgabe.

2 Fall). Ungleichartige Berührung.

Analysis. 1.) Fig. 402. a. Verbindet man μ mit M und M'', und zieht BB'', so ergiebt sich nach 301. a. DM'' ∓ μM, also auch GB ∓ ED, weshalb P mittelst der Proportion MP : M''P = r : r'' bestimmt werden kann, und

PG : PE = PB : PD, also auch

PG×PF : PE×PF = PB×PB'' : PD×PB'' statt finden muß. Da nun PE×PF = PD×PB'' ist, folgt hieraus

PB×PB'' = PG×PF.

Zieht man ⊥ μP durch P die Sehne NT, so erhält man aber zugleich PB×PB'' = PN×PT = PT^2, also ist PT^2 = PG×PF, und deshalb die von dem gesuchten ⊙ in T und N halbirte Kreislinie um P gegeben. Benutzt man in gleicher Art die Kreislinien K und K', so bestimmt sich ein

zweiter fester Punkt P′, und eine gleichfalls von dem verlangten ⊙ halbirte Kreislinie ($P'T''^2 = P'H \times P'I$), es ist folglich ein K berührender ⊙ zu konstruiren, welcher die um P und P′ zu den Radien PT und P′T′ gehörenden Kreislinien halbirt, welche Aufgabe: ⊙ aus K, K″$_{d''}$, K′$_{d'}$, 2085 gelöst ist.

Auflösung. Ziehe in K, K′ und K″ 3 ⊧ ⊧ Radien MB, M′O, M″D, verbinde B mit O und D, bestimme zwei mittlere Proportionalen PN und P′T′, die eine zwischen PG und PF, die andere zwischen P′H und P′I, beschreibe mit denselben ⊙⊙ um die erhaltenen Punkte P und P′, und zeichne nach 2085 eine diese beiden ⊙⊙ halbirende und K berührende Kreislinie, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Ergiebt sich mit geringen Abänderungen wörtlich wie im ersten Fall, nur muß Fig. 402. a. benutzt werden.

Analysis 2). Beschreibt man um μ mit μM″ eine konzentrische Kreislinie, so bestimmen sich für dieselben 2 Berührungskreise um M und M′, welche bei der gleichartigen Berührung die Radien $r - r''$ und $r' - r''$, bei der ungleichartigen Berührung aber (K′ und K″ gleichartig berührt gedacht) die Radien $r + r''$ und $r' - r''$ erhalten. Hiedurch reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, K, K′, und kann daher durch 2080 gelöst werden.

Anmerkung 1). Aus dem ersten Fall der Analysis 1) ꝛc. ergiebt sich:

1) wenn ein unbestimmter ⊙ entweder zwei auseinanderliegende Kreislinien K und K′ gleichartig, oder zwei ineinanderliegende Kreislinien K und K′ ungleichartig berührt, so läßt sich stets ein fester Punkt nebst der Länge einer von demselben nach dem unbestimmten ⊙ führenden Berührungslinie (P_b) ableiten. Fig. 401, 401. a, 401. c.

Aus dem 2ten Fall ꝛc. dagegen ergiebt sich:

2) wenn ein unbestimmter ⊙ entweder 2 auseinanderliegende Kreislinien K und K′ un-

gleichartig, oder 2 in einanderliegende Kreislinien K und K′ gleichartig berührt, so läßt sich stets eine festliegende Kreislinie (K_d) ableiten, welche von dem unbestimmten ⊙ halbirt wird. Fig. 401. b, 401. d.

3) Wenn ein unbestimmter ⊙ zwei sich durchschneidende Kreislinien K und K′ beliebig berührt, so läßt sich stets ein fester Punkt nebst der Länge einer von demselben nach dem unbestimmten ⊙ führenden Berührungslinie (P_b) ableiten. Fig. 401. e.

2083. Aufgabe. ⊙ aus P_b, P'_b, K. (359.)
Ber. v. A. oder Ber. v. J.

Fall 1). Fig. 403. Die um P und P′ mit b und b′ beschriebenen Kreislinien fallen aus oder in einander.

Analysis. Nach 362 liegen die Mittelpunkte aller die Enden von b und b′ berührenden ⊙⊙ in einer auf PP′ ⊥ stehenden bekannten Linie L. Hieraus folgt daß statt PU × PT, (PR + RT) (PR — RT), oder $PR^2 - RT^2 = b^2$ gesetzt werden kann, also $RT^2 = PR^2 - b^2$ gegeben ist, und deshalb in PP′ zwei Punkte T und U bestimmbar sind, welche alle jene Kreislinien durchlaufen müssen. Hiedurch reduzirt sich schließlich die Aufgabe auf 577 ⊙ aus P, P′, K.

Auflösung. Beschreibe ⊙⊙ um P und P′ mit b und b′, und einen dritten jene zwei beliebig durchschneidenden ⊙ um einen willkührlichen Punkt D, zeichne ferner um den Schneidungspunkt O (bestimmt Ort L) der Sehnen EF und HG einen 4ten ⊙ mit der Berührungslinie OI, so bestimmen sich in PP′ die Punkte U und T, und es wird eine nach 577 konstruirte Kreislinie, welche K berührt, und T und U durchläuft die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. (In Rücksicht auf 577 muß D so gewählt werden, daß sich ⊙ um O und K begegnen).

Beweis. Da K nach der Auflösung berührt wird, hat man nur zu beweisen, daß $\angle PB\mu = \angle P'B'\mu = R$ ist.

Es ist $OI^2 = OF \times OE$, und
$ON^2 = OG \times OH$, also hat man

$OI^2 = ON^2$, oder nach der Konstruktion
$P'O^2 - b'^2 = PO^2 - b^2$, und
$PO^2 - P'O^2 = b^2 - b'^2$, also auch nach 211.
$P\mu^2 - P'\mu^2 = b^2 - b'^2$, und
$P\mu^2 - b^2 = P'\mu^2 - b'^2$.

Diesen Werthen können aber allein μB und $\mu B'$ als Katheten genügen, da es unmöglich ist, daß irgend eine andere von μ nach den Kreisen um P und P′ führende Berührungslinie sich $= \mu T$ und μU ergeben kann, welches doch statt finden müßte, da nach der Analysis sämmtliche die Enden von b und b′ berührenden Kreislinien dieselben Punkte T und U durchlaufen.

Fall 2). Die um P und P′ mit b und b′ beschriebenen $\odot\odot$ begegnen sich.

Analysis. Fig. 403. a. Da $PH \times PG = PB^2 = b^2$ gegeben ist, P festliegt, und H sich in einer bekannten Kreislinie K befindet, so läßt sich nach 592 ein Kreisort für G bestimmen, dessen Mittelpunkt F in PM fallen wird. Die 592 angegebene Zeichnung dieses Orts bedingt aber $PM : PF = MI : FG$, also ist $FG \parallel MI$, folglich $\angle FGP = \angle MIH = \angle MHI = \angle GH\mu$, und es berührt deshalb der $\odot$ um μ den $\odot$ um F. Nun bildet ferner die verlängerte Sehne DE einen Ort für μ, da sich die Quadrate jeder 2 aus einem beliebigen Punkte X derselben an die $\odot\odot$ um P und P′ gezogenen Berührungslinien, wegen der Gleichheit mit $XE \times XD$, selbst gleich groß ergeben müssen, folglich hat man einen K und den Ort um F berührenden $\odot$ zu zeichnen, dessen Mittelpunkt in die verlängerte Sehne DE fällt, oder $\odot$ aus K, K′, L_μ, siehe 1881, zu lösen, um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen.

Auflösung. Beschreibe um P und P′ $\odot\odot$ mit b und b′, ziehe die $\perp$ PP′ stehende gemeinschaftliche Sehne

oder Berührungslinie, konstruire nach 592 für das Quadrat von b und für P und K den Kreisort um F, und zeichne nach 1881 eine diesen Ort und K berührende Kreislinie, deren Centrum in die Lage DE fällt, so bildet diese den verlangten ⊙.

Beweis. Da K nach der Zeichnung von dem ⊙ um μ berührt wird, so ist nur zu zeigen, daß zwei an denselben aus P und P′ gezogene Berührungslinien: PB und P′B′ = b und b′ sind. Wegen der Berührung bei G und H ergiebt sich $M\mu \doteqdot FS$, also auch $HN \doteqdot TS$. Da nun außerdem PM:PF = MH:FS nach der Konstruktion des Orts sein muß, so trifft die Verlängerung von HGS in P, und es ist

PN : PH = PT : PS, also auch

PN×PQ : PH×PG = PT×PQ : PS×PG.

Nun findet sich aber PT × PQ = PS × PG, also muß PG×PH, oder PB^2 = PQ×PN, und nach der Konstruktion des Orts = b^2 sein, weshalb die aus P an den ⊙ um μ führende Berührungslinie wirklich = b ist. Dasselbe ergiebt sich schließlich in Bezug auf P′ und b′: denn $\mu B'$ sei Tangente an den ⊙ um P′, so muß $\mu B'^2 = \mu D \times \mu E = \mu B^2$, also $\mu B' = \mu B$ sein. Folglich liegt B′ in der Kreislinie um μ, und P′B′ = b′ ist eine Tangente.

Anmerkung. Aus der Analysis des 1sten Falls geht hervor, daß sämmtliche Kreislinien, welche 2 aus- oder ineinander liegende ⊙⊙ ⊥ schneiden 2 in der Centrale liegende bestimmbare Punkte durchlaufen müssen.

Aus der Analysis des 2ten Falls folgt in Verbindung mit 2082 ꝛc. das

Datum: (Fig. 401, a. b. c. d. e.) wenn ein unbestimmter ⊙ entweder 2 sich durchschneidende Kreislinien K und K′ beliebig, oder 2 auseinanderliegende Kreislinien K und K′ gleichartig, oder 2 ineinanderliegende Kreislinien K und K′ ungleichartig berührt, so ist die Lage einer von

dem unbestimmten ⊙ ⊥ durchschnittenen Kreislinie P_b gegeben, und wenn der unbestimmte ⊙ einen ⊙ K berührt, und einen anderen P_b ⊥ schneidet, so läßt sich stets ein zweiter Berührungskreis K′ ableiten. Durch 2 von den 3 Stücken K, K′, P_b ist also stets das dritte bestimmt.

2083. a. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K = K′.

Analysis. Durch K = K′ ergiebt sich ein Ort für μ, wenn man auf die Centrale in deren Mitte einen ⊥ errichtet; man hat also ⊙ aus P_b, L_μ, K, siehe 2088, zu verzeichnen.

2084. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K, K′. (359.)

1) Gleichartige Berührung.

Analysis. Durch K und K′ ist nach 2082 Anmerk. 1 und 3), wenn K und K′ auseinanderliegen oder sich durchschneiden, $P'_{b'}$, und nach Anmerk. 2), wenn beide Kreislinien ineinanderfallen, K_d gegeben; man hat also ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K (2083), oder ⊙ aus P_b, K_d, K′ (2087) zu verzeichnen.

2) Ungleichartige Berührung.

Analysis. Durch K und K′ ist nach 2082 Anmerk. 1 und 3), wenn K und K′ ineinanderliegen oder sich durchschneiden, $P'_{b'}$, und nach Anmerk. 2), wenn beide Kreislinien auseinanderfallen, K_d gegeben; man hat also ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K′ (2083), oder ⊙ aus P_b, K_d, K′ (2087) zu konstruiren.

2085. Fig. 404. Aufgabe. ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, K″. (Analogie zu 2083.)

Analysis. In sofern diese Aufgabe eine Analogie zu 2083: ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K bildet, läßt sich vermuthen, daß alle K und K′ halbirende Kreislinien gleichfalls zwei feste Punkte A und C durchlaufen werden. Dies bestätigt sich in folgender Weise. Nach 367 liegen die Mittelpunkte aller K und K′ halbirenden ⊙⊙ in einer auf MM′ ⊥ stehenden bekannten Linie L. Hieraus folgt, daß statt $MC \times MA = r^2$ auch $(DA + DM)(DA - DM)$ oder $DA^2 - DM^2 = r^2$ gesetzt

werden kann, also $DA^2 = r^2 + DM^2$ gegeben ist, und in der Lage der Centrale zwei Punkte A und C bestimmbar sind, welche alle K und K′ halbirende Kreislinie durchlaufen werden. Hiedurch reduzirt sich schließlich die Aufgabe auf 577 ⊙ aus P, P′, K.

Auflösung. Beschreibe einen K und K′ beliebig schneidenden ⊙ um einen willkührlichen Punkt T, fälle aus dem Schneidungspunkt F der entstandenen gemeinschaftlichen Sehnen einen ⊥ FG auf MM′, bestimme $MG = M'D$, errichte in D einen ⊥ auf MM′, in M einen ⊥ ME auf einen beliebigen Durchmesser IH von K, beschreibe um E mit EH einen ⊙, und zeichne nach 577 eine, die in der Lage der Centrale entstandenen Durchschnittspunkte A und B durchlaufende Kreislinie, welche K″ berührt, so ist die Aufgabe gelöst. (In Rücksicht auf 577 muß E so gewählt werden, daß der zugehörige ⊙ K″ durchschneidet.)

Beweis. Da nach der Auflösung K″ von dem ⊙ um μ berührt wird, so ist nur darzuthun, daß K und K′ von demselben halbirt werden. Aus der Bestimmung von F ergiebt sich ganz wie in dem Beweise des 1sten Falls von 2083, daß $MG^2 - M'G^2$, also auch $M'D^2 - MD^2 = r^2 - r'^2$ ist, woraus nach 209 $\mu M'^2 + r'^2 = \mu M^2 + r^2$ folgt. Diesen Werthen können aber allein μI und μN als Hypotenusen genügen, da es unmöglich ist, daß sich irgend zwei andere μM und r, und $\mu M'$ und r′ als Hypotenusen entsprechende Linien $= \mu A$ und μC ergeben, welches doch statt finden müßte, da eine mit solcher Hypotenuse beschriebene Kreislinie offenbar K und K′ halbiren wird, und deshalb nach den in der Analysis gemachten Schlüssen die Punkte A und C durchlaufen würde. Da sich nun auf diese Art die $\angle \mu MN$ und $\mu M'I = R$ bestimmen, also r und r′ halbe Sehnen für die Kreislinie um μ bilden, so halbirt dieselbe wirklich sowohl K als K′, und erfüllt deshalb sämmtliche Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis und Auflösung geht hervor,

daß sämmtliche Kreislinien, welche 2 festliegende ⊙⊙ halbiren, 2 in die Lage der Centrale fallende bestimmbare Punkte durchlaufen müssen, weshalb die Bedingungen K_d und $K'_{d'}$ einer Kreis-Aufgabe stets auf die einfacheren P und P′ zurückgeführt werden können.

2085. a. Aufgabe. ⊙ aus K″ = K′, K_d.

Analysis. Durch K″ = K′ ergiebt sich als Ort für μ der auf die Centrale in deren Mitte errichtete ⊥; man hat also ⊙ aus K″, L_μ, K_d, siehe 2089, zu konstruiren.

2086. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K′, K″.

1) Gleichartige Berührung.

Analysis. Durch K′ und K″ ist nach 2082 Anmerk. 1 und 3), wenn K′ und K″ auseinanderliegen oder sich durchschneiden, P_b, und nach Anmerk. 2), wenn beide Kreislinien ineinanderfallen, $K'_{d'}$ gegeben; man hat also ⊙ aus P_b, K_d, K′ (2087), oder ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, K″ (2085) zu konstruiren.

2) Ungleichartige Berührung.

Durch K′ und K″ ist nach 2082 Anmerk. 1 und 3), wenn K′ und K″ in einanderliegen oder sich durchschneiden, P_b, und nach Anmerk. 2), wenn beide Kreislinien auseinanderfallen, $K'_{d'}$ gegeben; man hat also ⊙ aus P_b, K_d, K′ (2087), oder ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, K″ (2085) zu konstruiren.

2087. Fig. 405. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, K′ (359). (Analogie zu 2083 und 2085.)

Analysis. Insofern diese Aufgabe eine Analogie zu 2083 und 2085 bildet, läßt sich vermuthen, daß alle K halbirende und das Ende von b berührende Kreislinien gleichfalls zwei feste Punkte A und C durchlaufen werden. Dieß bestätigt sich in folgender Weise. Nach 368 liegen die Mittelpunkte aller K halbirenden und das Ende von b berührenden ⊙⊙ in einer auf PM ⊥ stehenden bekannten Linie L.

Hieraus folgt, daß ſtatt $MG \times MA = r^2$ auch $(DA + DM)(DA - DM)$ oder $DA^2 - DM^2 = r^2$ geſetzt werden kann, alſo $DA^2 = r^2 + DM^2$ gegeben iſt, und in der Lage von PM zwei feſte Punkte A und C beſtimmbar ſind, welche alle K halbirende und das Ende von b berührende Kreislinien durchlaufen werden. Hiedurch reduzirt ſich ſchließlich die Aufgabe auf 577: ⊙ aus P, P′, K.

Auflöſung. Beſchreibe mit b um P einen ⊙, ziehe für dieſen und K den 368 angegebenen Ort, errichte den ⊥ ME auf einen beliebig durch M gelegten Durchmeſſer IH, zeichne um E einen ⊙ mit EH, und konſtruire nach 577 eine K′ berührende und die beiden in der Lage der Centrale erhaltenen Schneidungspunkte A und C durchlaufende Kreislinie, ſo iſt die Aufgabe gelöſt. (In Rückſicht auf 577 muß E ſo gewählt werden, daß der zugehörige ⊙ K′ durchſchneidet.)

Beweis. Da nach der Auflöſung K′ von dem ⊙ um μ berührt wird, ſo hat man nur darzuthun, daß K halbirt iſt, und ſich $\angle \mu BP = R$ ergeben hat. Aus der Konſtruktion des Orts (368) folgt $P\mu^2 - M\mu^2 = b^2 + r^2$, alſo auch $P\mu^2 - b^2 = M\mu^2 + r^2$. Dieſen Werthen können aber allein μN als Hypotenuſe, und μB als Kathete genügen, da es unmöglich iſt, daß ſich irgend zwei andere, μM und r als Hypotenuſe, und μP und b als Kathete entſprechende Linien, $= \mu A$ und μC ergeben, welches doch inſofern ſtatt finden müßte, als eine mit ſolcher Linie beſchriebene Kreislinie offenbar K halbirt und das Ende von b berührt, alſo nach den in der Analyſis gemachten Schlüſſen die Punkte A und C durchläuft. Da ſich nun auf dieſe Art die $\measuredangle \mu MN$ und $\mu BP = R$ beſtimmt haben, alſo r eine halbe Sehne und PB eine Berührungslinie für den ⊙ um μ bildet, ſo erfüllt derſelbe alle Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Aus der vorſtehenden Analyſis und Auflöſung geht hervor,

daß ſämmtliche Kreislinien, welche einen feſt-

liegenden ⊙ ⊥ schneiden, und eine zweite festliegende Kreislinie halbiren, 2 in die Lage der Centrale fallende bestimmbare Punkte durchlaufen müssen, weshalb die Bedingungen P_b und K_d einer Kreis-Aufgabe stets auf die einfacheren P und P′ zurückgeführt werden können.

2088. Fig. 403. Aufgabe. ⊙ aus P_b, L_μ, K. (359).

Analysis. Nach Fall 1) 2083 lassen sich stets mittelst P_b und P'_b, in der Centrale zwei Punkte bestimmen, welche die gesuchte Kreislinie durchlaufen muß. Da nun hiezu ein nach 362 ⊥ PP′ mitgegebener Ort von μ benutzt wurde, so läßt sich vermuthen, daß eine gleiche Bestimmung dieser festen Punkte in der Lage des auf den gegebenen Ort L aus P gefällten ⊥ möglich sein wird. Dies bestätigt sich ganz auf demselben Wege wie in der Fall 1) 2083 gemachten Analysis; man hat also ⊙ aus P, P′, K nach 577 zu verzeichnen.

Auflösung. Fälle aus P einen ⊥ PR auf L, beschreibe um P mit b einen ⊙, zeichne ferner um einen beliebigen Punkt O in L mit der Berührungslinie ON einen ⊙, und konstruire eine dritte K berührende Kreislinie, welche die in der Lage des ⊥ PR gebildeten 2 Durchschnittspunkte T und U durchläuft (577), so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Ergiebt sich ähnlich wie am Schluß des Beweises zu Fall 1) 2083.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis und Auflösung ergiebt sich,

daß sämmtliche Kreislinien, welche einen festliegenden ⊙ ⊥ schneiden, und mit ihren Mittelpunkten in dieselbe gerade Linie fallen, 2 bestimmbare Punkte durchlaufen müssen, weshalb die Bedingungen P_b und L_μ einer Kreis-Aufgabe stets auf die einfacheren P und P′ zurückgeführt werden können.

2089. Fig. 404. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, K_d, K″.

Analysis. Nach 2085 lassen sich stets durch K_d und K'_d in der Centrale zwei Punkte bestimmen, welche die gesuchte Kreislinie durchlaufen muß. Da nun hiezu ein nach 367 $\perp$ MM' mitgegebener Ort von μ benutzt wurde, so läßt sich vermuthen, daß eine gleiche Bestimmung dieser festen Punkte in der Lage des auf den gegebenen Ort L aus M gefällten $\perp$ möglich sein wird. Dies bestätigt sich ganz auf demselben Wege wie in der Analysis von 2085; man hat also $\odot$ aus P, P', K nach 577 zu verzeichnen.

Auflösung. Fälle aus M einen $\perp$ MD auf L, errichte ME $\perp$ auf einen durch M gelegten Durchmesser HI, beschreibe um E mit EH einen $\odot$, und konstruire eine zweite K'' berührende Kreislinie, welche die in der Lage des $\perp$ MD gebildeten 2 Durchschnittspunkte A und C durchläuft (577), so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Ergiebt sich ähnlich wie am Schluß des Beweises von 2085.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis und Auflösung ergiebt sich,

daß sämmtliche Kreislinien, welche einen festliegenden Kreis halbiren, und mit ihren Mittelpunkten in dieselbe gerade Linie fallen, 2 bestimmbare Punkte durchlaufen müssen, weshalb die Bedingungen L_μ und K_d einer Kreis-Aufgabe stets auf die einfacheren P und P' zurückgeführt werden können.

2090. Aufgabe. $\odot$ aus K, K', und der in den Berührungspunkten endigenden Sehne s.

1) Gleichartige Berühr.

Analysis. Fig. 401. und Fig. 401. a. Nach 2080 ist AD : AB' = AB : AC, und außerdem A gegeben, es läßt sich also, da AB' — AB = s ist, AB nach 459 bestimmen, u. s. w.

2) Ungleichartige Berühr.

Analysis. Fig. 401. b. Nach 2080 ist AD : AB'

$= AB : AC$, und außerdem A gegeben, es läßt sich also, da $AB + AB' = s$ ist, AB nach 457 bestimmen u. s. w.

2090. a. Aufgabe. ⊙ aus K_s, K'_s, K''_s.

Analysis. Durch s ist nach 316 in jedem der 3 ⊙⊙ eine konzentrische Kreislinie bestimmt. Da nun μ wegen der gleichen Sehnen von diesen 3 Kreislinien gleich weit absteht, so reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus K, K', K'', siehe 2082.

2091. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K_s. (359.)

Analysis. Nach Anmerk. 1) 2083 reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', K_s, siehe 1218.

2092. Aufgabe. ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, K''_s.

Analysis. Nach Anmerk. 2085 reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', K_s, siehe 1218.

2093. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, K'_s.

Analysis. Nach Anmerk. 2087 reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', K_s, siehe 1218.

2094. Aufgabe. ⊙ aus P_b, L_μ, K_s.

Analysis. Nach Anmerk. 2088 reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', K_s, siehe 1218.

2095. Aufgabe. ⊙ aus K_d, L_μ, K'_s.

Analysis. Nach Anmerk. 2089 reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P', K_s, siehe 1218.

2095. a. Fig. 407. Aufgabe. ⊙ aus P, K_s, K'_s.

Analysis. In K und K' ergeben sich nach 316 durch s zwei konzentrische von μ gleich weit entfernte Kreislinien. Es wird sich also um μ ein dieselben berührender ⊙ zeichnen lassen. Zieht man an diesen aus P eine Berührungslinie PQ, so bestimmt sich dieselbe $= \frac{s}{2}$, da sich die Sehne $PN = s$ begrenzt, folglich hat man einen ⊙ zu konstruiren, welcher das Ende Q dieser gegebenen Tangente PQ, und die beiden um M und M' gezeichneten Kreislinien berührt, oder die Aufgabe ⊙ aus P_b, K, K' zu lösen, welches 2084 geschehen ist.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, daß aus den Bedingungen K, und P stets zwei andere: P_b und K, abgeleitet werden können.

2096. Fig. 406. Aufgabe. ⊙ aus P, P′, K_b. (360)

Analysis. Durch P und P′ ist nach 72 ein Ort für μ gegeben. Fällt man aus M auf denselben einen ⊥ MG, zieht durch M eine ∓ ME zu b, und beschreibt um μ eine dieselbe berührende konzentrische Kreislinie, so werden von der letzteren in der Lage des ⊥ MG zwei Punkte I und H durchschnitten, die nach 2088, da ME = b ist, gegeben sind. Konstruirt man jetzt um H, also um einen dieser Punkte, einen die gesuchte Kreislinie berührenden ⊙, so bestimmt sich dessen Radius HF = B′E = BM = r, folglich ist derselbe bekannt, und es reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus P, P′, K, siehe 577. Soll b nicht die Centrale schneiden, so erhält man gleichfalls ⊙ aus P, P′, K, aber die Ber. v. J. zu lösen.

Auflösung. Errichte in der Mitte D von PP′ einen ⊥ DG, ziehe durch M eine auf demselben ⊥ stehende Linie MG, lege an einen beliebigen Punkt von K die Berührungslinie QO = b, zeichne ∠ QON = R, beschreibe um N mit NO einen ⊙, schneide NH = NO + r ab, und konstruire nach 577 eine P,P′ durchlaufende Kreislinie, welche den zum Radius HS gehörenden ⊙ um H berührt, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Beschreibt man um N mit NH, und um μ mit μH Kreislinien, so werden beide dieselben Punkte H und I durchlaufen, also die Quadrate der Berührungslinien ME und MR = MH × MI, folglich ME = MR, bestimmen. Hieraus ergiebt sich ME = b, da nach der Auflösung OR = SH = r = MQ ist, also MR = QO = b sein muß. Da sich nun aber auch der ∓ EB′ gezogene Radius MB = r = FH = EB′ nach der Konstruktion findet, so zeigt sich schließlich, daß wirklich BB′ = ME = b ist, während die

Kreislinie um μ, nach der Zeichnung selbst, die Punkte P und P^1 durchschneidet.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt: bei jeder Kreis-Aufgabe läßt sich aus L_μ und K_b stets eine Kreislinie K bestimmen, welche von dem gesuchten ⊙ v. A. oder v. J., je nachdem b die Centrale schneiden oder nicht schneiden soll, berührt wird.

2097. Aufgabe. ⊙ aus P, K, K'_b, von A. oder von J. (360)

Analysis. Zieht man durch M' eine ∓ zu b, und beschreibt um μ einen dieselbe berührenden ⊙, so erhält man zwei Berührungskreise um M und P mit den Radien $r \pm r'$ und r', und die Länge der von M' auslaufenden Berührungslinie = b. Es reduzirt sich also die Aufgabe auf ⊙ aus P_b, K, K', siehe 2084.

2098. Aufgabe. ⊙ aus K, K', K''_b. (360.) 1) Gleichartige Berührung. 2) Ungleichartige Berührung.

Analysis. Verfährt man wie in 2097, so ergeben sich 2 Berührungskreise um M und M', und die Länge der von M'' auslaufenden Berührungslinie = b, weshalb sich die Aufgabe auf ⊙ aus P_b, K, K', siehe 2084, reduzirt.

2099. Aufgabe. ⊙ aus P, P'_b, $K_{b'}$. (359 und 360.)

Analysis. P und P'_b bestimmen mittelst des Gelenksatzes einen zweiten Punkt der gesuchten Kreislinie; man erhält also 2096: ⊙ aus P, P', K_b, zu konstruiren.

2100. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, $K_{b''}$. (359 und 360.)

Analysis. Nach 2083 ergeben sich durch P_b und $P'_{b'}$ zwei feste Punkte, welche die gesuchte Kreislinie durchlaufen muß; man erhält also ⊙ aus P, P', K_b (2096) zu verzeichnen.

2101. Aufgabe. ⊙ aus P, K_d, K'_b. (360.)

Analyſis. P und K_d beſtimmen mittelſt des Sehnenſatzes einen zweiten Punkt der geſuchten Kreislinie in der Verlängerung von PM; man erhält alſo 2096: ⊙ aus P, P', K_b, zu konſtruiren.

2102. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K'_d, K''_b. (360.)

Analyſis. Nach 2085 ergeben ſich durch K_d und K'_d zwei feſte Punkte, welche die geſuchte Kreislinie durchlaufen muß; man erhält alſo ⊙ aus P, P', K_b (2096) zu verzeichnen.

2103. Aufgabe. P, L_μ, K_b. (360).

Analyſis. Führt durch 315 zu ⊙ aus P, P', K_b, ſiehe 2096.

2104. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K, K'_b. (359 und 360.)

Analyſis. Das Datum in 2083 ergiebt durch P_b und K einen zweiten Berührungskreis; man erhält alſo ⊙ aus K, K', K''_b (2098) zu verzeichnen.

2105. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, K'_b. (359 u. 360).

Analyſis. Nach 2087 ergeben ſich durch P_b und K_d zwei feſte Punkte, welche die geſuchte Kreislinie durchlaufen muß; man erhält alſo ⊙ aus P, P', K_b (2096) zu verzeichnen.

2106. Aufgabe. ⊙ aus P_b, L_μ, K_b. (359. u. 360).

Analyſis. Nach 2088 ergeben ſich durch P_b und L_μ zwei feſte Punkte, welche die geſuchte Kreislinie durchlaufen muß; man erhält alſo ⊙ aus P, P', K_b (2096) zu verzeichnen.

2107. Fig. 402. a. Aufgabe. ⊙ aus K, K'_d, K''_b. (360).

Analyſis. Nach Anmerk. 2) von 2082 ergiebt ſich ſtets K_d durch K und K', daher iſt zu vermuthen, daß ein zweiter Berührungskreis aus K und K'_d abgeleitet werden kann. Sei die Kreislinie um P in N und T halbirt, alſo als K' gegeben, und K in B von dem halbirenden ⊙ berührt. Da $PB \times PB'' = PN^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$ beſtimmt iſt, P feſtliegt,

und B sich in einer bekannten Kreislinie K befindet, so läßt sich nach 592 ein Kreisort für B'' bestimmen, dessen Mittelpunkt M'' in die Lage von PM fallen wird. Die 592 angegebene Zeichnung dieses Orts bedingt aber PM : PM'' = MU : M''B'', also ist MU ≠ M''B'', folglich ∠ M''B''P = ∠ PUM = ∠ UBM = ∠ B''Bμ, und es berührt deshalb der ⊙ um M'' den ⊙ um μ. Da nun jener ⊙ um M'', wie oben bemerkt wurde, konstruirbar ist, so reduzirt sich die Aufgabe auf ⊙ aus K, K', K''$_b$, siehe 2098.

Auflösung. Bestimme nach 592 für das Quadrat von $\frac{d}{2}$, und für P und K den Punkt M'' nebst dem zugehörigen ⊙, und löse nach 2098 für diesen ⊙ und K die Aufgabe ⊙ aus K, K', K''$_b$, so wird sich die gesuchte Kreislinie ergeben.

Beweis. Da nach der Auflösung die gemeinschaftliche Berührungslinie des gesuchten ⊙ um μ und des einen gegebenen ⊙ = b, ist, und K von jener Kreislinie in B berührt wird, so ist nur darzuthun, daß sich die Halbirung der Kreislinie um P ergeben hat. Wegen der Berührung bei B und B'' ergiebt sich MB ≠ M''D, also auch BG ≠ DE. Da nun außerdem PM : PM'' = MB : M''D nach der Konstruktion des Orts sein muß, so geht BB'' durch P, und es ist

PD : PB = PE : PG, also auch

PD×PB'' : PB×PB'' = PE×PF : PG×PF. Nun findet sich aber PD × PB'' = PE×PF, also muß PG×PF, oder nach der Konstruktion des Orts $\left(\frac{d}{2}\right)^2$ = PB×PB'' = PN^2 (PN ⊥ Pμ) sein, weshalb die Kreislinie um μ die Endpunkte eines d gleichen Durchmessers NT schneidet, also die Kreislinie um P wirklich halbirt.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich in Verbindung mit Anmerkung 2) 2082 das

Datum: Wenn ein unbestimmter ⊙ entweder 2 aus einander liegende Kreislinien K und

K′ ungleichartig, oder zwei ineinanderliegende Kreislinien K und K′ gleichartig berührt, so läßt sich die Lage einer von demselben halbirten Kreislinie K''_d ableiten, und wenn ein unbestimmter ⊙ einen ⊙ K berührt, und einen andern ⊙ K''_d halbirt, so ist ein zweiter Berührungskreis K′ mitgegeben. Durch 2 von den 3 Stücken K, K′ und K''_d ist also stets das dritte bei einer Kreis-Aufgabe bestimmt.

2108. Aufgabe. ⊙ aus K, L_μ, K'_b. (360.)

Analysis. Durch L_μ und K'_b ergiebt sich K nach 2096; man hat also ⊙ aus K, K′, L_μ (1881) zu verzeichnen.

2109. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, K_d, K'_b. (360.)

Analysis. Durch L_μ und K_d ergeben sich nach 2089 zwei Punkte P und P′, welche die gesuchte Kreislinie durchlaufen muß; man hat also ⊙ aus P, P′, K_b, siehe 2096, zu verzeichnen.

2110. Fig. 408. **Aufgabe.** ⊙ aus P, K_b, $K'_{b'}$. (360.)

Analysis. Legt man durch M′ eine ∓ zu b′, und beschreibt eine dieselbe berührende Kreislinie um μ, so ergiebt sich ein Berührungskreis um P mit dem Radius r′, und die Länge der Berührungslinie M′H = b′. Verlängert man darauf μE bis G, zieht durch G eine ∓ zu b, und zeichnet um M einen dieselbe berührenden ⊙, so bestimmt sich GF = b, und der Radius MF = r ∓ r′, jenachdem b die Centrale schneidet oder nicht. Hiemit ist die Aufgabe auf ⊙ aus P_b, K, $K'_{b'}$ (2104) reduzirt.

2111. Aufgabe. ⊙ aus K, K'_b, $K''_{b'}$. (360.)

Analysis. Verfährt man wie in 2110, so bestimmt sich ein Berührungskreis um M dessen Radius r ± r″ ist, eine von M″ auslaufende Berührungslinie = b′, ein ⊙ um M′ mit dem Halbmesser r′ ± r″, und eine zu diesem und dem

gesuchten Hilfs-⊙ gehörende Berührungslinie = b. Die Aufgabe reduzirt sich also auf ⊙ aus P_b, K, K'_b, siehe 2104.

Anmerkung. Nach 2183 läßt sich auch die Aufgabe geradezu auf ⊙ aus K, K', K'' (2082) reduziren.

2112. Aufgabe. ⊙ aus L_μ, K_b, K'_b. (360.)

Analysis. Durch L_μ und K_b, und durch L_μ und K'_b, sind nach 2096 zwei ⊙⊙ bestimmbar, welche der gesuchte berühren muß. Es reduzirt sich also die Aufgabe auf ⊙ aus L_μ, K, K', siehe 1881.

2113. Fig. 409. Aufgabe. Es soll eine Kreislinie gezeichnet werden, die mit 4 festliegend gegebenen Kreislinien K, K', K'', K''' gleiche (krummlinige) ∠ bildet.

Analysis. Zieht man in den Schneidungspunkten E und F Berührungslinien an den gesuchten und die gegebenen ⊙⊙, so bestimmt sich nach den Bedingungen der Aufgabe ∠ QEN = ∠ TFS u. s. w., also auch ∠ μEM = ∠ μFM' als Supplemente = ∠, und ∠ μEI = ∠ μFI. Nun ist ∠ μEF = ∠ μFE, folglich muß ∠ IEF, oder ∠ DEM = ∠ IFE = ∠ HFM' = ∠ FHM', also ME ∦ M'H sein, weshalb mittelst der Proportion GM : GM' = ME : M'H Punkt G gegeben ist. Außerdem ergiebt sich EW ∦ HU, also auch

GW : GU = GE : GH, und

GW×GV : GU×GV = GE×GF : GH×GF.

Da nun GU×GV = GH×GF ist, so muß auch GE×GF = GW×GV sein, weshalb das Quadrat der Berührungslinie GB, oder GB^2 = GW×GV bestimmt werden kann; folglich Punkt G nebst der Berührungslinie GB oder b gegeben ist. In derselben Art läßt sich durch Benutzung von K' und K'' ein zweiter Punkt G' mit einer zweiten von demselben auslaufenden Berührungslinie b', und endlich durch Benutzung von K'' und K''' ein dritter Punkt G'' mit einer dritten von demselben auslaufenden Berührungslinie b'' bestimmen; man hat also nur einen ⊙ zu konstru

ren, welcher die Enden dieser 8, von drei gegebenen Punkten G, G′, G″ auslaufenden Tangenten b, b′, b″ berührt, oder die Aufgabe: ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, $P''_{b''}$ zu lösen, welches 1579 geschehen ist.

Auflösung. Lege durch M, M′ u. s. w. ⊥ Radien ME, M′H u. s. w., und verlängere die Verbindungslinien jedes Paars aufeinanderfolgender Durchschnittspunkte, z. B. von E und H bis zur Lage der zugehörigen Centrale, so bestimmen sich die Punkte G, G′, G″. Bestimmt man ferner drei mittlere Proportionalen b, b′, b″, erstens zwischen GW und GV, zweitens zwischen G′W′ und GV′ u. s. w., und beschreibt nach 1579 Anmerkung 1) vergestalt einen ⊙, daß sich die Längen der aus G, G′, G″ nach demselben führenden Berührungslinien = b, b′, b″ ergeben, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Verbindet man einen Durchschnittspunkt des gezeichneten ⊙ mit einem der gegebenen ⊙⊙, z. B. E mit M, und legt M′H ⊥ ME, so fällt EW. ⊥ HU, und es wird nach der Auflösung die Verlängerung von EH in G treffen, weshalb sich durch gleiche Schlüsse wie in der Analysis GW × GV = GE × GF (F liegt in K′) ergeben muß. Nun ist aber auch GB^2 = GW × GV bestimmt, folglich muß GB^2 = GE × GF sein, also F zugleich in K′ und in der Peripherie um μ liegen. Verlängert man jetzt M′F und ME, so erhält man ferner, da ∠ IFE = ∠ IEF (ME ⊥ M′H), und ∠ μFE = ∠ μEF ist, ∠ μFI = ∠ μEI, also auch ∠ μFM′ = ∠ μEM. Hieraus folgt nun, daß, als Supplemente = ∠, auch die von den Tangenten bei E und F eingeschlossenen ∠ SFT und QEN dieselbe Größe haben müssen. Für jedes folgende Paar ∠, deren Scheitel in die Schneidungspunkte des gesuchten ⊙ mit den gegebenen Kreislinien fallen, z. B. in F und O, ergiebt sich aber dasselbe auf gleichem Wege, folglich erfüllt die Auflösung alle Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung 1.) Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich,

daß man durch 2 von einer dritten Kreislinie unter demselben (krummlinigen) ∠ geschnittenen Kreislinien stets einen festen Punkt P, und die Länge einer von demselben nach der dritten Kreislinie führende Berührungslinie b, also P_b ableiten kann.

Anmerkung 2) Unter welchen Umständen ein nach der Auflösung um μ gezeichneter ⊙ keine der gegebenen Kreislinien schneiden wird, und ferner, daß eine Schneidung statt finden muß, wenn jene Umstände nicht vorhanden sind, was bei dem gegebenen Beweise wie bei allen Beweisen dieser Art vorausgesetzt werden muß, ist ein Gegenstand der Determination. (U. d. A. §. 24 und 33.)

2114. Fig. 410. Aufgabe. Es sind 4 festliegende Kreislinien K, K′, K″, K‴ gegeben, man soll dieselben durch eine 5te Kreislinie so schneiden, daß jeder von den 4 gebildeten (krummlinigen) ∢ sich als Supplement des folgenden ergiebt. (Analogie zu 2113.)

Analysis. Zieht man in den Schneidungspunkten E und F an die gegebenen Kreislinien und an den gesuchten ⊙ Berührungslinien, so bestimmt sich nach den Bedingungen der Aufgabe ∠ QEN + ∠ TFS = 2R u. s. w., also auch ∠ μEM + ∠ μFI = 2R (als Supplemente), und deshalb ∠ μEI = ∠ μFI. Nun ist ∠ μEF = ∠ μFE, folglich muß ∠ IEF oder ∠ DEM = ∠ IFE = ∠ FHM′, also ME ∦ M′H sein, woher mittelst der Proportion GM : GM′ = ME : M′H Punkt G gegeben ist. Außerdem ergiebt sich EW ∦ HU, also

GW : GU = GE : GH, und

GW×GV : GU×GV = GE×GF : GH×GF.

Da nun GU×GV = GH×GF ist, so muß auch GE×GF = GW×GV sein, weshalb das Qua-

drat der Hälfte einer durch G ⊥ G_μ gezogenen Sehne BB', oder $GB^2 = GW \times GV$ bestimmt werden kann, folglich Punkt G und der Durchmesser d einer von der Peripherie des gesuchten ⊙ halbirten Kreislinie gegeben ist. In derselben Art läßt sich durch Benutzung von K' und K'' ein zweiter Mittelpunkt G' mit einem zu demselben gehörenden Durchmesser d', und endlich durch Benutzung von K'' und K''' ein dritter Mittelpunkt G'' mit einem zugehörigen Durchmesser d'' bestimmen; man hat also nur einen ⊙ zu konstruiren, welcher die drei gegebenen Kreislinien um G, G', G'' halbirt, oder die Aufgabe ⊙ aus K_d, $K'_{d'}$, $K''_{d''}$ zu lösen, welches 1580 (Anmerkung) geschehen ist.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis ergiebt sich,

daß man durch 2 Kreislinien, welche mit einer 3ten 2 sich zu 2R ergänzende ∠ bilden, stets die Lage einer von der letzteren halbirten Kreislinie, oder K_d ableiten kann.

2115. Aufgabe. Es sind 4 festliegende Kreislinien K, K', K'', K''' gegeben; man soll dieselben durch eine 5te Kreislinie so schneiden, daß 3 von den entstehenden (krummlinigen) ∠ gleich werden, und der 4te das Supplement zu jedem der übrigen ∠ bildet.

Analysis. 1) Angenommen der Scheitel des Supplement ∠ soll in K''' fallen, so erhält man durch K und K' nach 2113 P_b, durch K' und K'' in derselben Art $P'_{b'}$, durch K'' und K''' aber nach 2114 K_d. Es reduzirt sich also die Aufgabe auf ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K_d, siehe 1577 (Anmerkung).

Analysis. 2) Angenommen der Scheitel des Supplement ∠ soll in K''' fallen, so erhält man durch K'' und K''' nach 2114 K_d, durch K''' und K in derselben Art $K'_{d'}$, durch K und K' aber nach 2113 P_b. Es reduzirt sich also die Aufgabe auf ⊙ aus P_b, K_d, $K'_{d'}$, siehe 1578.

2116. Aufgabe. Es soll ein ⊙ gezeichnet werden, welcher 3 festliegende Kreislinien K, K′, K″ unter demselben (krummlinigen) ∠ α schneidet.

Analysis. Durch K und K′ erhält man nach 2113 P_b, und durch K′ und K″ in derselben Art $P'_{b'}$; man hat also einen ⊙ so zu konstruiren, daß sich der mit K″ gebildete (krummlinige) ∠ = α, und die von P und P′ nach demselben führenden Berührungslinien = b und b′ ergeben. Die Bedingung α giebt aber nach 358. 4) stets einen ⊙ K‴ und die Länge b‴ einer diesem und dem gesuchten ⊙ gemeinschaftlich zugehörenden Berührungslinie, also hat man die Aufgabe ⊙ aus P_b, $P_{b'}$, $K_{b''}$ zu lösen, welches 2100 geschehen ist.

Anmerkung. Von der vorstehenden Aufgabe ist der erste Theil von der Analysis 1) der 2082 angeführten Aufgabe ⊙ aus K, K′, K″, welcher eine gleichartige Berührung verlangt, ein einzelner Fall, da bei der letzteren Aufgabe, sobald die Berührung von Außen statt findet ∠ α = 0, bei der Berührung von Innen aber α = 2R gegeben ist. Die aus der Analysis 1) von 2082, und aus der vorher beendigten Analysis gefolgerten Auflösungen stimmen auch vollständig überein, da man dort gleichfals einen ⊙ so zu konstruiren hat, daß ein gegebener ⊙ unter einem bestimmten ∠, nämlich 0 oder 2R, getroffen (d. h. berührt) wird, und die an denselben von zwei gegebenen Punkten führenden Berührungslinien bestimmte Längen erhalten. Selbst die hier gegebene Reduktion auf ⊙ aus P_b, $P_{b'}$, $K_{b''}$ ist in der Auflösung von 2082 enthalten, da bei ∠ α = 0 der gegebene berührte ⊙ und der abgeleitete K‴ zusammenfallen, b″ aber = 0 wird, folglich ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, $K_{(b''=0)}$ zu konstruiren ist. (Vergleiche 2184.)

2117. Aufgabe. Es sind 3 festliegende Kreislinien K, K′, K″ gegeben; man soll dieselben durch eine 4te Kreislinie so schneiden, daß zwei von den entstehenden (krummlinigen) ∠ = α, der

dritte aber das Supplement $2R - \alpha$ zu jedem der übrigen $\measuredangle$ bildet.

Analysis. Ist der mit K' gebildete $\measuredangle = 2R - \alpha$ bestimmt, so erhält man durch K und K' nach 2114 K'''_d, und durch K' und K'' in derselben Art $K^{IV}{}_{d'}$; man hat also einen $\odot$ so zu konstruiren, daß sich der mit K gebildete $\measuredangle = \alpha$ ergiebt, und die erhaltenen $\odot\odot$ K''' und K^{IV} halbirt werden. Die Bedingung α giebt aber nach 358. 4) stets einen $\odot$ K^V und die Länge b einer diesem und dem gesuchten $\odot$ gemeinschaftlich angehörenden Berührungslinie, also hat man die Aufgabe $\odot$ aus K_d, $K'_{d'}$, K''_b zu lösen, welches 2102 geschehen ist.

Anmerkung. Von der vorstehenden Aufgabe ist der zweite Fall von der Analysis 1) der 2082 angeführten Aufgabe $\odot$ aus K, K', K'', welcher eine ungleichartige Berührung verlangt, ein einzelner Fall, da bei der letzteren Aufgabe mit den gegebenen Kreislinien die $\measuredangle\ \alpha = 0$ und $= 2R$, also ebenfalls Supplemente gebildet werden. Die aus der Analysis 1) von 2082 und aus der vorher beendigten Analysis gefolgerten Auflösungen stimmen auch vollständig überein, da man dort gleichfalls einen $\odot$ so zu konstruiren hat, daß zwei gegebene Kreislinien halbirt werden, und eine dritte unter einem bestimmten $\measuredangle$, nämlich 0 oder 2R getroffen (d. h. berührt) wird. Selbst die hier gegebene Reduktion auf $\odot$ aus K_d, $K'_{d'}$, K''_b zeigt sich nach dem Schluß der Anmerkung von 2116 in der aus der Analysis 1) von 2082 gefolgerten Auflösung enthalten.

Noch ist zu bemerken, daß man alle Kreis-Schneidungs-Aufgaben in derselben Art wie die Berührungen in gleichartige und ungleichartige Schneidungen theilen kann. Bei jenen sind die entstehenden (krummlinigen) $\measuredangle$ sämmtlich spitz oder sämmtlich stumpf, wie bei den Berührungen sämmtlich $= 0$ oder sämmtlich $= 2R$; bei den ungleichartigen Schneidungen aber sind einige $\measuredangle$ spitz andere stumpf, wie bei den ungleichartigen Berührungen einige $= 0$ andere $= 2R$. Da eine einfache Reduktion sämmtliche Kreis-Schneidungs-Aufgaben auf Kreis-

Zeichnungen mit gegebenen Tangenten und umgekehrt nach 358. 4) zurückführt, z. B. die vorstehende Aufgabe auf ⊙ aus K_b, $K'_{b'}$, $K''_{b''}$, so daß $b : b' : b'' = r : r' : r''$ (2184) so frägt sichs: welche Gestalt jene Eintheilung bei diesen Aufgaben annimmt? Die nähere Untersuchung zeigt hiefür, daß aus den gleichartigen Schneidungen gleichartig liegende Tangenten (alle die Centrale schneidend oder alle nicht schneidend), aus den ungleichartigen Schneidungen aber ungleichartig liegende Tangenten (einige die Centrale schneidend andere nicht dieselbe schneidend) hervorgehen.

2118. Aufgabe. ⊙ aus P, K^x, K'^x, K''^x, oder: gegeben P, K, K', K''; man soll eine P durchlaufende Kreislinie zeichnen, welche mit K, K', K'' gleiche (krummlinige) ∠ bildet.

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu ⊙ aus P'', P_b, $P'_{b'}$, siehe 1568.

2119. Aufgabe. ⊙ aus L, K^x, K'^x, K''^x. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1898. a.

2120. Aufgabe. ⊙ aus K, K'^x, K''^x, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 2083.

2121. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K^x, K'^x, K''^x (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1579.

2122. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K^x, K'^x, K''^x. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1577.

2123. Aufgabe. ⊙ aus K_e, K'^x, K''^x, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerkung 2113 zu 2091.

2124. Aufgabe. ⊙ aus K_b, K'^x, K''^x, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 2100.

2125. Aufgabe. ⊙ aus P, P′, K^{x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1567.

2126. Aufgabe. ⊙ aus P, L, K^{x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1221.

2127. Aufgabe. ⊙ aus P, K, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1222.

2128. Aufgabe. ⊙ aus P, K_a, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1230.

2129. Aufgabe. ⊙ aus P, P'_b, K^{x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1568.

2130. Aufgabe. ⊙ aus P, K_d, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1572. a.

2131. Aufgabe. ⊙ aus P, K_b, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 2099.

2132. Aufgabe. ⊙ aus L, L′, K^{x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1895.

2133. Aufgabe. ⊙ aus L, K, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 1898.

2134. Aufgabe. ⊙ aus P_b, L, K^{x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1898. a.

2135. Aufgabe. ⊙ aus L, K_d, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1904.

2136. Aufgabe. ⊙ aus L, K_b, K^{xx}, K'^{xx}. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1911.

2137. Aufgabe. ⊙ aus K, K′, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2084.

2138. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2083.

2139. Aufgabe. ⊙ aus K, K′$_d$, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118).

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2087.

2140. Aufgabe. ⊙ aus K, K′$_b$, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2104.

2141. Aufgabe. ⊙ aus P_b, P'_b, Kˣ, Kˣ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch 2113 zu 1579.

2142. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1577.

2143. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_a, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2091.

2144. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_b, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118).

Analysis. Führt nach Anmerk. 2113 zu 2100.

2145. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K′$_d$, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 1578.

2146. Aufgabe. ⊙ aus K_a, K′$_b$, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2093.

2147. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K′$_b$, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analysis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2105.

2148. Aufgabe. ⊙ aus K_b, K′$_b$, K″ₓ, K‴ₓ. (Bezeichnung siehe 2118.)

Analyſis. Führt durch Anmerk. 2113 zu 2182.

2149. Aufgabe. ⊙ aus K_s, K'_s, K''^{x}, K'''^{x}. (Bezeichnung ſiehe 2118.)

Analyſis. Fig. 407. Sei GB die mittelſt K''^{x} und K'''^{x} nach 2113 von einem beſtimmbaren Punkte G auslaufende Berührungslinie. In K und K′ ſind nach 316 zwei durch s beſtimmte ⊙⊙ um M und M′ gegeben, welche beide von einem ⊙ um μ berührt werden müſſen, da die gegebenen Sehnen gleich weit von μ entfernt ſind. Zieht man an dieſen Berührungskreis aus G die Berührungslinie GB′, und verlängert dieſelbe bis E, ſo ergiebt ſich DE = s, und $GB'^2 = G\mu^2 - \mu B'^2$, oder

$$GB'^2 = b^2 + B\mu^2 - \left(D\mu^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2\right), \text{ d. h.}$$

$$GB'^2 = b^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Es iſt demnach GB′ gegeben, und die Aufgabe reduzirt ſich dadurch auf ⊙ aus P_b, K, K′, ſiehe 2084.

Anmerkung. Aus der vorſtehenden Analyſis folgt, daß bei jeder Kreis-Aufgabe K_s und P_b auf K und P_b zurückgeführt werden können.

2150. Aufgabe. ⊙ aus P, $K^{2R-\varkappa}$, $K'^{\varkappa}$, $K''^{\varkappa}$, d. h. es ſind 3 Kreislinien K, K′, K″ und ein Punkt P gegeben; man ſoll eine P durchlaufende 4te Kreislinie zeichnen, welche mit K′ und K″ gleiche $\measuredangle$, und mit K das Supplement zu jedem dieſer $\measuredangle$ bildet.

Analyſis. Nach Anmerkung 2114 ergiebt ſich durch K und K′, K_d, und in derſelben Art durch K und K″ $K'_{d'}$; man erhält alſo ⊙ aus P, K_d, $K'_{d'}$ zu konſtruiren, ſiehe 1572.

2151. Aufgabe. ⊙ aus L, $K^{2R-\varkappa}$, $K'^{\varkappa}$, $K''^{\varkappa}$. (Bezeichnung ſiehe 2150.)

Analyſis. Führt durch Anmerk. 2114 zu 1903.

2152. Aufgabe. ⊙ aus K, K'^{2R-x}, K'^{1x}, K'^{11x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2085.

2153. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K^{2R-x}, K^{1x}, K'^{11x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1578.

2154. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K'^{2R-x}, K'^{1x}, K'^{11x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1580.

2155. Aufgabe. ⊙ aus K_a, K'^{2R-x}, K'^{1x}, K'^{11x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2092.

2156. Aufgabe. ⊙ aus K_b, K'^{2R-x}, K'^{1x}, K'^{11x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2102.

2157. Aufgabe. ⊙ aus P, P', K^{2R-x}, K^{1x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1571.

2158. Aufgabe. ⊙ aus P, L, K^{2R-x}, K^{1x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1210.

2159. Aufgabe. ⊙ aus P, K, K'^{2R-x}, K'^{1x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1212.

2160. Aufgabe. ⊙ aus P, K_c, K'^{2R-x}, K'^{1x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1229.

2161. Aufgabe. ⊙ aus P, P'_b, K^{2R-x}, K^{1x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1572. a.

2162. Aufgabe. ⊙ aus P, K_d, K^{2R-x}, K'_x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1572.

2163. Aufgabe. ⊙ aus P, K_b, K^{2R-x}, K^{1x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2101.

2164. Aufgabe. ⊙ aus L, L′, K^{2R-x}, K^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1899.

2165. Aufgabe. ⊙ aus L, K, K'^{2R-x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1902.

2166. Aufgabe. ⊙ aus P_b, L, K^{2R-x}, K^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1904.

2167. Aufgabe. ⊙ aus L, K_d, K'^{2R-x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1903.

2168. Aufgabe. ⊙ aus L, K_b, K'^{2R-x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1909.

2169. Aufgabe. ⊙ aus K, K′, K''^{2R-x}, K''^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2086.

2170. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K, K'^{2R-x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2087.

2171. Aufgabe. ⊙ aus K, K'_d, K''^{2R-x}, K''^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2085.

2172. Aufgabe. ⊙ aus K, K'_b, K''^{2R-x}, K''^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2107.

2173. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, K^{2R-x}, K^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1577.

2174. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_d, K'^{2R-x}, K'^{x}. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1578.

2175. Aufgabe. ⊙ aus P_b, K_a, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2093.

2176. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $K_{b'}$, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2105.

2177. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K'''_d, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 1580.

2178. Aufgabe. ⊙ aus K_d, K'_a, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2092.

2179. Aufgabe. ⊙ aus K_a, K'_b, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2102.

2180. Aufgabe. ⊙ aus K_b, $K'_{b'}$, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.)

Analysis. Führt nach Anmerk. 2114 zu 2183.

2181. Fig. 411. Aufgabe. ⊙ aus K, K'_s, K''^{2R-x}, K'''^x. (Bezeichnung siehe 2150.) (Analogie zu 2149.)

Analysis. Um M und M' sind nach 316 zwei durch s bestimmte ⊙⊙ gegeben, welche von μ gleich weit entfernt sein müssen, und deshalb eine um diesen Punkt gezogene Kreislinie berühren. Legt man an diese ∓ dem abgeschnittenen Durchmesser BH des halbirten Kreises, welcher sich aus K''^{2R-x} und K'''^x nach 2114 bestimmt, eine Berührungslinie ED, so ergiebt sich dieselbe = s, woher

$B'G^2 = B'\mu^2 - \mu G^2$, oder

$B'G^2 = F\mu^2 - (\mu B^2 - r^2)$, d. h.

$B'G^2 = \mu E^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \mu B^2 + r^2$, also

$B'G^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$ sein muß.

Es ist demnach GB' und die zugehörende von der Kreislinie

um μ halbirte Kreislinie um G gegeben, so daß sich die Aufgabe auf ⊙ aus K_b, K'_b, K''_d, siehe 2086, reduzirt.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt, daß bei jeder Kreis-Aufgabe K_b und K'_d auf K und K'_d zurückgeführt werden können.

2182. Aufgabe. ⊙ aus P_b, $K_{b'}$, $K'_{b''}$, oder nach 359 und 360: es sind drei Kreise K, K', K'' gegeben; man soll einen vierten zeichnen, welcher K ⊥, K' unter dem ∠ α, und K'' unter dem ∠ β schneidet.

Analysis. Fig. 412. P_b und $K_{b'}$ sind Bedingungen, welche nach 359 und 360 eine ⊥ und eine schiefe ∠ Schneidung zweier Kreislinien K und K' um P und M verlangen. P_b und $P'_{b'}$ bestimmen nach 2083 in PP' zwei feste Punkte, die alle ⊥ schneidende Kreislinien durchlaufen müssen. Daher ist zu vermuthen, daß $K_{b'}$ und $K'_{b''}$, oder die einfacheren Bedingungen P_b und $K_{b'}$, entweder einen Punkt und einen Berührungskreis, oder 2 mit ihren Mittelpunkten in die Lage PM fallende Berührungskreise für die gesuchte Kreislinie ergeben werden. Das Letztere bestätigt sich auf dem folgenden Wege. Zieht man durch M eine ∓ zu b', und beschreibt einen dieselbe berührenden ⊙ um μ, so ergiebt sich MD = b', und es käme nun darauf an, zwei Paar konzentrische Berührungskreise (um E und um F) für die um μ gezeichneten Kreislinien mit den nachstehenden Eigenschaften zu finden:

(1) Die Mittelpunkte der konzentrischen Kreis-Paare müssen in die Verlängerung von PM fallen.

(2) P und M müssen die festen Punkte sein, welche nach 2080 erste Anmerk. 1) durch 2 ⊙⊙ gegeben sind,

(3) PB^a oder b^a, und MD^a oder b'^a die Rechtecke, für welche dieselben nach 2080 erste Anmerk. 2) die Oerter bilden.

(4) Die Entfernungen NS und ZY der konzentrischen Kreislinien endlich müssen = AD = r sein.

Wegen der verlangten Eigenschaften (1.) und (2.) werden nach 2080 erste Anmerk. 1) die gemeinschaftlichen Tangenten

RH und QI die festen Punkte P und M treffen. Hieraus folgt, um (4.) zu genügen, daß PR Tangente an K ist, also die Lage von PR und MQ bestimmt werden kann. Um aber (2.) und (3.) zu erfüllen, müßten endlich die Proportionen

PR : b = h : PH, und

MQ : b′ = b′ : MI, oder

GR : b′ = b′ : GH statt finden, von denen sich die erste und dritte vereinigt darstellen lassen. Beschreibt man nämlich um die Mitte O von HR mit OH einen ⊙, und zieht an denselben aus P und G die Tangenten PT und GU, so ergeben sich die Proportionen

PR : PT = PT : PH, und

GR : GU = GU : GH, aus denen Vergleichung mit den vorhergehenden Proportionen hervorgeht, daß zur Konstruktion derselben PT = b, und GU = b′ angenommen werden müßte. Geschieht dies aber, so hat man die bestimmte Aufgabe: ⊙ aus P_b, $P'_{b'}$, L_μ, d. h. hier: einen mit seinem Centrum O in die Lage PR fallenden ⊙ so zu konstruiren, daß sich die aus P und G nach demselben führenden Tangenten PT und GU = b und b′ bestimmen. Löst man also diese Aufgabe nach 1225. a., so ergeben sich die Punkte H und R, die ⊥⊥ HE und RF, und schließlich die gesuchten um E und F liegenden Berührungkreise mit den Radien EH und FR.

Wenn K und K′ ganz auseinanderfallen, wie in Fig. 412. a., oder sich dergestalt schneiden, daß beide Durchschnittspunkte auf verschiedene Seiten der aus P an K gezogenen Tangente zu liegen kommen, so gelangt man auf dem nachfolgenden Umwege zum Ziel.

Beschreibe um M, Fig. 412. a., mit der mittelst r und b′ bekannten Länge MK einen ⊙ K′, und verbinde E mit P, so zeigt sich, da PE × PA = b^2 sein muß, und E in einer Kreislinie liegt, nach 592 ein mit seinem Centrum M in PM fallender Ort K″ für A gegeben. Dieser Ort schneidet nach dem in 2113 angeführten Beweise den G um, μ unter dem

selben (krummlinigen) ∠ wie der ⊙ um M, also müssen die in A und E von den Tangenten gebildeten ∠ JAH und TEF, folglich auch die Neben∠ HAC und TED gleich sein, weshalb ∠ HAC — R, oder ∠ MAC dieselbe Größe mit ∠ TED — R oder ∠ MED haben muß. Nun ist aber ∠ MED gegeben, also läßt sich der aus M auf AC gefällte ⊥ ME, folglich auch die gemeinschaftliche Berührungslinie AC des gesuchten ⊙ und der festliegenden Kreislinie K'' um M bestimmen, wodurch man dieselbe Lage von P und M wie in dem ersten Theil dieser Analysis erhalten hat, und daher gleichfalls zwei Berührungskreise für die gesuchte Kreislinie feststellen kann. Nach der Konstruktion dieser Hilfskreise findet sich endlich die Aufgabe bei allen der Determination entsprechenden Lagen von K_b auf ⊙ aus K, K', K''$_b$, siehe 2098, reduzirt.

Auflösung. Fall 1) Fig. 412. Die um P und M mit b und b' beschriebenen ⊙⊙ K und K' fallen in einander, oder schneiden sich auf derselben Seite der aus P an K gezogenen Tangente PG.

Lege aus P an K eine Tangente PG, zeichne nach 1225. a. einen K und K' ⊥ schneidenden ⊙, dessen Mittelpunkt O in die Lage der Tangente fällt, und errichte auf dieselbe in den Durchschnittspunkten H und R des konstruirten ⊙ die ⊥⊥ HE und RF, so ergeben die in die Lage von PM fallenden Punkte E und F, als die Mittelpunkte zweier mit den Radien EH und FR zu konstruirenden ⊙⊙, welche den gesuchten ⊙ v. A. oder v. J. berühren, je nachdem b' die Centrale nicht schneidet oder schneidet (d. h. die mit MA um M beschriebene Kreislinie K' den ⊙ um μ spitz- oder stumpfwinklig trifft). Zeichnet man nun schließlich nach 2098 einen die letztgenannten 2 ⊙⊙ um E und F v. A. oder v. J. berührenden ⊙, der zugleich das Ende X der nach K' führenden Tangente b'' berührt, so ist die Aufgabe gelöst.

Fall 2). Fig. 412. a. Die um P und M mit b und b' beschriebenen Kreise fallen auseinander, oder schneiden sich

auf verschiedenen Seiten der aus P an K gezogenen Tangente.

Bestimme ∠ MDE = R, DE = b', beschreibe um M mit ME den ⊙ K', zeichne nach 592 den mittelst desselben für P und PB^2 oder b^2 bestimmbaren Kreisort K''' um M, mache ∠ MA'C' = ∠ MED, fälle aus M auf A'C' einen ⊥ MC', ziehe mit demselben um M eine Kreislinie K'', und konstruire nach dem ersten Fall einen b am Ende B, und die nach K'' und K' führenden Tangenten AC und b'', an den Grenzen A und X berührenden ⊙, so ist auch dieser Fall der Aufgabe gelöst.

Beweis. Fall 1). Die um P und M beschriebenen ⊙⊙ K und K' fallen ineinander, oder schneiden sich auf derselben Seite der an K durch P gezogenen Tangente.

Fig. 412. Nach der Auflösung ist die gemeinschaftliche Berührungslinie zwischen dem ⊙ um μ und K' = b'', es ist also noch darzuthun: daß auch die gemeinschaftliche Tangente CA zwischen K und jenem ⊙ um μ = b', die aus P gezogene Berührungslinie PB aber = b ist. Aus der Zeichnung geht hervor, daß die aus P und G an den ⊙ um O führenden Tangenten PT und GU = b und b' sein müssen (siehe Beweis von 1225. a.), weshalb auch PR × PH = b^2, und GR × GH oder MQ × MI = b'^2 ist. (MQ ∓ GR).

Die Verlängerung von SY trifft P, da EA' ∓ FS ist, (Berührung der ⊙⊙) und PF : PE = FS : EA' oder FR : EH gezeichnet wurde. Hieraus folgt

PR : PH = PS : PA', und

PR × PH : PH^2 = PS × PY : PA' × PY, also

auch, da PH^2 = PA' × PY ist,

PS × PY oder PB^2 = PR × PH. Nun war aber

b^2 = PR × PH erwiesen,

folglich muß PB = b sein.

Beschreibt man jetzt ⊙⊙ um E und F mit EI und FQ, so ergiebt sich r oder MG = IH = QR = NS = ZY und μN = μZ, weshalb eine mit μN um μ gezeichnete

Kreislinie die zuletztgenannten beiden ⊙⊙ berührt, von der konzentrischen Kreislinie um μ um r entfernt ist, und sich durch gleiche Schlüsse wie vorher beweisen läßt, daß $MD^2 = MQ \times MI$ sein muß. Nun war aber $MQ \times MI = b'^2$ gezeigt, folglich hat MD, und daher auch die gemeinschaftliche Berührungslinie CA (DA ist = r) die geforderte Länge b'.

Fall 2). Die um P und M beschriebenen ⊙⊙ K und K' fallen aus einander, oder schneiden sich auf verschiedenen Seiten der an K durch P gezogenen Tangente.

Fig. 412. a. Nach der Auflösung ist die gemeinschaftliche Berührungslinie zwischen K' und dem ⊙ um μ = b'', und die Tangente PB = b, es ist also nur zu beweisen, daß sich die gemeinschaftliche Berührungslinie ED zwischen dem gezeichneten ⊙ und K = b' ergeben hat.

Zieht man MQ ∓ MA, so trifft die Verlängerung von QA in P, da nach 592 PM : PR = MQ : MA ist, und ferner fällt QN ∓ AS, woraus

PQ : PA = PN : PS, also auch (E in K' angenommen)

PQ×PE : PA×PE = PN×PR : PS×PR hervorgeht. Nun ist aber PQ×PE = PN×PR, folglich hat man PA×PE = PS×PR. Außerdem ist jedoch PB^2 = PS×PR nach der Zeichnung des Orts 592, also muß auch PB^2 = PA×PE sein, und es liegt deshalb E zugleich in den Kreislinien um μ und M. Hieraus folgt, da ∠ MQP oder ∠ QEM = ∠ MAP, also auch ∠ MEA = ∠ MAE ist, daß ∠ MEμ = ∠ MAμ, weshalb nach Subtraktion der rechten ≦ DEμ und CAμ (DE ist ⊥ Eμ errichtet) ∠ MED = ∠ MAC bleibt, demnach MD = r, und ED = b' sein muß, da ∠ MAC (= ∠ MA'C') und ME durch ein △ bestimmt wurden, dessen Katheten r und b' waren. Es berührt also ED zugleich den verlangten ⊙ um μ und K, und hat auch die richtige Länge b', was zu beweisen war.

Anmerkung. Aus der Analysis und Auflösung von Fall 1) ergiebt sich,

1) daß mittelst der Bedingungen P_b und K_b stets zwei Berührungskreise für den gesuchten ⊙ abgeleitet werden können.

Aus der Analysis und Auflösung von Fall 2) geht aber hervor:

2) wenn von 2 Kreislinien die eine ⊥ und die andere unter einem bestimmten schiefen ∠ geschnitten wird so kann stets eine dritte unter demselben schiefen ∠ geschnittene Kreislinie abgeleitet werden, oder durch P_b und K_b hat man stets so $K'_{b''}$, daß sich $b' : b'' = r : r'$ verhält.

2183. Fig. 413. Aufgabe. ⊙ aus K_b, $K'_{b'}$, K''_d.

Analysis. Zieht man durch M' eine ⫩ zu b', beschreibt um μ einen dieselbe berührenden ⊙, legt an diesen eine ⫩ Tangente DE zu b, und zeichnet einen dieselbe tangirenden ⊙ um M, so bestimmt sich der Unterschied der Radien beider Paare konzentrischer Kreislinien $= r'$, also die Berührungslinie $M'F = b'$, und die gemeinschaftliche Tangente DE, welche zu demselben ⊙ gehört $= b$, während der Radius ME des zweiten von DE tangirten ⊙ $= r - r'$ gegeben ist. Man hat daher für den mit $F\mu$ um μ konstruirten ⊙ die Bedingungen P_b und K_b. Aus diesen lassen sich aber zwei denselben berührende ⊙⊙ um C und O nach 2182 ableiten, folglich sind auch zwei den verlangten ⊙ tangirende Kreislinien um C und O mitgegeben, welche man durch Verlängerung der Radien CG und OH der vorhergenannten Berührungs-Kreise um HN und GI $= r'$ erhält. Hiemit ist nun die Aufgabe auf ⊙ aus K, K', K''_d, siehe 2086, reduzirt.

Anmerkung. Aus der vorstehenden Analysis folgt: wenn ein ⊙ so gezeichnet werden soll, daß sich die gemeinschaftlichen Berührungslinien mit

2 gegebenen ⊙⊙ = b und b′ ergeben, so lassen sich stets zwei den gesuchten ⊙ berührende Kreislinien bestimmen. Oder (siehe 360)
wenn eine Kreislinie zwei gegebene Kreislinien unter bestimmten (krummlinigen) ∠ schneidet, so lassen sich stets 2 die erstere berührende ⊙⊙ bestimmen. Oder in Zeichen:
durch K_b und $K'_{b'}$ sind stets zwei berührende ⊙⊙ K und K′ mitgegeben.

2184. Aufgabe. ⊙ aus K_b, $K'_{b'}$, $K''_{b''}$, oder es sind 3 Kreislinien K, K′, K″ gegeben, man soll eine 4te Kreislinie zeichnen, welche jede derselben unter einem vorgeschriebenen (krummlinigen) ∠ schneidet. (Siehe 360.)

Analysis. 1) Durch K_b und $K'_{b'}$ sind nach 2183 zwei Berührungskreise K‴ und K^{IV} für den gesuchten ⊙ gegeben. In derselben Art erhält man durch $K'_{b'}$ und $K''_{b''}$ einen dritten (eigentlich 2) Berührungskreis K^V, und hat folglich die Aufgabe ⊙ aus K, K′, K″ zu lösen, welches 2082 geschehen ist.

Analysis. 2) Sei $r > r' > r''$. Zieht man durch M″ eine ∦ zu b″, beschreibt um μ einen dieselbe berührenden ⊙, legt an diesen 2 ∦ Tangenten zu b und zu b′, und zeichnet um M′ und M diese Tangenten berührende ⊙⊙, so ergiebt sich die von M auslaufende Berührungslinie = b″, die entstandenen gemeinschaftlichliche Tangenten bestimmen sich = b′ und b, und die Radien der um M und M′ konstruirten ⊙⊙ = $r_1 - r''$ und = r — r′, weshalb man die Aufgabe ⊙ aus P_b, $K'_{b'}$, $K''_{b''}$ (siehe 2182) zu lösen hat.

5tes Kapitel.

Theilungen.

2185. Aufgabe. Ein △ so in n gleiche Theile zu theilen, daß sich alle Theilungslinien in einem außerhalb desselben gegebenen Punkte P vereinigen.

Analysis. Jede Theilungslinie schneidet eine bestimmte Fläche $\frac{1}{n}$ f² oder $\frac{2}{n}$ f² u. s. w. ab, folglich hat man nur wiederholt Fall 1) von 2067 zur Lösung der Aufgabe anzuwenden.

2186. Aufgabe. Es sind n — 1 beliebig liegende Punkte und ein △ gegeben. Man soll dasselbe so in n gleiche Theile theilen, daß jede Theilungslinie durch einen der gegebenen Punkte läuft.

Analysis. Da sämmtliche Theilungslinien bestimmter Flächen: $\frac{1}{n}$ f², $\frac{2}{n}$ f² u. s. w. abschneiden, so ist in Beziehung auf jeden der gegebenen Punkte Fall 1) oder Fall 2) von 2067 anzuwenden.

2187. Aufgabe. Ein ▱ so in n gleiche Theile zu theilen, daß sich alle Theilungslinien in einem außerhalb desselben gegebenen Punkte P vereinigen.

Analysis. Verlängert man die Seiten a und c (P liege auf der Seite von c), so ergiebt sich ein △ mit der Seite d (oder b), dessen Fläche q² sein mag. Da nun der erste Theil $\frac{1}{n}$ f² ist, so hat man ein △ zwischen den Schenkeln des ∠ (ac) zu konstruiren, welches die Fläche $q^2 + \frac{1}{n} f^2$ erhält, und mit der Gegenseite des ∠ (ac) durch P läuft, siehe Fol

1) 2067. Um die übrigen Theilungslinien zu konstruiren, wird man in derselben Art △△ mit den Flächen $q^2 + \frac{2}{n} f^2$, $q^2 + \frac{3}{n} f^2$ u. s. w. in jenen ∠ zu verzeichnen haben, während außerdem in dem ∠ C (oder ∠ D) △△ mit den Flächen $\frac{1}{n} f^2$, $\frac{2}{n} f^2$ u. s. w. gleichfalls nach 2067 so abzuschneiden sind, daß sich die Gegenseiten jenes ∠ in dem Punkte P vereinigen.

2188. Aufgabe. Ein ▱ durch eine von den Scheiteln zweier Gegen∠ gleich weit entfernte Linie in 2 gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Zieht man eine Diagonale zwischen den in der Aufgabe bezeichneten ∠ spitzen, so ergeben sich 2 ≅ △△, weshalb die verlangte Theilungslinie die Mitte der Diagonale schneidet, also wie in 2187 bestimmt werden kann.

2189. Aufgabe. Es sind $n-1$ beliebig liegende Punkte und ein ▱ gegeben; man soll dasselbe so in n gleiche Theile theilen, daß jede Theilungslinie durch einen der gegebenen Punkte läuft.

Analysis. Macht man in Beziehung auf jeden der gegebenen Punkte dieselben Schlüsse wie am Anfange der Analysis von 2187, so ergiebt sich die Auflösung der Aufgabe durch 2067 Fall 1) und Fall 2).

2190. Fig. 414. **Aufgabe.** Ein Fünfeck ABCDE so in n gleiche Theile zu theilen, daß sich alle Theilungslinien in einem außerhalb desselben bestimmten Punkte P vereinigen.

Analysis. Konstruirt man durch Verlängerung der Seiten die beiden △△ AEF und CDG, so ergiebt sich, wenn man die Flächen derselben benutzt, durch eine doppelte Anwendung der am Anfange der Analysis von 2187 angeführten Schlüsse in Beziehung auf die mit ihren Spitzen in F und G fallenden △△ die gesuchte Auflösung.

2191. Fig. 415. **Aufgabe.** Ein ▱ durch 2 gerade Linien, von denen die eine durch einen bestimmten Punkt läuft, in 4 gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Zieht man nach 2187 durch den gegebenen Punkt P eine Linie GN, welche ▱ ABCD halbirt, so bestimmen sich die △△ AGV und VHB, während △ AFB durch das ▱ selbst bekannt ist. Ferner erhält man, wenn IQ als die verlangte zweite Theilungslinie angesehen wird, die Flächen IFQ, IGO und OHQ, wodurch mittelst den gegebenen ∠ IFQ, IGO und OHQ nach 486 auch die Rechtecke $IF \times FQ = q^2$, $IG \times GO = q'^2$, und $OH \times HQ = q''^2$ bekannt sind, und sich, wenn man

I. IF : GI = HO : x, und

II. FQ : GO = HQ : y setzt, durch Zus. f.

III. $q^2 : q'^2 = q''^2 : xy$ ergiebt, aus welcher Proportion $xy = g^2$ gefunden werden kann. Fällt man nun auf IQ die ⊥⊥ FS, HR, GU, so zeigt sich

FS : HR = FQ : QH, und

HR : GU = OH : OG, also durch Zus. f.

FS : GU = FQ × OH : QH × OG. Es ist aber auch

FS : GU = IF : IG, man hat also

FQ × OH : QH × OG = IF : IG, oder

FQ × OH : QH = IF × OG : IG. Setzt man hiemit

I. IF : GI = HO : x zusammen, so ergiebt sich

FQ : QH = OG : x, u. durch Zus. f. mit

II. FQ : QH = OG : y,

$FQ^2 : QH^2 = OG^2 : xy$, oder nach

III. $FQ^2 : QH^2 = OG^2 : g^2$, also auch
$FQ : QH = OG : g$. Hieraus folgt d. S. d. V. Gl.
$FH : QH = OG - g : g$, oder
$FH \times OH : QH \times OH = OG - g : g$, also auch
$OH : q''^2 = OG - g : g \times FH$, und d. S. d. h. Gl.

$GH - g : FH \times g - q''^2 = OH : q''^2$, in welcher Proportion nur OH unbekannt ist, also gefunden werden kann. Mittelst dieser Linie ergiebt sich aber O; folglich hat man zum Schluß, wie beim Anfang der Auflösung, nach 2187 eine Linie durch O zu legen, welche ▱ ABCD halbirt.

2192. Fig. 416. **Aufgabe.** Es soll ein ⊙ durch lauter gleiche in einem bestimmten Punkt der Peripherie zusammentreffende Theilungslinien in n Theile von gleicher Fläche und gleichem Umfang zerlegt werden.

Auflösung. Theile den in den gegebenen Punkt P treffenden Durchmesser PD in n gleiche Theile, beschreibe, von P aus gerechnet, auf derselben Seite von PD über PE, PM, PF, d. h. über $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ von PD u. s. w. Halbkreise, und zeichne auf der anderen Seite von PD, von D aus gerechnet, in derselben Art eine zweite Reihe Halbkreise, so ergeben sich die verlangten Theile.

Beweis. Sowohl die auf der einen als die auf der anderen Seite von PD konstruirten Halbkreislinien verhalten sich wie $1 : 2 : 3 : 4 : \ldots : n - 1$ (wie die Durchmesser), welche Zahlen eine arithmetische Reihe des ersten Ranges bilden. Da nun nach der Konstruktion der Werth jeder Theilungslinie durch die Summe zweier vom Anfang und Ende dieser Reihe gleich weit entfernten Glieder bestimmt wird, so ergiebt sich die Länge jeder Theilungslinie gleich der halben Peripherie des gegebenen ⊙. Es bilden also die gleich erwiesenen theilenden Linien wirklich gleiche Umfänge. Ferner

müssen auch gleiche Flächen entstanden sein: denn es verhalten sich beide Reihen Halbkreise, die gegebenen mit eingeschlossen, wie $1 : 4 : 9 : \ldots : n^2$ (wie die Quadrate der Durchmesser), welche Zahlen eine Reihe des zweiten Ranges bilden. Hieraus folgt, daß sich die Unterschiede der aufeinanderfolgenden Halbkreise auf jeder Seite wie $1:3:5:\ldots:2n-1$, also wie die Glieder einer Reihe des ersten Ranges verhalten. Da nun nach der Zeichnung der Werth jedes Theils durch die Summe zweier vom Anfang und Ende dieser Reihe gleich weit entfernten Glieder bestimmt wird, so zeigt sich die Fläche jedes dieser Theile $= \frac{1}{n}$ des gegebenen ⊙.

6tes Kapitel.

Gemischte Aufgaben.

2193. Fig. 433. Aufgabe. Gegeben P, K und eine P und M durchlaufende Linie L; man soll einen Punkt X in L, und eine zweite Kreislinie so bestimmen, daß jede durch P gelegte Linie EF, welche von beiden Peripherieen begrenzt wird, mit der Entfernung des in K fallenden Endpunkts derselben (F) von dem gesuchten Punkt X gleiche Länge erhält.

Analysis. Jeder von X nach K führenden Linie soll eine zweite entsprechen, welche vom Durchschnittspunkt (F) der ersten Linie mit K durch P nach der gesuchten Peripherie führt. Wendet man dies auf die P durchlaufende Linie XG an, so zeigt sich, daß nur GX selbst die zugehörige gleiche Linie sein kann, also X in der gesuchten Kreislinie liegen muß. In derselben Art entspricht der Linie $X\mu$ entweder μX oder μI, folglich kann der gesuchte Mittelpunkt μ nur entweder in L außerhalb K, oder in den Schneidungspunkt von K und L

μ liegen kommen. Nimmt man das Letztere an, und legt eine beliebige Linie EF durch P, so ergiebt sich $\triangle EF\mu \cong \triangle XF\mu$, weshalb μF den $\angle PFX$ halbirt.

Hieraus folgt, da $\angle M\mu F$ oder $\angle MF\mu = \angle \mu FX + \angle \mu XF$ ist, durch Subtraktion der gleichen $\measuredangle PF\mu$ und $XF\mu$, $\angle MFP = \angle FXM$, also $\triangle MFP \sim \triangle MFX$, woraus ferner $MX : MF = MF : MP$ hervorgeht, durch welche Proportion mittelst MX sowohl der gesuchte Punkt X, als die verlangte Kreislinie um μ bestimmt werden kann.

Auflösung. Bestimme MX so, daß $MP : MF = MF : MX$ wird (PH ⊥ MP, HX ⊥ MH), und beschreibe mit μX um μ einen ⊙, so bildet dieser die verlangte Kreislinie, und X den geforderten Punkt.

Beweis. Legt man durch P in beliebiger Lage eine Linie EF, so soll sich diese = FX bestimmen. Es ist $MP : MF = MF : MX$ gezeichnet, weshalb $\triangle FMX \sim \triangle FMP$ sein muß, und sich

$MP : MF = FP : FX$ ergiebt. Da nun

$MP : M\mu = \mu P : \mu X$ d. S. d. h. Gl. aus der ersten Proportion hervorgeht, so folgt wegen = Verh.

$FP : FX = \mu P : \mu X$, also auch

$\angle \mu FE = \angle \mu FX$. Außerdem ist aber $F\mu = F\mu$, $\mu E = \mu X$, und jeder von den $\measuredangle E$ und $X < R$, folglich muß $\triangle EF\mu \cong \triangle XF\mu$, also wirklich $EF = FX$ sein.

Anmerkung. Wenn P außerhalb K angenommen wird, muß sich X innerhalb finden lassen, so daß in der Figur die Punkte X und I wechseln.

2194. Aufgabe. Man hat eine beliebige Menge von Punkten P, P′, P″ u. s. w.; es soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß, wenn man durch denselben irgend eine Linie legt, die Summe aller ⊥⊥, welche aus den auf die eine Seite der Linie fallenden Punkten auf dieselbe gefällt werden können, gleich wird der Summe der ⊥⊥, die man auf die erwähnte Linie aus sämmtlichen

auf die andere Seite derselben fallenden Punkten fällen kann.

(In Rücksicht auf die Analysis siehe 1289. a.)

Auflösung.

1) Fig. 437. Bei zwei Punkten.

PP′ wie 1 : 1 getheilt giebt X.

2) Fig. 434. Bei drei Punkten.

X wie in 1) bestimmt, und XP″ so getheilt, daß XX′ : X′P″ = 1 : 2 wird, giebt den gesuchten Punkt X′.

3) Fig. 435. Bei vier Punkten.

X′ wie in 2) bestimmt, und X′P‴ so getheilt, daß X′X″ : X″P‴ = 1 : 3 wird, giebt den verlangten Punkt X″.

4) Fig. 436. Bei fünf Punkten.

X″ wie in 3) bestimmt, und X″P^{IV} so getheilt, daß X″X‴ : X‴P^{IV} = 1 : 4 wird, giebt den verlangten Punkt X‴. u. s. w.

Beweis.

ad 1) einfach.

ad 2) Fig. 434. Es soll PI + P″I″ = P′I′ sein. Legt man durch den nach 1) bestimmten Punkt X zu der beliebig durch X′ gezogenen Linie eine ∦, so findet sich

PI = PG — IG, und ferner

P″I″ = 2I″G″, da P″X′ : X′X = 2 : 1 ist, also

PI + P″I″ = PG + IG. Man hat aber auch

P′I′ = P′G′ + G′I′ = PG + IG, da nach 1) P′G′ = PG, folglich muß

PI + P″I″ = P′I′ sein.

ad 3) Fig. 435. Es soll PI + P′I′ = P″I″ + P‴I‴ sein. Legt man durch den nach 2) bestimmten Punkt X′ zu der beliebig durch X″ gezogenen Linie eine ∦, so findet sich

PI = PG + GI, und

P′I′ = P′G′ + G′I′, also

PI + P′I′ = PG + P′G′ + 2GI = P″G″ + 2IG nach 2) ferner

$P''I'' = P''G'' - G''I''$, und

$P'''I''' = 3\,G'''I'''$, da $P'''X'' : X''X' = 3 : 1$ ist, also

$P''I'' + P'''I''' = P''G'' + 2IG$, weshalb

$P''I'' + P'''I''' = PI + P'I'$ sein muß, u. s. w.

Anmerkung. Der gefundene Punkt bildet den Schwerpunkt für die gegebenen Punkte.

2193. Aufgabe. Man hat eine beliebige Menge von ⊙⊙ K, K', K'' u. s. w.; es soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß, wenn man durch denselben irgend eine Linie legt, die Summe aller Tangenten, welche an die auf die eine Seite der Linie fallenden ⊙⊙ zu derselben ⊥ gelegt werden können, der Summe der Tangenten gleich wird, die man ⊥ auf die erwähnte Linie an die auf die andere Seite derselben fallenden ⊙⊙ ziehen kann.

Auflösung. Benutzt man die Mittelpunkte M, M', M'' u. s. w. wie die in 2194 gegebenen Punkte P, P', P'' ꝛc., so erhält man den verlangten Punkt.

Beweis. Ergiebt sich in Beziehung auf M, M', M'' ꝛc. ganz wie in 2194, so daß man zur Vollendung des Beweises nur zu den ⊥⊥ ∓ Tangenten zu legen hat.

2195. a. Fig. 438. Aufgabe. Der Mittelpunkt M einer bestimmten Kreislinie K liegt in der Halbirungslinie eines festliegenden ∠ D; man soll eine Tangente XY zeichnen, welche in den Schenkeln des gegebenen ∠ endigt, und die Länge a erhält.

Analysis. Beschreibt man um △ XDY einen ⊙, verlängert DM bis E, zieht EY, und fällt aus E auf XY den ⊥ EG, so findet sich EY und EG durch a und ∠ XDY nach 321 gegeben, und außerdem △ DEY ∽ △ EHY, (da ∠ EYH = ∠ EDX = ∠ EDY) und △ MHF ∽ △ GEH, weshalb

$$\left\{\begin{array}{lll} DE & : EY = EY & : EH, \text{ und} \\ EG & : EH = EG + MF & : ME \end{array}\right.$$

sein muß. Bestimmt man nun g so, daß

$$\left\{\begin{array}{lll} EG + MF : EG = & g & : EY \end{array}\right.$$

ist, so hat man d. Zus. s.

$$\begin{array}{lll} DE : EY = & g & : ME, \text{ oder} \\ DM + ME : EY = & g & : ME, \end{array}$$

durch welche Proportion ME nach 459 bestimmt werden kann, da $\square (DM + ME)\, ME = g \times EY$, und $(DM + ME) - ME = DM$ gegeben ist, also nur EY abgeschnitten werden darf, um den Punkt Y zu erhalten, aus welchem man die gesuchte Tangente YX an den $\odot$ um M zu legen hat.

Anmerkung. Die vorstehende Aufgabe bildet eine Erweiterung von 375.

2196. Fig. 439. Lehrsatz. Theilt man in einem $\square$ eine von den nicht $\neq$ Seiten d nach dem Verhältniß m : n in F, und legt durch diesen Punkt eine $\neq$ FN zu a und c bis b, so ergiebt sich $(n + m)\, FN = ma + nc$. (Erweiterung von 172. a.)

Beweis. Die BC $\neq$ gezogene Linie AH bestimmt $FI : DH = n : n + m$. Da nun $DH = c - a$ ist, so folgt hieraus $FI = \frac{nc - na}{n + m}$, weshalb $FN = FI + IN = \frac{nc - na}{n + m} + a = \frac{nc + ma}{n + m}$, also $(n + m)\, FN = ma + nc$ sein muß.

2197. Fig. 439. a. Lehrsatz. Theilt man in einem $\square$ eine Diagonale e nach dem Verhältniß m : n in F, und legt durch diesen Punkt eine $\neq$ FN zu a und c bis e', so ergiebt sich $(n + m)\, FN = nc - ma$. (Erweiterung von 172. b.)

Beweis. Die BD $\neq$ gezogene Linie AH bestimmt $FI : CH = n : n + m$. Da nun $CH = c + a$ ist, so folgt hieraus $FI = \frac{nc + na}{n + m}$, weshalb $FN = FI - IN =$

$\frac{nc+na}{n+m} - a = \frac{nc-ma}{n+m}$, also $(n+m)\,FN = nc - ma$ sein muß.

2198. Fig. 440. Ort. Wenn eine beliebige Menge von Punkten P, P′, P″, P‴ .... gegeben ist, läßt sich stets ein ⊙ so bestimmen, daß die Summe aller ⊥⊥, welche aus diesen Punkten auf irgend eine an den ⊙ gezogene Berührungslinie gefällt werden können, eine bestimmte Länge s erhält.

Analysis. Es ist nach 172. a.

$2XY = PD + P'D'$, wenn $PX = \frac{PP'}{2}$, u. $XY \parallel P'D'$.

Ferner hat man nach 2196

$3X'Y' = 2XY + P''D''$, wenn $XX' = \frac{XP''}{3}$, und $X'Y' \parallel P''D''$, also muß

$3X'Y' = PD + P'D' + P''D''$ sein. Eben so erhält man

$4X''Y'' = 3X'Y' + P'''D'''$, wenn $X'X'' = \frac{X'P'''}{4}$, und $X''Y'' \parallel P'''D'''$; folglich ergiebt sich

$4X''Y'' = PD + P'D' + P''D'' + P'''D'''$.

Ist demnach $PD + P'D' + P''D'' + P'''D''' = s$ bestimmt, so bildet $\frac{s}{4}$ den Radius $X''Y''$ des Kreisorts, welcher um den gefundenen Punkt X″ zu beschreiben ist.

Konstruktion. Sind n Punkte gegeben, so beschreibe man mit dem Radius $\frac{1}{n}$ s um einen Punkt, dessen Konstruktion in der Auflösung von 2194 angegeben ist, (Schwerpunkt) einen ⊙, so ist der in Rede stehende Ort gezeichnet.

2199. Fig. 449. Ort. Wenn zwei Punktgruppen G und G gegeben sind, läßt sich stets ein ⊙ so bestimmen, daß die Summe aller ⊥⊥, welche aus den Punkten der einen Gruppe auf eine beliebige Tangente dieses ⊙ gefällt werden können, weniger der Summe aller aus der anderen Grup-

pe nach derselben Tangente führenden ⊥⊥ eine bestimmte Länge d erhält.

Analysis. Schließt man wie in der Analysis von 2198, so ergiebt sich, wenn die Gruppe G m und die Gruppe 𝔊 n Punkte enthält, XY und 𝔛𝔜 aber die aus den Schwerpunkten X und 𝔛 der Gruppen G und 𝔊 auf die Tangente gefällten ⊥⊥ sind,

$$mXY = PD + P'D' + P''D'' + \ldots, \text{ und}$$
$$n\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{P}\mathfrak{D} + \mathfrak{P}'\mathfrak{D}' + \mathfrak{P}''\mathfrak{D}'' + \ldots, \text{ also}$$
$$mXY - n\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = d;$$

Theilt man daher die Verbindungslinie X𝔛 beider Schwerpunkte in F nach dem Verhältniß m : n, so erhält man nach 2197 der ⊥ $FN = \frac{d}{n+m}$ als Radius des in Rede stehenden Kreisorts.

Konstruktion. Bestimme nach der Auflösung von 2194 die Schwerpunkte der Gruppen G und 𝔊, theile deren Verbindungslinie nach dem Verhältniß der Zahlen m und n, welche die Menge von Punkten jeder Gruppe angeben, in umgekehrter Ordnung, und beschreibe um den Theilungspunkt mit dem Radius $\frac{d}{m+n}$ einen ⊙, so ist der verlangte Ort gezeichnet.

2199. a. Aufgabe. Es sind 2 Punktgruppen G und 𝔊 gegeben; man soll zwischen denselben eine Linie XY so ziehen, daß sich die Summe aller aus der Gruppe G auf XY gefällten ⊥⊥ = s, und die Summe aller für die Gruppe 𝔊 in derselben Art bestimmten ⊥⊥ = ſ ergiebt.

Analysis. Die Gruppe G und s bestimmen nach 2198 die Lage einer XY berührenden Kreislinie. In derselben Art läßt sich ein zweiter Berührungskreis mittelst der Gruppe 𝔊 und ſ feststellen. Folglich bildet die nach 318 konstruirbare gemeinschaftliche Tangente beider ⊙⊙ die verlangte Linie XY.

2199. b. Aufgabe. Es sind 3 Punktgruppen G, $\mathfrak{G}$ und Γ gegeben; man soll eine G und $\mathfrak{G}$ scheidende, Γ aber schneidende Linie XY so ziehen, daß 1) die Summe aller aus der Gruppe G auf XY gefällten $\perp\perp$ weniger der Summe aller in derselben Art für $\mathfrak{G}$ bestimmten $\perp\perp$ = der Länge d wird, und daß 2) die Summe aller $\perp\perp$, welche aus sämmtlichen Punkten der einen Seite von XY auf diese Linie gefällt werden können, dieselbe Größe mit der Summe aller auf der anderen Seite von XY in gleicher Art bestimmten $\perp\perp$ erhält.

Analysis. Aus der ersten Bedingung ergiebt sich mittelst der Gruppen G und $\mathfrak{G}$, und mittelst d nach 2199 ein XY berührender $\odot$. Aus der zweiten Bedingung folgt nach 2194, daß XY den Schwerpunkt sämmtlicher Punkte der 3 Gruppen durchläuft; also läßt sich die verlangte Linie zeichnen.

2199. c. Aufgabe. Es sind 3 Punktgruppen G, $\mathfrak{G}$, Γ gegeben; man soll zwischen denselben ein $\triangle$ mit den Seiten a, b, c so zeichnen, daß sich die Summe aller aus der Gruppe G auf die Lage a gefällten $\perp\perp$ = s, ferner die Summe aller aus der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Lage b gefällten $\perp\perp$ = $\mathfrak{s}$, und endlich die Summe aller aus der Gruppe Γ auf die Lage c gefällten $\perp\perp$ = σ ergiebt.

Analysis. Nach 2198 bestimmen G und s, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{s}$, Γ und σ 3 $\odot\odot$, von denen einer die Lage a, der andere die Lage b, und der dritte die Lage c berührt. Zieht man durch die Mittelpunkte derselben $\ddagger\ddagger$ zu den Seiten a, b, c des $\triangle$ ABC, so entsteht ein $\triangle$ $\mathfrak{ABC}$ mit den bekannten $\measuredangle$ A, B, C. Werden nun aus A, B, C $\perp\perp$ (6) auf die $\ddagger\ddagger$ gefällt, so erhält man 3 durch die $\perp\perp$ (Radien) und die $\measuredangle$ bestimmte $\square\square$, weshalb durch Zeichnung derselben die an sich nicht gegebenen 2 Seiten jedes dieser $\square\square$ der Größe nach bekannt werden, und sich die Länge jeder Seite

des $\triangle ABC = a$ oder b oder $c \pm$ der Summe aus einer Seite des einen $\square$ und einer Seite des anderen $\square$ ergiebt. Man hat also um das von den 3 Mittelpunkten gebildete $\triangle$ ein zweites $\triangle$ mit drei gegebenen Seiten zu verzeichnen, welche Aufgabe 1391 gelöst ist.

2200. Aufgabe. Es sind 6 Punkte gegeben; man soll untersuchen, welche Bedingungen statt finden müssen, damit sich dieselben alle in einer Kreislinie befinden.

Analysis. Fig. 441. Sind D, E, F, G, H und I die gegebenen Punkte, so läßt sich vermuthen, daß

1) $QE \times QD = QH \times QI$
2) $ND \times NE = NG \times NF$
3) $OI \times OH = OF \times OG$

die gesuchten Voraussetzungen bilden werden, da jede von diesen Gleichungen einzeln die Lage der 4 in derselben benutzten Punkte in einer Kreislinie bedingt. Die nähere Untersuchung bestätigt dies in folgender Art.

Da wegen 1) die Kreislinie die 4 Punkte D, E, H, I durchlaufen muß, so können nur folgende Annahmen statt finden. Gesetzt 1) Fig. 442. NO und die Kreislinie hätten keinen Punkt gemein, so ergäbe sich aus 2) und 3), wenn man die Tangenten OS und NT zieht, $OS^2 = OF \times OG$ und $NT^2 = NG \times NF$, weshalb sich zwei F und G durchlaufende Kreislinien zeichnen lassen müßten, die in S und T den gegebenen Kreis beide von Außen berühren würden, was unmöglich ist. (Siehe 577.)

Gesetzt 2) Fig. 443. NO und die Kreislinie hätten einen Punkt X oder Y gemein, so wäre

NG : NX = NX : NF, und
OX : OF = OG : OX, also d. S. d. h. Gl.

GX : FX = NG : NX, und
GX : FX = OG : OX, folglich

NG : NX = OG : OX, u. d. T. d. h. Gl.
NO : NO = NG : NX,

weshalb NG = NX sein müßte, was unmöglich ist. Bildete dagegen Y den gemeinschaftlichen Punkt, so hätte man

NG : NY = NY : NF,

welches gleichfalls unmöglich ist, da eins von diesen Verhältnissen fällt und das andere steigt.

Gesetzt 3) Fig. 441. die Kreislinie ginge durch 2 Punkte R und S, von denen einer zwischen F und G, der andere zwischen G und O (oder N und F) läge, so wäre

ND × NE = NS × NR = NG × NF, also

NG : NS = NR : NF,

welches unmöglich ist, da eins von diesen Verhältnissen steigt und das andere fällt.

Gesetzt 4) Fig. 441. die Kreislinie ginge durch zwei zwischen oder außerhalb F und G liegende Punkte R und T, so wäre

NG × NF = ND × NE = NR × NT, und
OF × OG = OI × OH = OT × OR, also
NG : NR = NT : NF, und
OT : OF = OG : OR, demnach d. S. d. V. Gl.
RG : TF = NG : NT, und
RG : TF = OG : OT, folglich
NG : NT = OG : OT, und d. A. d. h. Gl.
NO : NO = OG : OT,

weshalb OG = OT sein müßte, was unmöglich ist.

Außer diesen Fällen sind aber keine möglich, folglich durchläuft die Kreislinie wirklich die Punkte F und G, also sämmtliche 6 gegebenen Punkte, wenn die angegebenen Voraussetzungen 1), 2), 3) statt finden.

Anmerkung 1). Die Voraussetzungen Fig. 441 QN × NE = NG × NF, und OQ × OH = OF × OG bedingen in derselben Art wie in den vorher geschlossenen Untersuchungen die Lage der 5 Punkte Q, E, F, G, H in einer Kreislinie.

Anmerkung. 2) So wie im Vorigen die fehlenden Voraussetzungen durch Anwendung des Sekantensatzes her-

vorgingen, ergeben sich auch für 5 Punkte andere Voraussetzungen durch Benutzung des Sehnensatzes. Man erhält die brauchbaren Sehnen, wenn man in derselben Art wie die 5 Punkte Q, E, F, G, H (Fig. 441) durch eine zusammenhängende gebrochene Linie QEFGHQ ein gewöhnliches Fünfeck ergaben, gleichfalls durch eine zusammenhängende Linie QFHEGQ das korrespondirende sternförmige Fünfeck bildet, in welchem Fall die vorherigen Durchschnittspunkte der Sekanten N und O in Durchschnittspunkte der Sehnen übergehen.

Anmerkung. 3) Die nähere Betrachtung zeigt, daß zu jedem gewöhnlichen Vieleck von einer ungeraden Seitenanzahl ein korrespondirendes sternförmiges Vieleck nach einem bestimmten Gesetz gebildet werden kann, oder daß man (anders ausgedrückt) im Stande ist: jede ungerade Anzahl von Punkten in einem Zuge durch eine zusammenhängende gebrochene Linie nach einem bestimmten Gesetz zu verbinden. Bei 5 Punkten ergiebt sich diese Linie durch fortgesetzte Ueberspringung von einem Punkt, bei 7 Punkten durch die Ueberspringung von 2 Punkten u. s. w.; überhaupt bei n Punkten durch die Ueberspringung von $\frac{n-3}{2}$ Punkten. (Arithmetische Progressionen).

2201. Fig. 444. Aufgabe. Gegeben L, L', P in L, P' in L' und P''; man soll durch P'' eine von L und L' begrenzte Linie XY so legen, daß sich P'X : PY = m : n ergiebt.

Analysis. Zieht man P''G ∦ L, und setzt DP = a, DP' = b, P'G = d, P''G = c, P'X = x, PY = y, GX = z, so findet sich

c : z = a+y : b+x, also d. A. d. h. Gl.

a+c+y : b+x+z = a+y : b+x, oder

a+c+y : b+d = a+y : b+x, u. d. S. d. h. Gl.

1) c : d−x = a+y : b+x. Bestimmt man nun p so, daß

$m : n = p : a$, oder
$x : y = p : a$, alſo
$x+p : y+a = p : a$ wird, und ſucht ferner g ſo, daß
$g : c = p : a$, alſo auch
$g : c = x+p : y+a$ iſt, u. ſetzt mit 1) zuſammen, ſo erhält man

---

$g : d-x = x+p : b+x$, u. d. A. d. h. Gl.
$g+p+x : b+d = g : d-x$, durch welche Proportion nach 457 x beſtimmt werden kann, da mittelſt derſelben das Rechteck der äußeren Glieder $= g(b+d)$, und deren Summe $= g+p+d$ gegeben iſt.

Die Auflöſung wird einfacher, wenn man zunächſt den Fall analyſirt bei welchem P in D fällt, alſo

$DY : P'X = n : m$ ſein ſoll. Beſtimmt man E ſo daß
$n : m = P''G : P'E$, weshalb
$DY : P'X = P''G : P'E$ ſein müßte, ſo ergiebt ſich, da zugleich
$DY : DX = P''G : GX$ iſt,

$P'X : DX = P'E : GX$, alſo d. A. d. h. Gl.

$EX : DG = P'E : GX$, durch welche Proportion EX oder GX nach 457 beſtimmbar iſt, da mittelſt derſelben $EX \times GX = DG \times P'E$ gegeben iſt, und man zugleich $EX + GX = EG$ hat. Auf dieſen Fall läßt ſich nun der allgemeinere in folgender Art zurückführen:

zieht man P''P, ſo beſtimmt ſich E in L', und man erhält, wenn $EZ \nparallel L$ liegt,

$EZ : PY = P''E : P''P$. Nun ſoll
$PY : P'X = n : m$ ſein, folglich hat man d. Zuſ. ſ.

$EZ : P'X = n \times P''E : m \times P''P$, welche Proportion nach der vorher gegebenen Analyſis konſtruirt werden kann, da E und die Lage von $EZ \nparallel L$ bekannt ſind.

2202. Fig. 445. Aufgabe. Gegeben $L \nparallel L'$, P in L, P′ in L′ und P″; man soll durch P″ eine Linie XY so ziehen, daß $PX \times P'Y = f^2$ wird.

Analysis. Legt man durch P″ eine Linie $\nparallel PP'$, so ergiebt sich, wenn DX durch x, EY durch y, $PD = P'E$ durch a bezeichnet wird,

$a+x : f = f : a+y$, oder durch Bestimmung von $ag = f^2$

$a+x : g = a : a+y$, also auch d. G. d. h. Gl.

$x : g-a-y = a : a+y$. Nun ist

$x : y = a : q$ gegeben, da $P''D : P''E$ bekannt ist, folglich hat man

---

$y : g-a-y = q : a+y$, oder d. A. d. h. Gl.

$y+q : g = q : a+y$, durch welche Proportion das $\square (y+q)(a+y) = gq$, und die Differenz $(y+q) - (a+y) = q-a$ gegeben sind, weshalb $(y+q)$ oder $(a-y)$, also auch y selbst nach 459 konstruirt werden kann. (S. 1333.)

2203. Fig. 446. Aufgabe. Gegeben L, L′, P in L, P′ in L′ und P″; man soll durch P″ eine Linie XY so ziehen, daß $PX \times P'Y = f^2$ wird.

Analysis. Legt man durch P″ $\nparallel\nparallel$ zu L und L′, so ergiebt sich, wenn FX durch x, EY durch y, PF durch a, P′E durch b, P″F durch n, P″E durch n′ bezeichnet wird, da nach 565 $xy = nn'$ ist, und deshalb c so bestimmt werden kann, daß $xy = ac$ wird,

$y : c = a : x$, also d. A. d. B. Gl.

$c+y : y = a+x : a$. Nun ist

$a+x : f = f : b+y$, und e kann so bestimmt werden, daß

$f : a = e : f$, folglich erhält man durch Zus. f.

$c+y : y = e : b+y$, also auch d. G. d. B. Gl.

$c : c+y = e-b-y : e$, durch welche Proportion das $\square (c+y)(e-b-y) = ce$, und die Summe $(c+y)+(e-b-y) = c+e-b$ gegeben sind, weshalb $(c+y)$ oder

(e—b—y), also auch y selbst nach 457 konstruirt werden kann.

Anmerkung. In derselben Art ergiebt sich die Analysis, wenn P'' nicht zwischen L und L' liegt, oder wenn P und P' andere Lagen haben.

2204. Fig. 447. Aufgabe. Es sind 3 in eine gerade Linie fallende Punkte P, P', P'' und K gegeben; man soll 2 sich in K vereinigende Linien PX und P'X so von P und P' aus ziehen, daß die verlängerte Verbindungslinie der zweiten Durchschnittspunkte Y und Z mit K den dritten Punkt P'' durchschneidet.

Analysis. Zieht man YF ∦ PP'', und verlängert FZ, so ergiebt sich ∠ ZEP' = ∠ ZFY = ∠ P'XP, also △ P'ZE ∽ △ P'XP, weshalb P'X × P'Z = P'P × P'E sein muß. Nun ist aber P'X × P'Z = dem Quadrat der Tangente P'B gegeben, folglich läßt sich, da auch PP' bekannt ist, E bestimmen, indem man eine P durchlaufende Kreislinie beschreibt, die P'B in B berührt, wodurch die Aufgabe auf 1943 reduzirt ist, da YF ∦ EP'' fallen soll, und die Linien P''Y und EF sich in einem Punkte Z von K durchschneiden müssen.

2205. Fig. 448. Aufgabe. Gegeben L, L', L'', L'''; man soll eine 5te Linie V, X, Y, Z ziehen, welche die ersteren 4 so durchschneidet, daß sich die entstehenden Abschnitte der gesuchten Linie wie m:n:p verhalten. (VX:XY:YZ = m:n:p)

Analysis. Zieht man durch X und Y ∦∦ zu L''' und L, so ergiebt sich

△ OXV ∽ △ XYN ∽ △ YZI, weshalb

OX : XN = VX : XY = m : n, und

IY : YN = ZY : XY = p : n gegeben ist.

Nun sind aber auch die →→ der Linien NO und NI bekannt, folglich lassen sich nach 540 zwei Oerter für N, also

auch die Punkte X und Y, und mittelst derselben die verlangte Linie bestimmen.

Auflösung. Bestimme QS und FG so, daß

$$EQ : QS = m : n, \text{ und}$$
$$EF : FG = p : n$$

wird, verlängere die Linien DG und SH bis zu ihrem Schnitt in N, lege $NO \fallingdotseq L'''$, und $NI \fallingdotseq L$, so bildet VXYZ die gesuchte Linie.

Beweis.

$\triangle EQH \sim \triangle OXH$, $\triangle QSH \sim \triangle HNX$, also ist

$EQ : OX = QH : HX$, und

$QS : XN = QH : HX$, folglich wegen = Verh.

$EQ : QS$, oder n. K. $m:n = OX:XN$, während zugleich $EF : FG$, oder n. K. $p:n = IY:YN$ sein muß.

Da nun $\triangle OXV \sim \triangle XYN \sim \triangle IYZ$, so ist ferner

$m : n = OX : XN = VX : XY$, und

$n : p = YN : IY = XY : YZ$, also wirklich

$m : n : p = VX : XY : YZ$, w. z. b. w.

2206. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″, K; man soll ein $\triangle ABC$ so in K einschreiben, daß a durch P, b durch P′, und c durch P″ läuft.

Analysis ꝛc. Siehe II. d. A. §. 30.

2207. Fig. 450. Aufgabe. Es soll in ein $\square ABCD$ ein $\square VXYZ$ so eingeschrieben werden, daß jede Seite desselben eine gegebene $\rightarrow$ erhält.

Analysis. Sind AG und BE die gegebenen $\rightarrow$, so erhält man

$$\begin{cases} AX : XY = AB : BE, \\ ZV : CV = FB : CB, \\ HV : AX = BH : AB; \text{ also durch Zus. f.} \end{cases}$$

---

1) $HV : CV = FB \times BH : BE \times CB$, mittelst welcher Proportion V bestimmt werden könnte. Zieht man indeß, um dies besser auszuführen, $EI \fallingdotseq CD$, so findet sich

BE : BI = BF : BC, also
BE × BC = BI × BF, folglich auch durch Substitution in 1)
HV : CV = BF × BH : BI × BF, oder
HV : CV = BH : BI, und d. S. d. V. Gl.
CH : IH = HV : HB. Mittelst dieser Proportion kann man nun HV einfacher bestimmen, und darauf von dem Punkte V aus das gesuchte ▱ zeichnen.

Auflösung. Lege durch A und B die gegebenen →→, ziehe EI ∦ DC, CN ∦ der beliebig durch I gezogenen Linie IG, NV ∦ GB, VZ ∦ EB, VX ∦ AG, und XY ∦ BE, so bildet XYZV das verlangte ▱.

Beweis. Es ist nur darzuthun, daß XY = ZV ist, da man nach der Auflösung geradezu XY ∦ VZ ∦ BE erhalten hat, aus beidem also auch XV ∦ YZ ∦ AG hervorgehen muß. Aus der Konstruktion folgt
HC : HI = HV : HB (= HN : HG), mithin ist d. Ä. d. h. Gl.
CV : IB = HV : BH, und ferner = AX : AB = XY : BE, also auch CV : XY = BI : BE = BC : BF = CV : VZ, woraus sich wirklich XY = VZ ergiebt, und daher XYZV ein ▱ mit den vorgeschriebenen →→ der Seiten bildet.

2208. Fig. 451. Aufgabe. Es soll in ein ▱ ABCD ein zweites ▱ XYZV so eingeschrieben werden, daß jede Seite eine gegebene → erhält.

Analysis. Sind AH und AH′ die →→ des einen, und DE und DE′ die →→ des anderen Paars Gegenseiten des gesuchten ▱, so ergiebt sich

AX : XY = AE : ED, und
VH : AX = BH : BA; also d. Zus. f.
1) VH : XY = AE × BH : ED × BA. Nun ist auch
XY : AY = DE : AD, und
AY : H′Z = AD : H′D; also durch Zus. f.
2) XY : H′Z = ED : H′D, folglich auch d. Zus. f. von 1) mit 2)
3) VH : H′Z = AE × BH : H′D × AB.

Durch Hilfe dieſes Verhältniſſes iſt aber das $\square$ ZVHH' vollſtändig beſtimmt, da außerdem HH' und alle $\measuredangle$ gegeben ſind, folglich laſſen ſich die Punkte V und Z feſtſtellen, u. ſ. w. Hiedurch entſtände jedoch eine zuſammengeſetzte Konſtruktion, weshalb zunächſt die letzte Proportion 3) zu vereinfachen iſt. Dies ergiebt ſich, wenn man EN $\fallingdotseq$ AH zieht, durch Zuſammenſetzung derſelben mit

AE : AB = HN : HB, wodurch

4) VH : H'Z = HN : H'D hervorgeht. Ungeachtet dieſer Vereinfachung bleibt aber doch noch eine beſondere Hilfsaufgabe zu löſen, weshalb man die Analyſis zu deren Umgehung fortzuſetzen hat. Zieht man hiezu H'I $\fallingdotseq$ DE', und ſetzt H'Z : IV = H'D : IE' mit 4) zuſammen, ſo findet ſich

VH : IV = HN : IE'; ferner d. G. d. V. Gl.
IH : IH + NE' = IV : IE', u. d. abermalige G. d. V. Gl.
NE' : IH = VE' : IV, endlich aber d. G. d. h. Gl.
NV : HV = NE' : IH, weshalb, ſobald NO = NE', und OH = IH gezeichnet wird, NV : HV = NO : HO ſein muß, alſo OV den $\measuredangle$ HON halbirt. Nun iſt aber $\triangle$HON gegeben, folglich läßt ſich V beſtimmen, und hierauf das geſuchte $\square$ XYZV konſtruiren.

Auflöſung. Lege durch A die $\rightarrow\!\!\rightarrow$ AH und AH' des einen, und durch D die $\rightarrow\!\!\rightarrow$ DE und DE' des anderen Paars Gegenſeiten des geforderten $\square$, ziehe EN $\fallingdotseq$ AH, H'I $\fallingdotseq$ DE', beſtimme ferner NO = NE', HO = HI, zeichne die Halbirungslinie OV des $\measuredangle$ HON, und konſtruire VZ $\fallingdotseq$ E'D, VX $\fallingdotseq$ AH, ZY $\fallingdotseq$ H'A, ſo bildet XYZV das geſuchte $\square$.

Beweis. Man hat nur darzuthun, daß XY $\fallingdotseq$ DE iſt, da ſämmtliche übrigen Seiten nach der Auflöſung gerade zu die vorgeſchriebenen $\rightarrow\!\!\rightarrow$ erhalten haben.

Da OV den $\measuredangle$ HON halbirt, iſt
NV : HV = NO : HO, oder n. d. K.
NV : HV = NE' : HI; alſo d. A. d. V. Gl.

HN : NE″ + HI = HV : HI, u. s. abermalige A. d. B. Gl.
IE″ : IV = HN : HV. Nun ist
IE′ : IV = H′D : H′Z, also muß wegen = Verh.

1) HN : HV = H′D : H′Z sein. Man hat aber

HN : HV = AE : AX, und
H′D : H′Z = AD : AY, demnach folgt wegen 1)

AE : AX = AD : AY, woraus schließlich hervorgeht, daß XY wirklich ∓ ED ist, also gleichfalls die vorgeschriebene → erhalten hat.

2209. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; es soll durch P eine Linie XY so gelegt werden, daß sich ∠ P′XY = α, ∠ P″YX = β, und P′X : P″Y = m : n ergiebt.

Fall 1). Fig. 452. XY soll P′P″ nicht durchschneiden.

Analysis. Zieht man durch X und P″ ∓∓ zu P′P″ und P′X, so erhält man ∠ DP″Y = 2R — (α + β). Da nun P″ festliegt, Y sich in einer mittelst PP″ und β nach 320 gegebenen Kreislinie befindet, und P″D : P″Y = m : n sein muß, so läßt sich nach 586 ein Kreisort für D bestimmen. Durch PP′ und α ist aber auch ein Kreisort für X, gleichfalls nach 320 gegeben, folglich hat man nur zwischen die zuletzt genannten beiden Oerter nach 1586 die Linie DX = und ∓ P′P″ zu schieben, wodurch sich X feststellen muß, u. s. w.

Fall 2). Fig. 453. XY soll P′P″ durchschneiden.

Analysis. Verlängert man P′P um sich selbst bis 𝔓, und zieht 𝔓X′ ∓ P′X, so reduzirt sich dieser Fall für die Punkte P, 𝔓, P″ auf den vorhergehenden, da 𝔓X′ = P′X, und ∠ 𝔓X′Y = ∠ P′XP = α ist.

2210. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; es soll durch P eine Linie XY so gelegt werden, daß sich ∠ P′XY = α, ∠ P″YX = β, und P′X × P″Y = ℓ² ergiebt.

Fall 1). XY soll P'P'' nicht durchschneiden.

Analysis 1). Fig. 452. Liest man P''D×P''Y = f² statt P''D : PY = m : n, und 589. a. statt 586 in der Analysis des Fall 1) von 2209, so paßt dieselbe wörtlich für die vorstehende Aufgabe.

Analysis 2). Fig. 454. Sucht man wie in 1977 ein △ P''PY ∽ △ P'XD über P'X so zu erhalten, daß ∠ XDP' = β, und ∠ P' = ∠ P''PY wird, so findet sich ∠ P'EP'' = α. Zieht man daher aus P' eine gegen die Lage P''P unter ∠ α geneigte Linie P'E, und bestimmt ferner ∠ XDP' = β, so erhält man △ XDP' ∽ △ PP''Y, da ∠ XDP' = ∠ Y gemacht ist, und aus der Aehnlichkeit der △△ P'XF und PEF ∠ XP'F = ∠ EPF, also auch = ∠ P''PY folgt.

Hiedurch ergiebt sich

P'X : P''P = XD : P''Y. Nun ist aber

f : P'X = P''Y : f gegeben, also hat man durch Zus. f.

---

f : P''P = XD : f, und mittelst dieser Proportion XD, weshalb nach 93 ein Ort für X bestimmt werden kann, durch welchen sich dieser Punkt feststellt, da zugleich nach 320 durch PP' und α ein zweiter Ort für X bestimmt ist.

Fall 2). XY soll P'P'' durchschneiden.

Analysis. Wie in Fall 2) von 2209.

2111. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll durch P eine Linie XY so legen, daß ∠ P'XY = α, ∠ P''Y'X = β, und P'X : PY = m : n wird.

Fall 1). Fig. 455. XY soll P'P'' nicht durchschneiden.

Analysis. Zieht man durch Y und P' ∥ ∥ zu PP' und XY, so erhält man ∠ XP'D = 2R — α. Da nun P' feststeht, X sich in einer mittelst PP' und α nach 320 gegebenen Kreislinie befindet, und P'D : P'X = n : m sein muß, so läßt sich nach 586 ein Kreisort für D bestimmen. Durch PP'' und β ist aber auch ein Kreisort für Y, gleich-

falls nach 320, gegeben, folglich hat man nur zwischen die zuletzt genannten beiden Oerter nach 1586 die Linie DY = und ∓ PP′ zu schieben, wodurch sich Y feststellen muß, u. s. w.

Fall 2). Fig. 456. XY soll P′P″ durchschneiden.

Analysis. In derselben Art wie in 581 die festliegende Seite b eines △, und a : h einen Ort für B gaben, läßt sich vermuthen, daß auch PP′, P′X : PY = m : n, und ∠ P′XP = α statt des rechten ∠, einen Ort für Y ergeben werden. In 581 fand man durch a : h = x : b den ⊥ auf b stehenden Durchmesser x des Orts. Statt dessen kann sich hier durch PY : P′X, oder n : m = PD : PP′ die unter ∠ DPF = α gegen die Tangente PP′ geneigte Sehne PD ergeben, wodurch ∠ PYD = α bestimmt wäre, während sich der Mittelpunkt M des Orts durch die in P und der Mitte von PD errichteten ⊥⊥ feststellen müßte. Hieraus geht aber △ P′XP ∽ △ PYD hervor, da zugleich ∠ P′PX = ∠ YDP sein muß, folglich läßt sich ein Kreisort für Y bestimmen. Verlängert man in demselben P″Y bis E, so ergiebt sich außerdem noch die Lage der Linie EP″Y, da ∠ DYE = α − β gegeben ist; es muß sich also durch Ausziehung dieser Linie der Punkt Y, und hiedurch auch die Linie XY feststellen.

Auflösung. Bestimme ∠ FPD = α, und PD so, daß P′P : PD = m : n wird, errichte in P auf P′P, und in der Mitte von PD ⊥⊥, beschreibe um ihren Durchschnittspunkt M mit MP einen ⊙, schneide eine zu dem Peripherie ∠ (α − β) gehörende Sehne DE von D aus ab, verlängere EP″ bis Y, und zeichne ∠ P′XP = α, so ist die verlangte Linie XY konstruirt.

Beweis. △ PP′X ist ∽ △ PDY, da ∠ P′XP oder α = ∠ DPF = ∠ PYD (P′P ist Tangente), und ferner ∠ P′PX = ∠ PDY sein muß. Hieraus folgt

P'X : PY = PP' : PD. Nun ist aber
m : n = PP' : PD konstruirt, also hat man wegen = Verh.

P'X : PY = m : n, während ∠ P''YP = β sein muß, da ∠ EYD = (α − β), und ∠ DYP = α ist.

Anmerkung 1.) Wie in Fall 2) von 2209 hätte auch hier Fall 2) auf Fall 1), und umgekehrt reduzirt werden können.

Anmerkung 2.) Aus der zuletzt gegebenen Analysis geht hervor,

daß der 581 angeführte Ort, welcher durch eine festliegende △ Seite b, und a : h für B bestimmt wird, nur einen einzelnen Fall eines allgemeineren Orts bildet, welcher durch b und eine unter einem beliebigen ∠ aus A nach a führende Transversale t, nebst t : a bedingt ist.

2212. Aufgabe. Gegeben P, P', P''; man soll durch P eine Linie XY so legen, daß ∠ P'XY = α, P''YX = β, und P'X × PY = f² wird.

Fall 1). XY soll P''P' nicht durchschneiden.

Analysis. 1) Fig. 455. Die Analysis des 1sten Falls von 2211 paßt wörtlich hieher, wenn man P'D × P'X = f² statt P'D : P'X = n : m, und 589. a statt 586 liest.

Analysis. 2) Fig. 454. Zieht man aus P' eine gegen die Lage P''P unter ∠ α geneigte Linie P'E, und bestimmt ferner ∠ XDP' = β, so erhält man △ XDP' ∽ △ PP''Y, da ∠ XDP' = ∠ Y gezeichnet ist, und aus der Aehnlichkeit der △△ P'XF und PEF, ∠ XP'F = ∠ EPF, also auch = ∠ P''PY folgt. Hiedurch ergiebt sich P'X : P''P = P'D : PY. Nun ist aber
f : P'X = PY : f gegeben, also hat man d. Zus. f.

f : P''P = P'D : f, und mittelst dieser Proportion P'D, weshalb durch Hilfe von β = ∠ P'DX die Lage von DX bekannt ist, und sich X feststellen läßt, da zugleich auch

320 ein zweiter Ort für diesen Punkt durch PP′ und α bestimmt werden kann.

Fall 2). Fig. 457. XY soll P″P′ durchschneiden.

Analysis. Wäre ∠ P′XP oder α = R, so ergäbe sich im △ P′YP durch P′X × PY = f², da PP′ festliegt, ein Ort für Y. Es frägt sich: ob nicht dasselbe für jede Größe von α statt finden wird. Zieht man, um dies zu untersuchen, YD unter ∠ YDP = ∠ P′XP = α nach P′P, so erhält man △ P′XP ∾ △ PYD, weshalb
PY : PP′ = DY : P′X sein muß. Nun ist aber
f : PY = P′X : f gegeben, also hat man d. Zus. f.

---

f : PP′ = DY : f, durch welche Proportion DY bestimmt werden kann, sich also wirklich nach 93 ein Ort für Y zeichnen läßt, da zugleich ∠ YDP = α bekannt ist. Da nun außerdem noch durch PP″ und ∠ PYP″ = β ein zweiter Ort für Y bestimmt werden kann, so läßt sich dieser Punkt, und mittelst desselben die verlangte Linie XY feststellen.

2213. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll zwei einen ∠ α bildende Linien PX und PY so von P aus ziehen, daß ∠ P′XP = β, ∠ P″YP = γ, und P′X : P″Y = m : n wird.

Analysis. 1) Fig. 458. Zeichnet man die □□ XX′ und YY′, so erhält man ∠ Y′PX′ = 4R − (α+β+γ), PX′ = P′X, PY′ = P″Y, und ∠ X′ = β, ∠ Y′ = γ, weshalb die Aufgabe nach 1981. g gelöst werden kann.

Analysis. 2) Fig. 459. Bestimmt man ∠ P′PP = ϕ, PP = PP′, und ∠ PX′P = β = ∠ PXP′, so ergiebt sich △ PX′P ≅ △ PXP′, da außerdem ∠ X′PP = ∠ P′PX (Subtraktion) ist, also auch PX′ = P′X, weshalb die Aufgabe nach Fall 2) von 2209 gelöst werden kann.

2214. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man soll 2 einen ∠ α bildende Linie PX und PY so von P aus ziehen, daß ∠ P′XP = β, ∠ P″YP = γ, und P′X × P″Y = f² wird.

Analyſis. 1) Die Analyſis 1) von 2213 paßt wörtlich hieher, wenn man in derſelben 1981. h ſtatt 1981. g lieſt.

Analyſis. 2) Die Analyſis 2) von 2213 paßt wörtlich hieher, wenn man bei der Benutzung von 2209 Fall 2, nicht Fall 1 von 2209, ſondern von 2210 zu Hilfe nimmt.

2215. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man ſoll zwei einen ∠ α bildende Linien PX und PY ſo von P aus ziehen, daß ſich ∠ P′XP = β, ∠ P″YP = γ, und P′X : PY = m : n ergiebt.

Analyſis. 1) Fig. 458. Zieht man durch P und P′ ∦ ∦ zu P′X und PX, ſo erhält man ∠ P′X′P = β, X′P = P′X, und ∠ X′PY = ∠ XPY − ∠ XPX′ = α + β − 2R, weshalb die Aufgabe nach 1981. g gelöſt werden kann.

Analyſis 2). Fig. 459. Die Analyſis 2) von 2213 paßt wörtlich hierher, wenn man in derſelben Fall 1) 2211 ſtatt Fall 2) 2209 lieſt.

2216. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″; man ſoll zwei einen ∠ α bildende Linien PX und PY ſo von P aus ziehen, daß ſich ∠ P′XP = β, ∠ P″YP = γ, und P′X × PY = f^2 ergiebt.

Analyſis 1). Fig. 458. Die Analyſis 1) von 2215 paßt wörtlich hieher, wenn man in derſelben 1981. h ſtatt 1981. g lieſt.

Analyſis 2.) Die Analyſis 2) von 2213 paßt wörtlich hierher, wenn man in derſelben 2212 ſtatt 2209 lieſt.

2217. Fig. 460. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man ſoll 3 ſich gegenſeitig berührende Kreislinien ſo zeichnen, daß die eine K und K′, die zweite K und K″, die dritte K″ und K′ rechtwinklig durchſchneidet. (Analogie zu 986.)

Analyſis. Inſofern die vorſtehende Aufgabe zu 986 eine Analogie bildet, wo L, L′, L″ ſtatt K, K′, K″ gegeben waren, und dort ein L, L′ und L″ berührender ⊙ ge-

zeichnet werden mußte, um die Schneidungspunkte der gesuchten ⊙⊙ mit den gegebenen Linien zu erhalten, so läßt sich vermuthen, daß hier ein ähnlicher Weg zum Ziel führen wird. Dies bestätigt sich bei näherer Untersuchung und führt zu der nachfolgenden Auflösung.

Auflösung. Beschreibe nach 2082 einen K, K′, K″ v. A. oder v. J. berührenden ⊙, und ziehe in den Berührungspunkten B, B′, B″ gemeinschaftliche Tangenten, so bilden die erhaltenen Durchschnittspunkte μ, μ', μ'' die gesuchten Mittelpunkte, und μB, $\mu' B''$, $\mu'' B'$ die zugehörigen Radien.

Beweis. Geht deutlich aus der Auflösung hervor.

Anmerkung 1). Sollen die gesuchten ⊙⊙ sich ungleichartig berühren, so hat man hiezu nach 2082 einen K, K′ und K″ ungleichartig berührenden ⊙ zu zeichnen, übrigens aber wie vorher zu verfahren.

Anmerkung 2). So wie in der vorstehenden Aufgabe K, K′, K″, und in 986 L, L′, L″ gegeben sind, können auch die Bedingungen K, K′, L; K, K′, P; K, L, L′; K, L, P; K, P, P′; L, L′, P; P, P′, P″, gegeben sein, wodurch 7 neue Aufgaben entstehen, die sich analog mit 986 und der vorstehenden Aufgabe bezüglich durch: 1879, 2080, 1875, 1878, 577, 1206, 269 lösen lassen, so daß nach der Reihe die 9 Berührungsaufgaben hier als Hilfsaufgaben auftreten.

2218. Fig. 461. Aufgabe. Gegeben K, K′, K″; man soll eine 4te K, K′, K″ so durchschneidende Kreislinie zeichnen, daß die verlängerten Sehnen ein △ ABC mit den vorgeschriebenen Seiten a, b, c ergeben.

Analysis. Da $AD \times AE = AG \times AF$,
$BI \times BH = BG \times BF$, und
$CD \times CE = CI \times CH$ sein muß,

so hat man nach 362 drei gerade Linien L, L′, L″ als Oerter für A, B und C. Zeichnet man also nach 1989 Fall 1) ein △ so aus a, b, c, daß A in L, B in L′, C in L″

fällt, so müssen sich die 6 Durchschnittspunkte der gesuchten Kreislinie mit K, K', K'', also auch die Kreislinie selbst ergeben.

Auflösung. Zeichne einen beliebigen K, K', K'' durchschneidenden ⊙ um Q, verlängere die entstehenden gemeinschaftlichen Sehnen G'F', H'I', D'E', fälle aus zwei Durchschnittspunkten B' und C' ⊥⊥ ℓ' und ℓ'' auf die Centralen M'M'' und MM'', ferner aus dem Schneidungspunkt O einen ⊥ ℓ auf die Centrale MM', und konstruire nach 1989 Fall 1) ein △ ABC mit den Seiten a, b und c, so daß A in ℓ, B in ℓ', C in ℓ'' fällt, so erfüllt eine die Schneidungspunkte G, H und I durchlaufende Kreislinie die Bedingungen der Aufgabe.

Beweis. Da △ ABC nach 1989 gezeichnet ist, so besitzt dasselbe die vorgeschriebenen Seiten a, b und c, und man hat allein noch darzuthun, daß die um μ gezeichnete Kreislinie die 6 Durchschnittspunkte D, E, F, G, H, I durchläuft (vorausgesetzt, daß die Längen von a, b und c eine Durchschneidung aller 3 ⊙⊙ gestatten, da im Gegentheil die Aufgabe unmöglich wird), aus welchem Grunde die 2200 angegebenen Voraussetzungen abgeleitet werden müssen. Zieht man hiezu aus B' die Tangenten B'U und B'U', so ergiebt sich, da

$B'T' \times B'H' = B'F' \times B'G'$ ist

$B'U'^2 = B'U^2$, oder

$B'M''^2 - r''^2 = B'M'^2 - r'^2$, also auch

1) $B'M'^2 - B'M''^2 = r'^2 - r''^2$, oder nach 209

$M'S^2 - M''S^2 = r'^2 - r''^2$, und

$M'B^2 - M''B^2 = r'^2 - r''^2$, also auch

$M'B^2 - r'^2 = M''B^2 - r''^2$, oder wenn man die Tangenten BW und BW' zieht,

$BW^2 = BW'^2$, weshalb

2) $BF \times BG = BI \times BH$ sein muß, und sich in derselben Art

3) $MT^2 - M''T^2 = r^2 - r''^2$, und

4) $CE \times CD = CH \times CI$ ergiebt. Nun folgt nach 209 aus 1) und 3)

$M'O^2 - M''O^2 = r'^2 - r''^2$,
$MO^2 - M''O^2 = r^2 - r''^2$, und durch Subtr.

$MO^2 - M'O^2 = r^2 - r'^2$, also auch
$MA^2 - M'A^2 = r^2 - r'^2$, oder
$MA^2 - r^2 = M'A^2 - r'^2$, und, wenn man die Tangenten AV und AV' zieht,
$AV^2 = AV'^2$, weshalb sich
5) $AD \times AE = AG \times AF$ ergiebt.

2), 4) und 5) bilden aber die Voraussetzungen des 2200 angegebenen Lehrsatzes, folglich durchläuft die Kreislinie um μ wirklich die 6 Punkte D, E, F, G, H und I.

Anmerkung. Aus der Auflösung der vorstehenden Aufgabe ergiebt sich das folgende Gesetz:

wenn man 3 festliegende ⊙⊙ durch eine beliebige Menge Kreislinien schneidet, von denen jede allen 3 zuerst genannten ⊙⊙ begegnet, und hierauf sämmtliche entstandenen gemeinschaftlichen Sehnen oder Tangenten verlängert werden, so fallen die gleichliegenden Winkelspitzen aller hiedurch gebildeten △△ stets in eine gerade Linie.

2219. Fig. 462. Lehrsatz. Theilt man in einem △ eine Seite a nach dem Verhältniß m : n, und zieht die vom Theilungspunkt (D) nach A führende Transversale $t_{(m:n)}$, so ergiebt sich stets

$$mb^2 + nc^2 = (m+n)\, t^2_{(m:n)} + \frac{mn}{m+n}\, a^2.$$

Beweis. Ist AI ⊥ a, so hat man nach 216
$mb^2 = mt^2_{(m:n)} + mCD^2 + 2mCD \times DI$, und
$nc^2 = nt^2_{(m:n)} + nBD^2 - 2nDB \times DI$, also

$mb^2 + nc^2 = (m+n)t^2_{(m:n)} + mCD^2 + nBD^2$, da nach der Voraussetzung $mCD = nDB$ ist.

Nun findet sich ferner aus

$BD : DC = m : n$ d. Abd. u. Quadr.
$a^2 : BD^2 = (m+n)^2 : m^2$, außerdem
$BD^2 : DC^2 = m^2 : n^2$, also auch
$nBD^2 : mDC^2 = m : n$, und durch Add.
$nBD^2 + mDC^2 : m+n = nBD^2 : m$. Es war aber
$BD^2 : a^2 = m^2 : (m+n)^2$, folglich erhält man d. Zuf. f.

$nBD^2 + mDC^2 : a^2 = mn : m+n$, weshalb

$$nBD^2 + mDC^2 = \frac{mn}{m+n} a^2$$ ist, also endlich

$$mb^2 + nc^2 = (m+n)\, t^2_{(m:n)} + \frac{mn}{m+n} a^2$$

sein muß.

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz ist eine Erweiterung von 218.

2220. Fig. 462. Ort. In jedem $\triangle$ ist durch $s^2 = (mb^2 + nc^2)$ (in welchem Ausdruck m und n gegebene Zahlen bezeichnen) und durch a eine Kreislinie als Ort für die Spitze A bestimmt.

Analysis. Nach dem Lehrsatz 2219 ergiebt sich $t_{(m:n)}$ oder DA als der Radius, und D als der Mittelpunkt des Orts, weshalb nur die Zeichnung von DA zu bestimmen ist. Wenn für jeden Punkt des Orts, z. B. A, $mAC^2 + nAB^2 = s^2$ wäre, so müßte auch $mHC^2 + nHB^2 = s^2$, oder $HC^2 + \frac{n}{m} HB^2 = \frac{1}{m} s^2$ sein, also auch, sobald man $HG \perp HC$ so absetzt, daß $HG^2 = \frac{n}{m} HB^2$ ist, $HC^2 + HG^2 = \frac{1}{m} s^2$ werden. Dies fände statt, wenn $CG^2 = \frac{1}{m} s^2$ wäre; folglich ist nur für den Punkt G ein zweiter Ort zu finden, um GH und DH zu erhalten. Dieser ergiebt sich aber schließlich mittelst des $\triangle$ GHB, da von demselben durch $GH^2 = \frac{n}{m} HB^2$, oder $HG^2 : HB^2 = n : m$ die Gestalt, also auch

$\angle$ HBG und die Lage BG gegeben ist. Demnach läßt sich eine Konstruktion des Orts formiren.

Konstruktion. Theile a in D wie m : n, errichte in D einen $\perp$, beschreibe über a einen Halbkreis, verlängere NB, zeichne CG so, daß $CG^2 = \frac{1}{m} s^2$, und fälle den $\perp$ GH, so bildet die um D mit DH gezogene Kreislinie den verlangten Ort.

Beweis. Es ist $BD^2 : DN^2 = BD^2 : BD \times DC = BD : DC = m : n$ gemacht, also auch

$BH^2 : HG^2 = m : n$, und deshalb $HG^2 = \frac{n}{m} BH^2$.

Hiedurch ergiebt sich $\frac{1}{m} s^2$, oder CG^2, oder $HC^2 + HG^2$

$= HC^2 + \frac{n}{m} BH^2$, und daher

$s^2 = mHC^2 + nHB^2$, oder

$s^2 = m(HD + DC)^2 + n(HD - DB)^2$, oder nach 216

$s^2 = mHD^2 + \underline{2mHD \times DC} + mDC^2 + nHD^2 - \underline{2nHD \times DB} + nDB^2$.

Aus $DB : DC = m : n$, oder $HD \times DB : HD \times DC = m : n$ folgt aber $2mHD \times DC = 2nHD \times DB$, demnach muß $s^2 = mHD^2 + mDC^2 + nHD^2 + nDB^2$ sein, und da wie in 2219 aus $DB : DC = m : n$ $mDC^2 + nDB^2 = \frac{mn}{m+n} a^2$ hervorgeht,

$s^2 = (m+n)HD^2 + \frac{mn}{m+n} a^2$. Nun ist aber auch nach 2219 für jeden (beliebig in der Kreislinie um D angenommenen) Punkt A

$mAC^2 + nAB^2 = (m+n)DA^2 + \frac{mn}{m+n} a^2$; folglich ergiebt sich wirklich

$mAC^2 + nAB^2 = s^2$.

Anmerkung. Der vorstehende Ort bildet eine Erweiterung des Orts 220.

2221. Fig. 463. Lehrsatz. Bestimmt man in der Verlängerung einer △seite a einen Punkt D, dessen Entfernungen von den Endpunkten dieser Seite sich wie m : n verhalten, (BD:CD = m:n) und zieht die von jenem Punkt nach A führende Transversale $\tau_{(m:n)}$, so ergiebt sich stets

$$mb^2 - nc^2 = (m-n)\tau^2_{(m:n)} - \frac{mn}{m-n}a^2.$$ (Analogie zu 2219.)

Beweis. Ist AI ⊥ a, so hat man nach 216

$mb^2 = m\tau^2_{(m:n)} + mCD^2 - 2mCD \times DI$, und

$nc^2 = n\tau^2_{(m:n)} + nBD^2 - 2nBD \times DI$, also

$mb^2 - nc^2 = (m-n)\tau^2_{(m:n)} + mCD^2 - nBD^2$, da nach der Voraussetzung mCD = nBD ist.

Nun findet sich ferner aus

$BD : DC = m : n$ durch Subt. u. Quadrirung

$a^2 : BD^2 = (m-n)^2 : m^2$, und außerdem

$BD^2 : DC^2 = m^2 : n^2$, also auch

$nBD^2 : mDC^2 = m : n$, und durch Subtr.,

$nBD^2 - mDC^2 : m-n = nBD^2 : m$. Es war aber

$BD^2 : a^2 = m^2 : (m-n)^2$, folglich erhält man

b. Zus. f.

$nBD^2 - mDC^2 : a^2 = mn : m-n$, weshalb

$$nBD^2 - mDC^2 = \frac{mn}{m-n}a^2, \text{ oder}$$

$$mDC^2 - nBD^2 = -\frac{mn}{m-n}a^2 \text{ ist, also endlich}$$

$$mb^2 - nc^2 = (m-n)\tau^2_{(m:n)} - \frac{mn}{m-n}a^2$$

sein muß.

2222. Fig. 463. Ort. In jedem △ ist durch $d^2 = (mb^2 - nc^2)$, [in welchem Ausdruck m und n gegebene Zahlen bezeichnen] und durch a ein Ort für die Spitze A bestimmt. (Analogie zu 2220.)

Analysis. Nach dem Lehrsatz 2221 ergiebt sich eine Linie DA oder $\tau_{(m:n)}$, welche BD:DC = m:n bestimmt,

als der Radius, und D als der Mittelpunkt des gesuchten Orts, weshalb nur die Zeichnung von DA zu bestimmen ist. Wenn für jeden Punkt des Orts, z. B. A, $mAC^2 - nAB^2 = d^2$ wäre, so müßte auch $mHC^2 - nHB^2 = d^2$, oder $\frac{m}{n} HC^2 - HB^2 = \frac{1}{n} d^2$ sein, und ferner, sobald man in B auf a einen $\perp$ errichtet, und HG so abschneidet, daß $HG^2 = \frac{m}{n} HC^2$ ist, $HG^2 - HB^2 = \frac{1}{n} d^2$ werden. Dies fände statt, wenn $BG^2 = \frac{1}{n} d^2$ wäre; folglich ist nur H festzustellen, um DH zu erhalten. Dieser Punkt ergiebt sich schließlich mittelst des $\triangle CHG$, da sich dasselbe durch $HG^2 = \frac{m}{n} HC^2$, oder $HG^2 : HC^2 = m : n$, und durch GC und $\angle GCH$ vollständig bestimmt zeigt. Demnach läßt sich eine Konstruktion des Orts formiren.

Konstruktion. Bestimme D in der Verlängerung von a so, daß $BD : DC = m : n$, errichte in B auf a einen $\perp$, setze auf demselben BG dergestalt ab, daß $BG^2 = \frac{1}{n} d^2$, fälle aus D auf die Verlängerung von GC einen $\perp$ DO, zeichne $BO = OD$, beschreibe um O mit OD einen $\odot$, und lege $GH \neq DN$, so bildet die um D mit DH gezeichnete Kreislinie den in Rede stehenden Ort.

Beweis. Nach 396 Anmerk. 2) ist $DN^2 = BD \times DC$, oder $CD^2 : DN^2 = CD^2 : BD \times DC = CD : BD = n : m$, also auch $CH^2 : HG^2 = n : m$, und deshalb $HG^2 = \frac{m}{n} CH^2$. Hiedurch ergiebt sich

$\frac{1}{n} d^2$, oder BG^2, oder $HG^2 - BH^2 = \frac{m}{n} CH^2 - BH^2$, und daher

$d^2 = mCH^2 - nBH^2$, oder

$d^2 = m(HD - CD)^2 - n(BD - HD)^2$, oder nach 216

$d^2 = mHD^2 - \underline{2mHD \times CD} + mCD^2 - nBD^2 + \underline{2nBD \times HD} - nHD^2$.

Aus $BD:CD = m:n$, oder $BD \times HD : HD \times CD = m:n$ folgt aber $2mHD \times CD = 2nBD \times HD$, demnach muß $d^2 = mHD^2 + mCD^2 - nBD^2 - nHD^2$ sein, und da wir in 2221 aus $BD:CD = m:n$

$mCD^2 - nBD^2 = -\frac{mn}{m-n} a^2$ hervorgeht,

$d^2 = (m-n)HD^2 - \frac{mn}{m-n} a^2$. Nun ist aber auch nach 2221 für jeden (beliebig in der Kreislinie um D angenommenen) Punkt A

$mAC^2 - nAB^2 = (m-n)DA^2 - \frac{mn}{m-n} a^2$; folglich ergiebt sich wirklich

$mAC^2 - nAB^2 = d^2$.

Anmerkung 1). Nimmt man m und $n = 1$, so müßte $BD = CD$ werden. Dies sagt unter den vorhandenen Umständen aus, daß HD für diese Werthe ∞ ist, die Kreislinie mit dem unendlich weit von H entfernten Mittelpunkt sich also in einen auf BC in H stehenden $\perp$ verwandelt, welches mit 211 übereinstimmt.

Anmerkung 2). Die Zeichnung des vorstehenden Orts giebt für 211, einen wie eben angeführt wurde einzelnen Fall desselben, zugleich eine bessere als die in jener Nummer gezeigte Konstruktion. Bestimmt man nämlich $BG = d$, und errichtet in der Mitte von GC auf dieser Linie einen $\perp$, so bildet der im Durchschnittspunkt H desselben mit BC auf dieser Seite errichtete $\perp$ den Ort, von welchem jeder mit B und C verbundene Punkt X, $CX^2 - BX^2 = d^2$ ergiebt.

2223. Fig. 464. Ort. Wenn die Summe der Quadrate aller Entfernungen eines Punktes X von einer beliebigen Menge gegebener Punkte P, P', P'' .... ꝛc., oder $x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots = s^2$ bestimmt ist, so befindet sich X in einer konstruirbaren Kreislinie.

Analysis. Es ist nach 218

$2\,OX^2 + \frac{1}{2}PP'^2 = x^2 + x'^2$, wenn $PO : OP = 1:1$.

Ferner hat man nach 2219

$3\,O'X^2 + \frac{2}{3}OP''^2 = 2OX^2 + x''^2$, wenn $OO' : O'P'' = 1:2$; also muß

$3\,O'X^2 + \frac{1}{2}PP'^2 + \frac{2}{3}OP''^2 = x^2 + x'^2 + x''^2$ sein. Eben so erhält man

$4\,O''X^2 + \frac{1}{2}OP'''^2 = 3\,O'X^2 + x'''^2$, wenn $O'O'' : O''P''' = 1:3$; folglich ergiebt sich

$4O''X^2 + \frac{1}{2}PP'^2 + \frac{2}{3}OP''^2 + \frac{1}{4}O'P'''^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2$.

Ist demnach $x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 = s^2$ bestimmt, also $4\,O''X^2 = s^2 - (\frac{1}{2}PP'^2 + \frac{2}{3}OP''^2 + \frac{1}{4}O'P'''^2)$, und daher $O''X$ bekannt, so bildet diese Länge den Radius des Kreisorts, welcher um den konstruirbaren Punkt O'' (Schwerpunkt für P, P', P'', P''') zu beschreiben ist.

Konstruktion.

Theile PP' so in O, daß $PO : OP' = 1:1$ ist, dann
, OP'' , , O', , $OO' : O'P'' = 1:2$, ,
, $O'P'''$, , O'', , $O'O'' : O''P''' = 1:3$, u.s.w.,
und bestimme, wenn n Punkte gegeben sind, eine Linie l dergestalt, daß

$$nl^2 = s^2 - \left(\tfrac{1}{2}PP'^2 + \tfrac{2}{3}OP''^2 + \tfrac{3}{4}O'P'''^2 + \ldots + \frac{n-1}{n}(O_{n-3}P_{n-1})^2\right)$$

wird, also bei $n = 4$ z. B. $4l^2 = s^2 - (\frac{1}{2}PP'^2 + \frac{2}{3}OP''^2 + \frac{3}{4}O'P'''^2)$ ist, so bildet die mit dieser Länge l um den zuletzt erhaltenen Theilungspunkt O_{n-2} (Schwerpunkt für die gegebenen Punkte), (O'' bei $n = 4$) beschriebene Kreislinie den zu konstruirenden Ort.

Beweis. Wenn 4 Punkte gegeben sind, hat man nach der Konstruktion

$s^2 = 4O''X^2 + \frac{1}{2}PP'^2 + \frac{1}{2}OP'^2 + \frac{1}{2}O'P'''^2$. Nun ist nach 2219

$4O''X^2 + \frac{1}{2}O'P'''^2 = 3O'X^2 + x'''^2$, da $O'O'' : O''P''' = 1:3$, also muß

$s^2 = 3O'X^2 + x'''^2 + \frac{1}{2}PP'^2 + \frac{2}{3}OP'^2$ sein. Ferner ist

$3O'X^2 + \frac{2}{3}OP'^2 = 2OX^2 + x''^2$, da $OO' : O'P'' = 1:2$, also muß

$s^2 = 2OX^2 + x''^2 + x'''^2 + \frac{1}{2}PP'^2$ sein. Endlich ist

$2OX^2 + \frac{1}{2}PP'^2 = x^2 + x'^2$, da $PO : OP' = 1:1$; folglich ergiebt sich

$s^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2$, w. z. b. w.

Anmerkung. Der vorstehende Ort bildet eine Erweiterung des Orts 220, da statt der zwei Punkte des letzteren eine beliebige Menge derselben unter gleichen Bedingungen gegeben ist.

2224. Fig. 465. Ort. Zieht man bei einer beliebigen Menge festliegend gegebener Kreislinien K, K', K'' ... ꝛc. aus einem Punkte X an jede derselben eine Tangente, so ergiebt sich eine bestimmbare Kreislinie als Ort für X, wenn die Summe der Quadrate aller dieser Tangenten, $2y^2 + 2y'^2 + 2y''^2 + \ldots$, eine vorgeschriebene Größe s^2 hat.

Analysis. Bezeichnen x, x', x'' ꝛc. die Entfernungen des Punktes X von M, M', M'' ꝛc., so ergiebt sich, da $y^2 = x^2 - r^2$, $y'^2 = x'^2 - r'^2$, u. s. w. ist, daß

$x^2 - r^2 + x'^2 - r'^2 + x''^2 - r''^2 + \ldots = \frac{s^2}{2}$, also

$x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots = \frac{s^2}{2} + (r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots)$ sein muß. Hieraus geht hervor, daß man den für die Punkte M, M', M'' ... geltenden Ort 2223, unter den durch die Gleichung ausgedrückten Bedingungen, zugleich als Ort in Beziehung auf die ⊙⊙ K, K', K'', ꝛc. erhält.

Anmerkung 1). Wie in 2223, nur ist 353 statt 220, und ⊙⊙ statt Punkte zu lesen.

Anmerkung 2). Auf einem ähnlichen Wege ergiebt sich auch eine Kreislinie als Ort für X, wenn man zugleich Punkte und ⊙⊙ annimmt, und gemeinschaftlich für die in X zusammenstoßenden Linien und Tangenten die Bedingungen des letzten und vorletzten Orts festsetzt.

2225. Fig. 464. Aufgabe. Es sind 2 Punktgruppen G und G gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe der Quadrate aller aus X nach G führenden Linien $= s^2$, und die Summe der Quadrate aller aus demselben Punkte nach der anderen Gruppe G führenden Linien $= \sigma^2$ ergiebt.

Analysis. G und s^2 bestimmen nach 2223 den einen, und G und σ^2 in derselben Art den zweiten Ort für X.

2226. Fig. 465. Aufgabe. Es sind 2 Kreisgruppen G und G gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe der Quadrate aller aus X nach der Gruppe G führenden Tangenten $= s^2$, und die Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt nach der zweiten Gruppe G gelegten Berührungslinien $= \sigma^2$ ergiebt.

Analysis. Durch zweimalige Anwendung des Orts 2224 ergiebt sich der gesuchte Punkt.

Anmerkung. Durch gleichzeitige Benutzung der Oerter 2223 und 2224, oder eines dieser beiden Oerter mit den früher entwickelten z. B. 593, 601, ꝛc., oder durch die Anmerkung 2) von 2224 lassen sich eine Menge hieher gehörender Aufgaben bilden.

2227. Fig. 464. Ort. Wenn aus einem Punkte X nach einer beliebigen Menge gegebener Punkte P, P′, P″ .... ꝛc. gerade Linien x, x′, x″, ... ꝛc. gezogen werden, und $mx^2 + nx'^2 + px''^2 + \ldots$ ꝛc.,

in welchem Ausdruck m, n, o, p bestimmte Zahlen bezeichnen, $= s^2$ bekannt ist, so ergiebt sich eine bestimmbare Kreislinie, als Ort für X.

Analysis. Es ist nach 2219

$(m+n)OX^2 + \frac{mn}{m+n} PP'^2 = mx^2 + nx'^2$, wenn $PO : OP' = n : m$. Ferner hat man $(m+n+o)O'X^2 + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 = (m+n)OX^2 + ox''^2$, wenn $OO' : O'P'' = o : m+n$; also muß

$(m+n+o)O'X^2 + \frac{mn}{m+n} PP'^2 + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 = mx^2 + nx'^2 + ox''^2$ sein. Eben so erhält man

$(m+n+o+p)O''X^2 + \frac{(m+n+o)p}{m+n+o+p} O''P'''^2 = (m+n+o)O'X^2 + px'''^2$, wenn $O'O'' : O''P''' = p : m+n+o$; folglich ergiebt sich

$(m+n+o+p)O''X^2 + \frac{mn}{m+n} PP'^2 + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 + \frac{(m+n+o)p}{m+n+o+p} O'P'''^2 = mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + px'''^2$.

Ist demnach $mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + px'''^2 = s^2$ bestimmt, also $(m+n+o+p)O''X^2 = s^2 - \left(\frac{mn}{m+n} PP'^2 + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 + \frac{(m+n+o)p}{m+n+o+p} O'P'''^2\right)$, und daher $O''X$ bekannt, so bildet diese Länge den Radius des Kreisorts, welcher um den konstruirbaren Punkt O'' zu beschreiben ist.

Anmerkung. Der vorstehende Ort bildet eine Erweiterung des Orts 2223, da für den letzteren die Zahlen m, n, o, p ꝛc. nur sämmtlich in 1 übergegangen sind. Zugleich bildet derselbe ferner eine Erweiterung des Orts 2220, da in jenem nur statt der zwei Punkte des letzteren eine beliebige Menge derselben unter gleichen Bedingungen gegeben ist.

2228. Fig. 456. Ort. Wenn aus einem Punkte X nach einer beliebigen Menge festliegend gege-

bener Kreislinien K, K′, K″ .... ꝛc. Tangenten y, y′, y″ .... ꝛc. gelegt werden, und $2my^2 + 2ny'^2 + 2oy''^2 + \ldots$ ꝛc., in welchem Ausdruck m, n, o bestimmte Zahlen bezeichnen, $= a^2$ bekannt ist, so ergiebt sich eine bestimmbare Kreislinie als Ort für X.

Analysis. Bezeichnen x, x′, x″ ... ꝛc. die Entfernungen des Punktes X von M, M′, M″, ꝛc., so ergiebt sich, da $my^2 = mx^2 - mr^2$, $ny'^2 = nx'^2 - nr'^2$, ꝛc. ist, daß

$$my^2 - mr^2 + nx'^2 - nr'^2 + ox''^2 - or''^2 + \ldots = \frac{a^2}{2},$$ also

$$mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots = \frac{a^2}{2} - (mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots)$$

sein muß. Hieraus geht hervor, daß man den für die Punkte M, M′, M″ ... geltenden Ort 2227 unter den durch die Gleichung ausgedrückten Bedingungen zugleich als Ort in Beziehung auf die Kreise K, K′, K″, ꝛc. erhält.

Anmerkung 1.) 2224 bildet einen einzelnen Fall dieses Orts, da in jenem die Zahlen n, m, o ꝛc. des letzteren sämmtlich in 1 über gegangen sind.

Anmerkung 2.) Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2229. Aufgaben. Erweiterungen von 2225 und 2226, analog mit den in 2227 und 2228 gegebenen Erweiterungen von 2223 und 2224.

2230. Fig. 464. Ort. Wenn die Summe der Quadrate aller aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe G führenden Linien weniger der Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt X nach einer zweiten Punktgruppe G gezogenen Linien $= d^2$ gegeben ist, so läßt sich eine Kreislinie als Ort für X bestimmen. (Analogie zu 2223).

Analysis. Bezeichnen l und l die Verbindungslinien der Schwerpunkte von den Gruppen G und G mit X, ferner x, x′, x″, ꝛc.; r, r′, r″, ꝛc. die aus X nach G und G führenden n und n Linien, so ergiebt sich, wenn man wörtlich

wie in der Analysis von 2223 schließt, und die Summe der in der Endgleichung derselben mitgegebenen Glieder $\frac{1}{2}PP'^2 + \frac{1}{4}OP''^2 + \frac{1}{4}O'P'''^2 + \ldots$ durch f^2, und bei der zweiten Gruppe durch f'^2 ausdrückt,

$nl^2 + f^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots\ldots\ldots$, und

$nl'^2 + f'^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots\ldots\ldots$, also auch

---

$nl^2 - nl'^2 + f^2 - f'^2 = d^2$, weshalb

$nl^2 - nl'^2 = d^2 + f'^2 - f^2$ sein muß, folglich die Konstruktion des verlangten Orts, insofern beide Schwerpunkte wie in der Auflösung von 2194 festgestellt werden können, durch Zeichnung des Orts 2222 geschehen kann.

Anmerkung. Wie die Anmerkung zu 2223, nur 211 statt 220 gelesen.

2231. Fig. 465. Ort. Wie 2230, nur ist Kreisgruppe statt Punktgruppe, und Tangenten statt Linien zu lesen. (Analogie zu 2224.)

Analysis. Bezeichnen y, y', y'', &c., und y, y', y'', &c. die aus X nach G und G führenden Tangenten; x, x', x'', &c., und x, x', x'', &c. aber die nach den Mittelpunkten M, M', &c., und M, M', &c. der Gruppen G und G führenden Linien, so ergiebt sich ganz wie in 2224

$x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots = y^2 + y'^2 + y''^2 + \ldots + (r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots)$, und

$x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots = y^2 + y'^2 + \ldots + (r^2 + r'^2 + \ldots)$, weshalb

---

$(x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots) - (y^2 + y'^2 + \ldots) = \frac{d^2}{2} + (r^2 + r'^2 + \ldots) - (r^2 + r'^2 + \ldots)$ sein muß. Hieraus geht hervor, daß man den für die Punktgruppen M, M', M'', &c., und M, M', M'', &c. geltenden Ort 2230 unter den durch die letzte Gleichung ausgedrückten Bedingungen zugleich als Ort in Beziehung auf die beiden Kreisgruppen G und G erhält.

Anmerkung 1) Wie in 2223, nur ist 355 statt 220, und ⊙⊙ statt Punkte zu lesen.

Anmerkung 2) Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2232. Aufgabe. Es sind 4 Punktgruppen G, G', und G und G' gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich, wenn man denselben mit sämmtlichen Punkten der 4 Gruppen verbindet, die Summe der Quadrate aller nach G führenden Linien weniger der Summe der Quadrate aller nach G' führenden Linien = d^2, und die Summe der Quadrate aller nach G führenden Linien weniger der Summe der Quadrate aller nach G' führenden Linien = d^2 ergiebt.

Analysis. Durch G, G' und d^2 ergiebt sich nach 2230 ein Ort, und durch G, G' und d^2 in derselben Art der zweite Ort für X.

2233. Aufgabe. Wie 2232, nur ist Kreisgruppen statt Punktgruppen, ⊙⊙ statt Punkte, Tangenten statt Linien zu lesen.

Analysis. Wie in 2232, nur ist 2231 statt 2230 zu lesen.

2234. Aufgabe. Es sind 3 Punktgruppen G G' und G gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich, wenn man denselben mit sämmtlichen Punkten der 3 Gruppen verbindet, die Summe der Quadrate aller nach G führenden Linien weniger der Summe der Quadrate aller nach G' führenden Linien = d^2, und die Summe der Quadrate aller nach G führenden Linien = f^2 ergiebt.

Analysis. Durch G, G' und d^2 ergiebt sich nach 2230 ein Ort, und durch G und f^2 nach 2223 der zweite Ort für X.

2235. Aufgabe. Wie 2234, nur ist Kreisgruppen statt Punktgruppen, ⊙⊙ statt Punkte, und Tangenten statt Linien zu lesen.

Analysis. Wie in 2234, nur ist 2231 statt 2230 und 2224 statt 2223 zu lesen.

2236. Fig. 464. Ort. Führen aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe G die Linien x, x', x'', ꝛc., und nach einer zweiten Punktgruppe G die Linien r, r', r'', ꝛc., ſo ergiebt ſich ein Ort für X, wenn $(mx^2+nx'^2+ox''^2+\ldots)-(mr^2+nr'^2+\ldots)=d^2$ beſtimmt iſt, und m, n, o, ꝛc.; m, n, o, ꝛc. gegebene Zahlen ſind.

Analyſis. Schließt man in Beziehung auf beide Gruppen G und G wörtlich wie in der Analyſis vom 2227, und drückt die in der Endgleichung derſelben vorkommende Summe der mitgegebenen Glieder $\frac{mn}{m+n}PP'^2+\frac{(m+n)o}{m+n+o}OP''^2+\ldots$ durch f^2 und f^2 aus, ſo ergiebt ſich $(m+n+o+p)\,O''X^2+f^2=mx^2+nx'^2+ox''^2+px'''^2$, und $(m+n+o)\,O'X^2+f^2=mr^2+nr'^2+or''^2$, alſo auch

$(m+n+o+p)\,O''X^2-(m+n+o)\,O'X^2+f^2-f^2=d^2$, weshalb $(m+n+o+p)\,O''X^2-(m+n+o)\,O'X^2=d^2+f^2-f^2$ gegeben iſt. Hieraus geht hervor, daß die Konſtruktion des verlangten Orts, inſofern die Punkte O'' und O' gleichfalls bekannt ſind, durch Zeichnung des Orts 2222 geſchehen kann.

Anmerkung. Wie die Anmerkung zu 2227, nur iſt 2230 ſtatt 2223 und 2222 ſtatt 2220 zu leſen.

2237. Fig. 465. Ort. Führen aus einem Punkte X nach einer Kreisgruppe G die Tangenten y, y', y'', ꝛc., und nach einer zweiten Kreisgruppe G die Tangenten y, y', y'', ꝛc., ſo ergiebt ſich ein Ort für X, wenn $(2my^2+2ny'^2+2oy''^2+\ldots)-(2my^2+2ny'^2+2oy''^2+\ldots)=d^2$ beſtimmt iſt, und m, n, o, ꝛc.; m, n, o, ꝛc. gegebene Zahlen ſind.

Analyſis. Bezeichnen x, x', x'', ꝛc. die Entfernungen des Punktes X von M, M', M'', ꝛc., und r, r', r'', ꝛc. die Entfernungen deſſelben Punktes von R, R', R'', ꝛc.,

so ergiebt sich, da $my^2 = mx^2 - mr^2$, $ny'^2 = nx'^2 - nr'^2$, ꝛc. und $my^2 = mx^2 - mr^2$, $ny'^2 = nx'^2 - nr'^2$ ist, daß

$(mx^2 - mr^2 + nx'^2 - nr'^2 + ox''^2 - or''^2 + \ldots) -$

$(mx^2 - mr^2 + nx'^2 - nr'^2 + ox''^2 - or''^2 + \ldots) = \frac{d^2}{2}$, also

$(mx + nx' + ox'' + \ldots) - (mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots) = \frac{d^2}{2} +$

$(mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots) - (mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots)$ sein muß. Hieraus geht hervor, daß man den für die 2 Punktgruppen M, M′, M″, ꝛc., und R, R′, R″, ꝛc. geltenden Ort 2236 unter den durch die Gleichung ausgedrückten Bedingungen zugleich als Ort in Beziehung auf die Kreisgruppen G und G erhält.

Anmerkung 1.) Wie Anmerkung 1) zu 2228, nur ist 2231 statt 2224 zu lesen.

Anmerkung 2.) Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2238. Aufgaben. Erweiterungen von 2232, 2233, 2234, 2235, analog mit den in 2236 und 2237 angeführten Erweiterungen von 2230 und 2231.

2239. Fig. 464. Ort. Wenn die Summe der Quadrate aller aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe G führenden Linien eben so groß ist als die Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt X nach einer zweiten Punktgruppe G gezogenen Linien, so läßt sich eine Kreislinie als Ort für X bestimmen.

Analysis. Bezeichnen l und l die Verbindungslinien der Schwerpunkte von den Gruppen G und G mit X, ferner x, x′, x″, ꝛc.; r, r′, r″, ꝛc. die aus X nach G und G führenden n und n Linien, so ergiebt sich, wenn man wörtlich wie in der Analysis von 2223 schließt, und die Summe der in der Endgleichung derselben bekannten Glieder $\frac{1}{n}PP'^2 + \frac{1}{n}OP''^2 + \frac{1}{n}O'P'''^2 + \ldots$ durch f^2, und bei der zweiten Gruppe durch f^2 ausdrückt,

$nl^2 + f^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots$, und
$nl^2 + f^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots$, also auch

$nl^2 + f^2 = nl^2 + f^2$, weshalb
$nl^2 - nl^2 = f^2 - f^2$ sein muß, folglich die Konstruktion des verlangten Orts, insofern beide Schwerpunkte wie in der Auflösung von 2194 festgestellt werden können, durch Zeichnung des Orts 2222 geschehen kann.

Anmerkung. Wie die Anmerkung zu 2223, nur ist 72 statt 220 zu lesen.

2240. Fig. 465. Ort. Wie 2239, nur ist Kreisgruppe statt Punktgruppe, und Tangenten statt Linien zu lesen.

Analysis. Bezeichnen y, y', y'', &c., und η, η', η'', &c. die aus X nach G und G führenden Tangenten; x, x', x'', &c., und r, r', r'', &c. aber die nach den Mittelpunkten M, M', M'', &c., und R, R', R'', &c. der Gruppen G und G führenden Linien, so ergiebt sich ganz wie in 2224.
$x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots = (y^2 + y'^2 y''^2 + \ldots) + (r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots)$, und
$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + \ldots = (y^2 + y'^2 + y''^2 + y'''^2 + \ldots)$
$+ (r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + \ldots)$; weshalb (d. G.)

$(x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots) - (r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + \ldots)$
$= (r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots) - (r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + \ldots)$ sein muß. Hieraus geht hervor, daß man den für die Punktgruppen M, M', M'', &c., und R, R', R'', &c. geltenden Ort 2230 unter den durch die letzte Gleichung ausgedrückten Bedingungen zugleich als Ort in Beziehung auf die beiden Kreisgruppen G und G erhält.

Anmerkung 1). Wie die Anmerkung zu 2223, nur ist 362 statt 220, und ⊙⊙ statt Punkte zu lesen.

Anmerkung 2.) Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2241. Fig. 464. Aufgabe. Es sind 3 Punktgruppen G, G und Γ gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe der Quadrate aller aus diesem Punkt nach jeder ein-

zelnen Gruppe führenden Linien bei allen Gruppen von derselben Größe ergiebt.

Analysis. Durch G und G erhält man nach 2239 den einen, und durch G und Γ in derselben Art den zweiten Ort für X.

2242. Fig. 465. Aufgabe. Es sind 3 Kreisgruppen G, G und Γ gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe der Quadrate aller aus diesem Punkt nach jeder einzelnen Gruppe führenden Tangenten bei allen Gruppen von derselben Größe ergiebt.

Analysis. Durch G und G erhält man nach 2240 den einen, und durch G und Γ in derselben Art den zweiten Ort für X.

2243. Ort. Wenn 4 Punktgruppen G, G′, G, G′ gegeben sind, und die Summe der Quadrate aller aus einem Punkte X nach G führenden Linien weniger der Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt nach G′ führenden Linien eben so groß ist als die Summe der Quadrate aller aus X nach G führenden Linien weniger der Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt nach G′ führenden Linien, so läßt sich eine Kreislinie als Ort für X bestimmen.

Analysis. Aus den Bedingungen des Orts folgt, daß die Summe der Quadrate aller aus X nach den Gruppen G und G′ führenden Linien eben so groß sein muß als die Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt nach den Gruppen G und G′ führenden Linien. Betrachtet man demnach das Gruppenpaar G und G′ als eine, und das Gruppenpaar G und G′ als eine zweite Menge zusammengehöriger Punkte, so zeigt sich 2239 als der verlangte Ort für X.

2244. Ort. Wie 2243, nur ist Kreisgruppen statt Punktgruppen, Tangenten statt Linien zu lesen.

Analysis. Stimmt mit der Analysis 2243 überein, nur muß Tangenten statt Linien, ⊙⊙ statt Punkte gelesen werden.

2245. Aufgabe. Es sind 6 Punktgruppen G, G′, 𝔊, 𝔊′, Γ, Γ' gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich, wenn

s^2 die (unbek.) Sum. der Quadrate aller von X nach G
s'^2 " " " " " " " " " " G′
$\mathfrak{s}^2$ " " " " " " " " " " 𝔊
$\mathfrak{s}'^2$ " " " " " " " " " " 𝔊′
σ^2 " " " " " " " " " " Γ
σ'^2 " " " " " " " " " " Γ'

führenden Linien bezeichnet,

$s^2 - s'^2 = \mathfrak{s}^2 - \mathfrak{s}'^2 = \sigma^2 - \sigma'^2$ ergiebt.

Analysis. Durch G, G′, 𝔊, 𝔊′ ergiebt sich nach 2243 der eine, und durch 𝔊, 𝔊′, Γ, Γ' der andere Ort für X.

2246. Aufgabe. } Wie 2245, nur ist Kreisgruppen
Analysis. } statt Punktgruppen, Tangenten statt Linien, 2244 statt 2243 zu lesen.

2247. Fig. 464. Ort. Führen aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe G die Linien x, x′, x″, ꝛc., und nach einer zweiten Punktgruppe 𝔊 die Linien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, ꝛc., so ergiebt sich eine Kreislinie als Ort für X, wenn $mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots = m\mathfrak{x}^2 + n\mathfrak{x}'^2 + o\mathfrak{x}''^2 + \ldots$ ist, und m, n, o, ꝛc.; $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, ꝛc. gegebene Zahlen sind. (Erweiterung von 2239.)

Analysis. Schließt man in Beziehung auf beide Gruppen G und 𝔊 wörtlich wie in der Analysis von 2227, und drückt die in der Endgleichung derselben vorkommende Summe der mitgegebenen Glieder $\frac{mn}{m+n} PP'^2 + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 + \ldots$ durch $\mathfrak{P}$, und für die Gruppe 𝔊 durch $\mathfrak{f}^2$ aus, so ergiebt sich

$(m+n+o+p)\,O''X^2+f^2 = mx^2+nx'^2+ox''^2+px'''^2$, und
$(m+n+o)\,O'X^2+f^2 = mx^2+nx'^2+ox''^2$, also auch

$(m+n+o+p)\,O''X^2+f^2 = (m+n+o)\,O'X^2+f^2$, weshalb
$(m+n+o+p)\,O''X^2-(m+n+o)\,O'X^2 = f^2-f^2$ gegeben ist. Hieraus geht hervor, daß die Konstruktion des verlangten Orts, insofern die Punkte O'' und O' gleichfalls bekannt sind, durch Zeichnung des Orts 2222 geschehen kann.

2248. Fig. 465. Ort. Führen aus einem Punkte X nach einer Kreisgruppe G die Tangenten y, y', y'', 2c., und nach einer zweiten Kreisgruppe G die Tangenten y, y', y'', 2c., so ergiebt sich ein Ort für X, wenn $my^2+ny'^2+oy''^2+\ldots = my^2+ny'^2+oy''^2+\ldots$ ist, und m, n, o, 2c.; m, n, o, 2c. gegebene Zahlen sind. (Erweiterung von 2240.)

Analysis. Bezeichnen x, x', x'', 2c. die Entfernungen des Punktes X von M, M', M'', 2c., und r, r', r'', 2c. desselben Punktes von M, M', M'', 2c., so ergiebt sich, da $my^2 = mx^2-mr^2$, $ny'^2 = nx'^2-nr'^2$, 2c., und $my^2 = mr^2-mr^2$, $ny'^2 = nr'^2-nr'^2$, 2c. ist, daß
$mx^2-mr^2+nx'^2-nr'^2+ox''^2-nr''^2\ldots. =$
$my^2-mr^2+nr'-nr'^2+or''^2-or''^2+\ldots$, also
$(mx^2+nx'^2+ox''^2+\ldots)-(mr^2+nr'^2+or''^2+\ldots) =$
$(mr^2+nr'^2+or''^2+\ldots)-(mr^2+nr'^2+or''^2+\ldots)$ sein muß. Hieraus geht hervor, daß man den für die 2 Punktgruppen M, M', M'', 2c., und M, M', M'', 2c. geltenden Ort 2236, unter den durch die Gleichung ausgedrückten Bedingungen, zugleich als Ort in Beziehung auf die beiden Kreisgruppen G und G erhält.

Anmerkung. Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2249. Aufgaben. Erweiterungen von 2241 und 2242, analog mit den in 2247 und 2248 angeführten Erweiterungen von 2239 und 2240.

2250. Ort. Führen aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe Gd. Linien x', x'', x''', x^{IV}, 2c.,

nach einer Punktgruppe $G_{,}$ d. Linien $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, $x_{,,,,}$ ꝛc.
" " " $\mathfrak{G}$ " " $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$, ꝛc. und
" " " $\mathfrak{G}_{,}$ " " $\mathfrak{x}_{,}$, $\mathfrak{x}_{,,}$, $\mathfrak{x}_{,,,}$, ꝛc. so
ergiebt sich ein Ort für X, wenn
$(mx'^2 + nx''^2 + ox'''^2 + \ldots) - (m_{,}x_{,}^2 + n_{,}x_{,,}^2 + o_{,}x_{,,,}^2 + \ldots) =$
$(m\mathfrak{x}'^2 + n\mathfrak{x}''^2 + o\mathfrak{x}'''^2 + \ldots) - (m_{,}\mathfrak{x}_{,}^2 + n_{,}\mathfrak{x}_{,,}^2 + o_{,}\mathfrak{x}_{,,,}^2 + \ldots)$
ist, und m, n, ꝛc.; $m_{,}$, $n_{,}$, ꝛc.; m, n, ꝛc.; $m_{,}$, $n_{,}$, ꝛc. gegebene Zahlen sind. (Erweiterung von 2243.)

Analysis. Aus den Bedingungen des Orts folgt, daß
$(mx'^2 + nx''^2 + ox'''^2 + \ldots) + (m_{,}x_{,}^2 + n_{,}x_{,,}^2 + o_{,}x_{,,,}^2 + \ldots) =$
$(m_{,}x_{,}^2 + n_{,}x_{,,}^2 + o_{,}x_{,,,}^2 + \ldots) + (m\mathfrak{x}'^2 + n\mathfrak{x}''^2 + o\mathfrak{x}'''^2 + \ldots)$ ist.
Betrachtet man demnach das Gruppenpaar G und $\mathfrak{G}$ als eine, und das Gruppenpaar $G_{,}$ und $\mathfrak{G}_{,}$ als eine zweite Menge zusammengehörender Punkte, so zeigt sich 2248 als der verlangte Ort für X.

2251. Ort. } Wie 2250, nur ist Kreisgruppe statt Punkt-
Analysis. } gruppe, Tangenten statt Linien, ⊙⊙ statt Punkte, 2249 statt 2248 zu lesen. (Erweiterung von 2244.)

Anmerkung. Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2252. Aufgaben. Erweiterungen von 2245 und 2246, analog mit den in 2250 und 2251 angeführten Erweiterungen von 2243 und 2244.

2253. Fig. 466. Ort. Wenn aus einem Punkte X nach 2 festliegenden Punkten P und P′ Linien x und y führen, von denen bekannt ist, daß $x^2 \pm a^2 : y^2 \pm b^2 = m : n$ ist, a und b aber gegebene Längen sind, so läßt sich ein Ort für X bestimmen.

Analysis. Bestimmt man $p^2 : q^2 = m : n$ nach 472, also $x^2 + a^2 : y^2 + b^2 = p^2 : q^2$, so ergiebt sich d. Subtr. d. h. Gl. $x^2 - (p^2 - a^2) : y^2 - (q^2 - b^2) = p^2 : q^2$, da sowohl p^2 als q^2 größer als a^2 und b^2 gewählt werden können. Verwandelt man darauf $p^2 - a^2$, und $q^2 - b^2$ in r^2 und r'^2, weshalb $x^2 - r^2 : y^2 - r'^2 = p^2 : q^2$ sein müßte, und beschreibt um P und P′ Kreislinien K und K′, mit den gegebenen Längen r und r′, so ergeben

sich die aus X an dieselben gelegten Tangenten-Quadrate t^2 und t'^2 gleich $x^2 - r^2$, und $y^2 - r'^2$. Folglich hätte man in Beziehung auf die Kreislinien K und K' einen Ort für den Punkt X so zu bestimmen, daß $t^2 : t'^2 = p^2 : q^2$, oder $t : t' = p : q$ wird, d. h. die von X auslaufenden Tangenten ein gegebenes Verhältniß erhalten. Dieser Ort ist aber eine nach 601 konstruirbare Kreislinie. Ohne Subtr. d. h. Gl. ergiebt sich eben so der Ort für $x^2 - a^2 : y^2 - b^2 = m : n$.

2254. Fig. 464. Ort. Wenn die Summe der Quadrate aller aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe G führenden Linien sich zu der Summe der Quadrate aller aus demselben Punkte X nach einer zweiten Punktgruppe G gezogenen Linien wie e : g verhält, so läßt sich eine Kreislinie als Ort für X bestimmen.

Analysis. Bezeichnen l und l die Verbindungslinien der Schwerpunkte von den Gruppen G und G mit X, ferner x, x', x'', ꝛc.; r, r', r'', ꝛc. die aus X nach G und G führenden n und n Linien, so ergiebt sich, wenn man wörtlich wie in der Analysis von 2223 schließt, und die Summe der in der Endgleichung derselben bekannten Glieder $\frac{1}{2}PP'^2 + \frac{2}{3}OP''^2 + \frac{3}{4}O'P'''^2 + \ldots$ durch f^2, und bei der zweiten Gruppe durch f^2 ausdrückt

$nl^2 + f^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots$, und

$nl^2 + f^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots$, weshalb nach den Bedingungen des Orts

$nl^2 + f^2 : nl^2 + f^2 = e : g$, oder

$l^2 + \frac{1}{n}f^2 : l^2 + \frac{1}{n}f^2 = nl : ng$ sein muß. In dieser Proportion sind nur die in X zusammentreffenden Linien l und l unbekannt, welche aber von 2 gegebenen Punkten, nämlich den nach der Auflösung von 2194 konstruirbaren Schwerpunkten der Gruppen G und G auslaufen, folglich läßt sich durch 2253 ein Ort für X bestimmen.

Anmerkung. Der vorstehende Ort bildet eine Erweiterung des Orts 2239, insofern bei diesem nur $e : g = 1 : 1$

nach einer Punktgruppe G, d. Linien x,
, , , G, , ,
, , , G, , ,
ergiebt sich ein Ort für X, we
$(mx'^2 + nx''^2 + ox'''^2 + \ldots) - (m$
$(mx'^2 + nx''^2 + ox'''^2 + \ldots) - (m$
ist, und m, n, ꝛc.; m, n, ꝛc.
bene Zahlen sind. (Erw
Analysis. Aus den
$(mx'^2 + nx''^2 + ox'''^2 + \ldots)$
$(mx^2 + nx''^2 + ox'''^2 + \ldots)$
Betrachtet man demn
eine, und das Grupp
zusammengehörender
langte Ort für X

$(r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots)$

2251. Or
$+ \ldots) = e:g$ sein muß.
Analy
g auf die 2 von M, M′, M″, ꝛc.
Punkte, 224
gebildeten Punktgruppen wörtlich wie
Anm
2254, nur M, ꝛc. statt P, ꝛc. gelesen, und
2252
$\ldots = f'^2$, $r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots = f^2$, so er
und 2
oer vorhergehenden Proportion die folgende:
führt
$f^2 - f'^2 : nl^2 + f^2 - f'^2 = e:g$, oder
X
$l^2 - \frac{1}{n}(f'^2 - f^2) : l^2 - \frac{1}{n}(f'^2 - f^2) = ne : ng.$

In dieser Proportion sind nur die in X zusammentreffenden Linien l und l unbekannt, welche aber von 2 gegebenen Punkten, nämlich den nach der Auflösung von 2194 konstruirbaren Schwerpunkten der beiden Punktgruppen M, M′, M″, ꝛc., und N, N′, N″, ꝛc. auslaufen, folglich läßt sich durch 2253 ein Ort für X bestimmen.

Anmerkung 1). Der vorstehende Ort bildet eine Erweiterung des Orts 2240, insofern bei diesem nur $e:g = 1:1$ ist. Ferner ist derselbe aber auch eine Erweiterung des Orts 601, da statt der zwei ⊙⊙ des letzteren eine beliebige Menge derselben unter gleich anzunehmenden Bedingungen gegeben ist.

Anmerkung 2). Wie Anmerkung 2) zu 2224.

…nabe. Es sind 3 Punktgruppen G, …; man soll einen Punkt X so be… …ie Summe der Quadrate aller …h G führenden Linien zu der… …ller aus demselben Punkt …und ferner zu der Sum… …hfalls aus X nach I …rhält.

…stimmen nach 2254 … Art den zweiten

…256, nur ist Kreis… …appe statt Punktgrup… …Linien, 2255 statt 2254 zu

§. 464. Ort. Führen aus einem Punkte … der Punktgruppe G die Linien x, x′, x″, … ab … nach einer Punktgruppe G die Linien x, …, x″, …, so befindet sich X in einer bestimmba… …ren Kreislinie, wenn $mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots$: $my^2 + ny'^2 + oy''^2 + \ldots = e:g$ ist, und m, n, …; m, n, …; e und g gegebene Zahlen sind. (Erweite… …terung von 2254.)

Analysis. Schließt man in Beziehung auf beide Grup… …pen G und G wörtlich wie in der Analysis von 2227, und drückt die in der Endgleichungen derselben vorkommende Sum… …me der mitgegebenen Glieder $\frac{m+n}{mn} PP' + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 + \ldots$ durch f^2, und bei der zweiten Gruppe durch f^2 aus, so er… …giebt sich

$(m+n+o+p)\ O''X^2 + f^2 = mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + px'''^2$, und

$(m+n+o)\ O'X^2 + f^2 = my^2 + ny'^2 + oy''^2$, weshalb nach den Bedingungen des Orts

$(m+n+o+p)\ O''X^2 + f^2 : (m+n+o)\ O'X^2 + f^2 = e:g$, oder

ist. Ferner ist derselbe aber auch eine Erweiterung des Orts 593, da statt der 2 Punkte des letzteren eine beliebige Menge derselben unter gleich anzunehmenden Bedingungen gegeben ist.

2255. Fig. 465. **Ort.** Wie 2254, nur ist Kreisgruppe statt Punktgruppe, Tangenten statt Linien zu lesen. (Erweiterung von 2240.)

Analysis. Bezeichnen $y, y', y'', \ldots$ und $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots$ die aus X nach G und $\mathfrak{G}$ führenden Tangenten; $x, x', x'', \ldots$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots$ aber die nach den Mittelpunkten M, M', M'', ... und $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$ der Gruppen G und $\mathfrak{G}$ führenden Linien, so ergiebt sich ganz wie in 2224

$(x^2+x'^2+x''^2+\ldots)-(r^2+r'^2+r''^2+\ldots)=y^2+y'^2+y''^2+\ldots$, und

$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{x}''^2+\ldots)-(\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}'^2+\mathfrak{r}''^2+\ldots)=\mathfrak{y}^2+\mathfrak{y}'^2+\mathfrak{y}''^2+\ldots$,

weshalb nach den Bedingungen des Orts

$$(x^2+x'^2+x''^2+\ldots)-(r^2+r'^2+r''^2\ldots):(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{x}''^2+\ldots)-(\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}'^2+\mathfrak{r}''^2+\ldots)=e:g$$

sein muß.

Schließt man jetzt in Beziehung auf die 2 von M, M', M'', ... und $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$ gebildeten Punktgruppen wörtlich wie in der Analysis von 2254, nur M, ... statt P, ... gelesen, und setzt $r^2+r'^2+r''^2+\ldots=f^2$, $\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}'^2+\mathfrak{r}''^2+\ldots=\mathfrak{f}^2$, so ergiebt sich statt der vorhergehenden Proportion die folgende:

$$nl^2+f^2-\mathfrak{f}^2 : nl^2+f^2-\mathfrak{f}'^2=e:g, \text{ oder}$$

$$l^2-\frac{1}{n}(\mathfrak{f}^2-f^2) : l^2-\frac{1}{n}(\mathfrak{f}'^2-f^2)=ne:ng.$$

In dieser Proportion sind nur die in X zusammentreffenden Linien l und l unbekannt, welche aber von 2 gegebenen Punkten, nämlich den nach der Auflösung von 2194 konstruirbaren Schwerpunkten der beiden Punktgruppen M, M', M'', ... und $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$ auslaufen, folglich läßt sich durch 2253 ein Ort für X bestimmen.

Anmerkung 1). Der vorstehende Ort bildet eine Erweiterung des Orts 2240, insofern bei diesem nur $e:g=1:1$ ist. Ferner ist derselbe aber auch eine Erweiterung des Orts 601, da statt der zwei $\odot\odot$ des letzteren eine beliebige Menge derselben unter gleich anzunehmenden Bedingungen gegeben ist.

Anmerkung 2). Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2256. Aufgabe. Es sind 3 Punktgruppen G, G und Γ gegeben; man soll einen Punkt X so bestimmen, daß sich die Summe der Quadrate aller aus diesem Punkt nach G führenden Linien zu der Summe der Quadrate aller aus demselben Punkt nach G führenden Linien, und ferner zu der Summe der Quadrate aller gleichfalls aus X nach Γ führenden Linien wie m:n:p verhält.

Analysis. G, G und m:n bestimmen nach 2254 den einen, und G, Γ und n:p in derselben Art den zweiten Ort für X.

2257. Aufgabe. } Wie 2256, nur ist Kreis-
Analysis. } gruppe statt Punktgruppe, Tangenten statt Linien, 2255 statt 2254 zu lesen.

2258. Fig. 464. Ort. Führen aus einem Punkte X nach einer Punktgruppe G die Linien x, x', x'', ꝛc., und nach einer Punktgruppe G die Linien y, y', y'', ꝛc., so befindet sich X in einer bestimmbaren Kreislinie, wenn $mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots : my^2 + ny'^2 + oy''^2 + \ldots = e:g$ ist, und m, n, ꝛc.; m, n, ꝛc.; e und g gegebene Zahlen sind. (Erweiterung von 2254.)

Analysis. Schließt man in Beziehung auf beide Gruppen G und G wörtlich wie in der Analysis von 2227, und drückt die in der Endgleichungen derselben vorkommende Summe der mitgegebenen Glieder $\frac{m+n}{mn} PP' + \frac{(m+n)o}{m+n+o} OP''^2 + \ldots$ durch f^2, und bei der zweiten Gruppe durch f^2 aus, so ergiebt sich

$(m+n+o+p)\ O''X^2 + f^2 = mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + px'''^2$, und

$(m+n+o)\ O'X^2 + f^2 = my^2 + ny'^2 + oy''^2$, weshalb nach den Bedingungen des Orts

$(m+n+o+p)\ O''X^2 + f^2 : (m+n+o)\ O'X^2 + f^2 = e:g$, oder

$$O''X^2 + \frac{1}{m+n+o+p} f^2 : O'X^2 + \frac{1}{m+n+o} f^2 = (m+n+o) e : (m+n+o+p) g$$

gegeben ist. In dieser Proportion sind nur die in X zusammentreffenden Linien O''X und O'X unbekannt, die aber von 2 nach der Analysis zu 2227 gegebenen Punkten O'' und O' auslaufen, folglich läßt sich durch 2253 ein Ort für X bestimmen.

2259. Fig. 465. **Ort.** Führen aus einem Punkte X nach einer Kreisgruppe G die Tangenten y, y', y'', ꝛc., und nach einer zweiten Kreisgruppe G die Tangenten y, y', y'' ꝛc., so befindet sich X in einer bestimmbaren Kreislinie, wenn $my^2 + ny'^2 + oy''^2 + \ldots : my^2 + ny'^2 + oy''^2 + \ldots = e : g$ ist, und m, n, ꝛc.; m, n, ꝛc.; e und g gegebene Zahlen sind. (Erweiterung von 2255).

Analysis. Bezeichnen x, x', x'', ꝛc. die Entfernungen des Punktes X von M, M', M'', ꝛc., und r, r', r'', ꝛc. die Abständen desselben Punktes von M, M', M'', ꝛc., so ergiebt sich, da $my^2 = mx^2 - mr^2$, $ny'^2 = nx'^2 - nr'^2$, ꝛc., und $my^2 = mx^2 - mr^2$, $ny'^2 = nx'^2 - nr'^2$, ꝛc. ist, daß

$mx^2 - mr^2 + nx'^2 - nr'^2 + \ldots = my^2 + my'^2 + \ldots$, und

$mx^2 - mr^2 + nx'^2 - nr'^2 + \ldots = my^2 + my'^2 + \ldots$, oder

$(mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots) - (mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots) = my^2 + my'^2 + \ldots$ und

$(mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots) - (mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots) = my^2 + ny'^2 + \ldots$

ist, also nach der Bedingung des Orts

$$(mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots) - (mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots) : (mx^2 + nx'^2 + ox''^2 + \ldots) - (mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots) = e : g$$

sein muß.

Schließt man jetzt in Beziehung auf die beiden von M, M', M'', ꝛc. und M, M', M'', ꝛc. gebildeten Punktgruppen wörtlich wie in der Analysis von 2258, nur M, ꝛc. statt P, ꝛc. gelesen, und setzt $(mr^2 + nr'^2 + \ldots) = f'^2$, $(mr^2 + nr'^2 + or''^2 + \ldots) = f'^2$, so ergiebt sich statt der vorhergehenden Proportion die folgende:

$$(m+n+o+p)O''X^2+f^2-f'^2:(m+n+o)O'X^2+f^2-f'^2 = e:g, \text{ oder}$$

$$O''X^2-\frac{1}{m+n+o+p}(f''^2-f^2):O'X^2-\frac{1}{m+n+o}(f'^2-f^2)=$$
$$(m+n+o)e:(m+n+o+p)g.$$

In dieſer Proportion ſind nur die in X zuſammentreffenden Linien O''X und O'X unbekannt, die aber von 2 nach der Analyſis zu 2227 gegebenen Punkten O'' und O' auslaufen, folglich läßt ſich durch 2253 ein Ort für X beſtimmen.

Anmerkung. Wie Anmerkung 2) zu 2224.

2260. Aufgaben. Erweiterungen von 2256 und 2257, analog mit den in 2258 und 2259 angeführten Erweiterungen von 2254 und 2255.

2261. In den Nummern 2223 bis 2260 ſind 20 zu Punkt- oder Kreisgruppen gehörende Oerter enthalten. Zählt man zu denſelben die in mehreren Anmerkungen angedeuteten hinzu, welche ſich auf ſolche Gruppen beziehen, die aus ⊙⊙ und Punkten gemiſcht ſind, ſo ergeben ſich überhaupt 30 Oerter. Durch Zuſammenſtellung jedes dieſer Oerter mit ſich ſelbſt und mit allen übrigen läßt ſich ſtets eine Aufgabe bilden. Daher hätten (abgeſehen von der Verbindung mit anderen Oertern) im Vorigen $\frac{30.29}{1.2}+30$ oder 465 zu Punkt, ⊙, oder Punkt- und Kreis-Gruppen gehörende Aufgaben abgehandelt werden können.

Gesetze für einige zum Dreieck gehörende Kreise.

2262. Fig. 467. Der Radius der alle Seiten eines △ halbirenden Kreislinie ist halb so groß als der Radius des ⊙ ums △.

Beweis. F, D, E sind die Mitten der Seiten des △ ABC, M und O die Mittelpunkte der ⊙⊙ um die △△ ABC und DEF. Da AD : DB = AE : EC = 1 : 1 ist, ꝛc., so laufen die Seiten des △ FDE den Seiten des △ ABC ∓. Hieraus folgt △ DEF ∼ △ ABC, also auch (OG ⊥ DE) △ OGE ∼ △ MBF, weshalb OE : MB = EG : BF = ED : BC = 1 : 2 sein muß.

2263. Fig. 467. Der Mittelpunkt O der alle Seiten eines △ halbirenden Kreislinie (in E, F, D) theilt die Verbindungslinie QM zwischen dem Centrum M des ⊙ ums △ und dem Schneidungspunkt Q der Höhen in zwei gleiche Theile.

Beweis. Da wegen der Parallelität von BC und ED GA = GF, und MF ∓ AQ (Höhe) ist, so halbirt der in G auf DE errichtete ⊥ nach 514 die Linie MQ in O. Dasselbe gilt aus gleichen Gründen für den in I auf EF errichteten ⊥, also bildet O den Schneidungspunkt von beiden ⊥⊥. Nun ist aber DG = GE, da BF = FC ist, und eben so FI = IE, folglich sind IO und GO die in den Mitten G und I der Seiten des △ DEF errichteten ⊥⊥, und es ist deshalb O, der Halbirungspunkt von MQ, wirklich der Mittelpunkt des ⊙ um das △ DEF.

2264. Fig. 467. Die alle Seiten eines △ halbirende Kreislinie durchläuft die Fußpunkte der Höhen (R, H, N) desselben △.

Beweis. Da nach 2263 der Mittelpunkt O des ⊙ um △ DEF die Linie MQ halbirt, so bestimmt der auf BC, ∓ MF und QH, gefällte ⊥ OI′ nach 435 FI′ = I′H, wes-

halb sich OF = OH ergiebt. Auf dieselbe Weise findet sich OE = OR, OD = ON.

2265. Fig. 467. Die alle Seiten eines △ in 2 gleiche Theile schneidende Kreislinie bildet einen Ort für die Halbirungspunkte aller Linien, welche vom Durchschnittspunkt der Höhen (Q) nach einem beliebigen Punkt der Kreislinie ums △ führen.

Beweis. Für jede solche Linie, z. B. QA, ist nach 2262 MA = 2OS, und nach 2263 MQ = 2OQ. Da nun ferner ∠MQA = ∠OQS, und ∠OSQ sowohl als ∠MAQ (∢ an der Grundlinie in △△) spitz sein müssen, so zeigt sich △MQA ∾ △OQS, und deshalb QA = 2QS.

2266. Fig. 467. Die alle Seiten eines △ halbirende Kreislinie bestimmt in jeder Seite eine Sehne (FH), welche dem halben Unterschied der in dieser Seite von der Höhe gebildeten beiden Abschnitte $\left(\frac{p-q}{2}\right)$ gleich ist.

Beweis. F, der eine Endpunkt der Sehne FH, bildet die Mitte von BC, und H, der zweite Endpunkt, nach 2264 zugleich den Fußpunkt der Höhe AH. Nun ergiebt sich aber FH = CH — CF = CH — FB = CH — FH — HB, also ist 2FH = CH — BH, oder $FH = \frac{p-q}{2}$.

Zusatz. Für die Schenkel des stumpfen ∠ eines stumpfwinkligen △ findet sich $\frac{p+q}{2}$ statt $\frac{p-q}{2}$.

2267. Fig. 467. Die alle Seiten eines △ halbirende Kreislinie bestimmt in jeder Seite eine Sehne FH, deren zugehöriger Peripherie∠ FSH dem Unterschied der an derselben Seite liegenden ∢ β und γ gleich ist.

Beweis. Da ∠FHS nach 2264 = R ist, so durchläuft FS das in die Mitte von MQ fallende Centrum O.

Nun ist aber nach dem in 2265 gegebenen Beweise $\triangle$ QOS $\sim \triangle$ MQA, folglich ergiebt sich $\angle$ FSH $=\angle$ MAH d. h. $=\angle$ (rb), der nach 333 die Größe $\beta-\gamma$ hat.

2268. Fig. 468. Die alle Seiten eines $\triangle$ halbirende Kreislinie berührt den Kreis im $\triangle$ von Innen.

Analysis. Sei M der Mittelpunkt der alle Seiten halbirenden Kreislinie, O der Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$, ME und OF $\perp$ BC, u. s. w. Die Berührung in H fände statt, wenn

$\left.\begin{array}{l}\overline{EH} : \overline{HF} = \overline{HM} : HO\ (=\varrho) \text{ wäre. Nun ist}\\ \overline{HF} : \overline{FG} = \overline{FD} : \overline{FE}\ \text{(Sehnensatz), und außerdem}\\ \overline{EI} : \overline{EH} = \overline{FE} : \overline{EN}\ (=2MH), \text{ da } \triangle IFE \sim \triangle KNH.\end{array}\right\}$ Daher müßte (durch Zus. 5.)

EI : FG = FD : 2ϱ sein.

EI und FG bilden die Höhe und die Grundlinie des $\triangle$ EFG, welches $\angle$ FGE $=\frac{\beta-\gamma}{2}$ hat, da nach 2267 der zu dem Bogen GED gehörende $\angle = \beta-\gamma$ ist. Ferner ergiebt sich $\angle$ QOS oder $\angle$ (mb) nach 332 ebenfalls $=\frac{\beta-\gamma}{2}$. Zeichnet man also OS $= 2\varrho$, und zieht DQ $\nparallel$ OS, so bestimmt der Schneidungspunkt Q mit AT, welcher nach 1422 das Centrum einer B, C und die beiden Mittelpunkte O und T des $\odot$ im und des $\odot$ am $\triangle$ durchlaufenden Kreislinie bildet, die Spitze eines $\triangle$ FEG $\sim \triangle$ QOS, während sich zugleich $\triangle$ QOU $\sim \triangle$ DEG ergiebt, weshalb OU : US = GD : FD statt finden müßte. Es ist aber, da $\angle$ OUT = R, FU = TV = TW = ϱ', und deshalb OU = $\varrho' + \varrho$, und SU = $\varrho' - \varrho$, folglich erhält man, da nach 339 und 1354

$\varrho' : \varrho = AW : AR = \frac{b+c+a}{2} : \frac{b+c-a}{2}$ ist, also d. A. u. S. d. V. Gl.

$\varrho'+\varrho : \varrho'-\varrho = b+c : a$ sein muß,

OU : US $= b+c : a$. Zugleich hat man jedoch nach 2266 und 1420

GD : FD = p—q : b—c, also müßte endlich

b + c : a = p—q : b—c sein.

Dies findet aber nach 209 und 205 wirklich statt, folglich ist der Beweis, daß ⊙ um M den ⊙ um O berührt, gefunden.

Beweis. Verlängert man ⊥ OF bis zu einer durch den Mittelpunkt T zu BC gelegten ⫩, und verbindet U mit Q, der Mitte von OT, so wird OQ = QU (∠ OUT = R), und es ergiebt sich 1stens) △OQU ∾ △GDE, da nach 332 ∠ UOQ oder ∠ (mh) = $\frac{\beta-\gamma}{2}$ ist, und sich eben so nach 2267 der auf der Hälfte des Bogens GED stehende ∠ EGD = $\frac{\beta-\gamma}{2}$ findet. 2tens) hat man FU = TV = ϱ′ erhalten, weshalb, sobald man FS = FO = ϱ bestimmt, OU = ϱ′ + ϱ, und SU = ϱ′ — ϱ ist.

Da nun

TW : OR = AW : AR, oder nach 339 und 1354

ϱ′ : ϱ = $\frac{b+c+a}{2}$: $\frac{b+c-a}{2}$ ist, sich folglich d. A. u. S. d. W. Cl.

ϱ′ + ϱ : ϱ′—ϱ = b + c : a ergiebt, so ist wegen 2)

OU : SU = b + c : a. Man hat aber nach 209 und 205

p—q : b—c = b + c : a, also muß

OU : SU = p — q : b—c sein. Eben so ist jedoch

GD : FD = p — q : b—c, da nach 2266 GD = $\frac{p-q}{2}$, und nach 1420 FD = $\frac{b-c}{2}$ ist, demnach findet sich

OU : SU = GD : FD, und d. S. d. W. Cl.

OS : OU = GF : GD. Nun ist aber auch

OQ : OU = GE : GD, da nach 1) △OQU ∾ △GDE; folglich hat man

OS : OQ = GF : GE. Hieraus ergiebt sich,

indem zugleich nach 1) $\angle FGE = \angle QOS = \frac{\beta - \gamma}{2}$ ist, $\triangle QOS \sim \triangle GEF$, weshalb

$FG : OS = IE : FD$ sein muß. (Grundl. w. d. Höhen.)

Ferner ist (für H in der ⊙linie um M)

$HF : FG = FD : FE$ (Sehnensatz), und

$IE : FE = HE : EN$, da $\triangle IEF \sim \triangle EHN$. Demnach ergiebt sich d. Zus. s.

$HF : OS = HE : EN$, oder da $OS = 2OF$, $EN = 2EM$, $HF : OF = HE : EM$. Hieraus folgt, wegen der Parallelität von OF und ME, daß H in der Lage der Centrale MO liegt, weshalb endlich $OH = OF = \varrho$ ist, also der O um M wirklich den ⊙ um O berührt.

2269. Fig. 469. Die jede Seite eines $\triangle$ halbirende Kreislinie berührt alle ⊙⊙ am $\triangle$ von Außen.

Analysis. } Ergeben sich mit geringen Aenderungen
Beweis. } wie in 2268, wenn man überall ϱ' statt ϱ und umgekehrt, Tangentensatz statt Sehnensatz, einigemal — SU statt SU, einigemal — a statt a, und umgekehrt, A. d. V. Gl. statt S. d. V. Gl. und umgekehrt liest, und Fig. 469. statt Fig. 468. benutzt.

2270. Fig. 470. Die alle Seiten eines $\triangle$ halbirende Kreislinie berührt sämmtliche sechzehn ⊙⊙, die sich ergeben, wenn man zu jedem der vier durch den Schneidungspunkt der Höhen und die drei Winkelspitzen gebildeten $\triangle\triangle$ die vier ⊙⊙ zeichnet, welche, einzeln genommen, die drei Seitenlinien eines solchen $\triangle$s innerhalb oder außerhalb tangiren.

Beweis. Nach 2265 bildet die jede Seite des $\triangle ABC$ halbirende Kreislinie um M einen Ort für die Halbirungspunkte aller vom Schneidungspunkt der Höhen D nach der Peripherie des ⊙ ums $\triangle$ führenden Linien. Daher ist $DH = HA$, $DI = IB$, $DN = NC$. Hieraus folgt, daß

von der Kreislinie um M nicht bloß alle 3 Seiten des △s ABC halbirt werden, sondern daß ganz dasselbe bei jedem der übrigen vorhandenen △△ BCD, ACD und ABD statt findet. Nach 2268 tangirt aber die alle Seiten eines △ halbirende Kreislinie den ⊙ im △ von Innen, folglich berührt die Kreislinie um M die 4 ⊙⊙ im △ um Ω, Ω′, Ω″, Ω‴ von Innen. Nach 2269 tangirt ferner die jede Seite eines △ halbirende Kreislinie auch die zu demselben gehörenden 3 ⊙⊙ am △ von Außen, demnach berührt dieselbe Kreislinie um M wirklich auch sämmtliche 12 ⊙⊙ am △, deren Mittelpunkte mit O, O′, O″, O‴ bezeichnet sind.

2271. Fig. 471. 1) Die vier ⊙⊙, welche sich um ein △ ABC, und um je zwei von dessen Winkelspitzen und den Schneidungspunkt der Höhen D′ beschreiben lassen, sind alle von derselben Größe. 2) Die Centralen der drei (den Kreis um ABC nicht gerechnet) entstandenen Mittelpunkte bilden ein dem △ABC ≅ △A′B′C′. 3) Der Schneidungspunkt der Höhen D′ des △ ABC bildet den Mittelpunkt des ⊙ um das △ A′B′C′. 4) Der Mittelpunkt D des ⊙ um das △ ABC ist der Schneidungspunkt der Höhen für das △ A′B′C′.

Beweis zu 1). Da ∠ CD′B = R + ∠ D′BA = 2R − α ist, so ergiebt sich der andere zu BC gehörende Peripherie∠ in dem ⊙ um CD′B = α, folglich der Centri∠ CA′B = 2α, und deshalb das △ CA′B ≅ △ CDB, dessen Spitze D der Mittelpunkt des ⊙ um △ ABC bildet. Hieraus folgt CA′ = CD = r. Eben so erhält man BC′ = BD = r, u. s. w.

Beweis zu 2). Da nach dem Beweise 1) △ AC′B ≅ △ ABD ist, so hat man AC′ = und ∓ DB. Eben so ergiebt sich AB′ = und ∓ DC. Hieraus folgt △ AB′C′ ≅ △ CDB, weshalb B′C′ = CB sein muß. Auf dieselbe Art

läßt sich $A'B' = BA$, und $C'A' = AC$ erweisen. Demnach ist wirklich $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

Beweis zu 3). Da nach 1) sowohl $A'D'$ als $B'D'$ und $C'D' = r$ ist, so bildet D' den Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle A'B'C'$.

Beweis zu 4). Da 2 Seiten der nach 2) $\cong \triangle\triangle$ $AB'C'$ und $A'BC$ $\not\equiv$ sind, so findet dasselbe mit den dritten Seiten $B'C'$ und BC statt. Hieraus folgt, daß $A'D$, welche Linie die Spitzen der $\triangle\triangle$ CDB und $CA'B$ verbindet, nicht bloß auf CB, sondern auch auf $B'C' \perp$ steht. Eben so ergiebt sich $B'D$ als $\perp$ auf $A'C'$, und $C'D$ als $\perp$ auf $A'B'$. Daher muß D, der Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle ABC$, den Schneidungspunkt der Höhen für das $\triangle A'B'C'$ bilden.

2272. Fig. 471. Die Winkelspitzen eines $\triangle$ und der Schneidungspunkt der Höhen bilden überhaupt 4 $\triangle\triangle$. Die 6 Centralen der um dieselben beschriebenen $\odot\odot$ geben 4 andere $\triangle\triangle$. Zu jedem dieser 8 $\triangle\triangle$ gehören 4 die 3 Seitenlinien desselben berührenden $\odot\odot$. Die alle Seiten des zuerst genannten $\triangle$ halbirende Kreislinie berührt sämmtliche vorher erwähnten 32 $\odot\odot$.

Beweis. Sind ABC, ABD', BCD', CAD' die zuerstgenannten 4 $\triangle\triangle$ und D, C', A', B' die zugehörigen Mittelpunkte der um dieselben beschriebenen $\odot\odot$, so bilden $A'B'C'$, $A'B'D$, $B'C'D$ und $C'A'D$ die anderen 4 $\triangle\triangle$, welche mit jenen gleichartig zusammengesetzt sind, da nach 2271. 4) D, der Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle ABC$, zugleich der Schneidungspunkt der Höhen für das $\triangle A'B'C'$ ist. Nach 2271. 3) bildet ferner D', der Schneidungspunkt der Höhen des $\triangle ABC$, zugleich den Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle A'B'C'$. Hieraus geht nach 2263 hervor, daß M, der Mittelpunkt der alle Seiten des $\triangle ABC$ halbirenden Kreislinie, den gleichnamigen Mittelpunkt für das $\triangle A'B'C'$ bildet, und außerdem ergiebt sich, da beide $\triangle\triangle$ nach 2271. 2.) $\cong$ sind, daß jene Kreislinie nicht bloß die Seiten des $\triangle$

ABC sondern auch die des △ A'B'C' halbirt. Daraus folgt nun endlich, daß die Kreislinie um M, welche nach 2270 die 16 zu den △△ ABC, ABD', BCD', CAD' gehörenden ⊙⊙ tangirt, aus denselben Gründen auch die 16 gleichnamigen ⊙⊙ von den △△ A'B'C', A'B'D, B'C'D, C'A'D berühren muß.

2273. Fig. 472 und 473. 1) Verbindet man die Mittelpunkte M, N, O, Q der 4 die 3 Seitenlinien eines △ ABC berührenden ⊙⊙ mit den vorhandenen 12 Berührungspunkten, und verlängert die erhaltenen 12 Radien gehörig, so schneiden sich dieselben in den Mittelpunkten der 4 Kreislinien, welche durch je 3 der vorhergenannten Centra gelegt werden können. 2.) Die 8 Kreislinien, welche durch je 3 der ursprünglichen 4, oder durch je 3 der abgeleiteten 4 Mittelpunkte beschrieben werden können, sind alle von derselben Größe. Der Halbmesser einer jeden ist doppelt so groß als der Radius des ⊙ um das Grunddreieck ABC.

Beweis zu 1). Fig. 472. Da ∠ SBQ = ∠ F'BN ist, muß ∠ SQN = ∠ F'NQ sein (Komplemente). Auf demselben Wege ergiebt sich ∠ F'NO = ∠ D'ON, und ∠ D'OQ = ∠ SQO. Beschreibt man, Fig. 473., um △ NOQ einen ⊙, und verlängert die wie in Fig. 472 liegenden Linien NF', OD' und QS bis F, D und E, so erhält man, da nach dem Vorigen ∠ F'NO + ∠ F'NQ + ∠ D'OQ = R ist, auch ∠ ONF' + ∠ F'NQ + ∠ QND, oder ∠ OND = R. Daher muß OD ein Durchmesser sein. Eben so findet sich ∠ NOF und ∠ QNE = R, folglich sind die Linien NF und QE gleichfalls Durchmesser, und es schneiden sich deshalb wirklich die 3 Linien NF', OD' und QS, Fig. 472 und 473, in dem Mittelpunkt M' des ⊙ um das △ ONQ. Ferner hat man (Fig. 472.) ∠ H'QN = ∠ ENQ (Komplemente der = ∠ H'BQ und EBN), und außerdem ∠ H'QM = ∠ QMO' (Komplemente der = ∠ E'AM

und G'AM), und ∠ ENM = ∠ O'MN (Komplemente der = ∠ MCI und MCG'), demnach läßt sich wie vorher beweisen, daß auch die Verlängerungen der 3 Radien QH', MG' und NE in dem Mittelpunkt O' des ⊙ um das △ NMQ zusammentreffen. Eben so ergeben sich endlich N' und Q', die Mittelpunkte der ⊙⊙ um die △△ OMQ und OMN, als Durchschnittspunkte der übrigen 6 Radien.

Beweis zu 2.) Nach 1417 ist M der Schneidungspunkt der Höhen für das △ NOQ, daher sind die 4 ⊙⊙ um die △△ NOQ, NMQ, NMO, OMQ nach 2271. 1) alle von derselben Größe. Eben so ergiebt sich, da nach 2271. 4) M', der Mittelpunkt des ⊙ um das △ NOQ, zugleich der Schneidungspunkt der Höhen für das △ N'O'Q' ist, daß alle 4 ⊙⊙ um die △△ N'O'Q', N'M'Q', N'M'O' und O'M'Q' dieselbe Größe haben müssen. Nun sind aber die letzteren 4 △△ den 4 vorhergenannten ≅, da nach 2271. 2) △ N'O'Q' ≅ △ NOQ ist, folglich müssen alle um diese 8 △△ beschriebenen ⊙⊙ von gleicher Größe sein. Der Halbmesser eines jeden ist endlich doppelt so groß als der Radius des ⊙ um das Grunddreieck ABC, da A,B,C die Fußpunkte der Höhen im △ NQO sind, also nach 2264 eine diese Punkte durchlaufende Kreislinie die Seiten des △ NOQ halbirt, und deren Radius deshalb nach 2262 halb so groß sein muß als der Halbmesser des ⊙ um das △ NOQ.

2274. Fig. 472. Jeder Durchmesser eines ⊙ ums △, welcher auf einer Seite winkelrecht steht, wird von derselben in 2 Abschnitte getheilt. Der zum Theil in das △ fallende Abschnitt ist halb so groß als die Summe der Radien derjenigen beiden ⊙⊙ am △, welche die undurchschnittenen Seiten außerhalb des △ berühren $\left(\perp FG = \frac{\varrho'' + \varrho'''}{2}\right)$. Der andere Abschnitt ist halb so groß als der Un-

terſchied von den Radien des dritten ⊙ am △ und des ⊙ im △ $\left(\perp GH = \frac{\varrho' - \varrho}{2}\right)$.

Beweis. Sind N, O, Q die Mittelpunkte der Berührungskreiſe am △ ABC, ſo bilden die Punkte A, B, C nach 1417 die Fußpunkte der Höhen des △ NOQ. Hieraus folgt, (wenn H in AQ ꝛc. angenommen wird) da zugleich CH = HB iſt, daß FH einen ⊥ BC ſtehenden Durchmeſſer bildet, alſo ∓ NE und OD, oder ϱ''' und ϱ'' iſt. Nun halbirt aber nach 2264 die Kreislinie ums △ ABC die Seiten des △ NOQ, demnach iſt FN = FO, und deshalb in dem ▭ ONED nach 172. a. $2FG = OD + NE = \varrho'' + \varrho'''$.

Da ferner GH ∓ MI und SQ, oder ϱ und ϱ', nach dem Vorigen iſt, HM aber = HQ nach 1422 ſein muß, ſo ergiebt ſich endlich nach 172. b. in dem ▭ IMQS $2HG = QS - IM = \varrho' - \varrho$.

Anmerkung. Aus dem vorſtehenden Geſetz folgen ſehr einfache Auflöſungen für die Aufgaben △ aus r, ϱ, ϱ', und △ aus r, ϱ', ϱ'', ſiehe 2046 und 2047.

2275. Fig. 472. Durch den vorhergehenden Satz wird man auf die folgenden bei △△ ſtatt findenden Sätze geleitet:

1) Der Durchmeſſer des ⊙ am △, welcher die Hypotenuſe ſelbſt berührt, iſt dem Umfange des △ gleich ($2\varrho''' = a + b + c$).

Beweis. Nach 839 iſt $2CE = a + b + c$. Nun muß aber, wenn $\gamma = R$, ∠ NCE = ∠ ENC = ½R ſein, alſo auch 2NE oder $2\varrho''' = 2CE$ oder $a + b + c$.

2) Die Summe der Durchmeſſer des ⊙ im △ und der beiden die Katheten ſelbſt berührenden ⊙⊙ am △ iſt ſtets dem Umfange des △ gleich. ($2\varrho + 2\varrho' + 2\varrho'' = a + b + c$).

Beweis. Die △△ IMC, CMG', SQC, FCQ, D'OC und OCD ſind rechtwinklig und gleichſchenklig. Nach 873 iſt daher

$\varrho + \varrho''$, oder DI = AC, und
$\varrho + \varrho'$, oder G'I' = BC. Ferner muß aber nach 1418
$\varrho' + \varrho''$, oder D'I' = AB sein, demnach ist
$2\varrho + 2\varrho' + 2\varrho'' = a + b + c$.

3.) Der Radius des ⊙ am △, welcher die Hypotenuse eines △ selbst berührt, ist eben so groß als die Summe von den Radien der beiden übrigen ⊙⊙ am △ nebst dem Radius des ⊙ im △. ($\varrho''' = \varrho + \varrho' + \varrho''$).

Beweis. Folgt aus 1) und 2.)

4.) In jedem △ ist die Summe von den Radien der beiden ⊙⊙ am △, welche die Katheten selbst berühren, oder der Unterschied zwischen dem Radius des die Hypotenuse selbst berührenden ⊙ am △ und dem Radius des ⊙ im △ eben so groß als der Radius des ⊙ ums △, oder die halbe Hypotenuse. ($\varrho' + \varrho''$, oder $\varrho''' - \varrho = r = \frac{c}{2}$.)

Beweis. Nach 1418 ist D'I' = AB oder 2r. D'I' ist aber = $\varrho' + \varrho''$, da D'OC und CQI' △△ sind. $\varrho''' - \varrho$ endlich hat dieselbe Größe, da nach 3) $\varrho''' - \varrho = \varrho' + \varrho''$ sein muß.

2276. Fig. 472. 1.) Die Summe der beiden aus dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ auf 2 Seiten desselben gefällten ⊥⊥ ist stets halb so groß als die Summe der Radien des ⊙ im △ und des ⊙ am △, welcher die dritte Seite des △ geradezu berührt. $\left(VT + VU = \frac{\varrho + \varrho'}{2}\right)$.

2) Der Unterschied derselben ⊥⊥ ist dagegen halb so groß als der Unterschied der Radien der beiden ⊙⊙ am △, welche die zu den ⊥⊥ gehörenden Seiten geradezu berühren. $\left(VU - VT = \frac{\varrho''' - \varrho}{2}\right)$.

Beweis zu 1.) Nach 2274 ist $2TR = \varrho''' - \varrho$, und $2UW = \varrho'' - \varrho$. Daher ergiebt sich

$2VT = 2r - \varrho''' + \varrho$, und
$2VU = 2r - \varrho'' + \varrho$, also

$2VT + 2VU = 4r - \varrho''' - \varrho'' + 2\varrho$. Nach 2274 ist aber
$2FG = \varrho''' + \varrho''$, demnach hat man

$2VT + 2VU + 2FG = 4r + 2\varrho$, oder, da
$2FG = 4r - 2GH$, d. Subtr.

$2VT + 2VU = 2GH + 2\varrho$. Hieraus folgt endlich, da nach 2274 $2GH = \varrho' - \varrho$ ist,

$2VT + 2VU = \varrho' - \varrho + 2\varrho$, oder

$$VT + VU = \frac{\varrho' + \varrho}{2}$$

Beweis zu 2). Wie in 1) ergiebt sich
$2VT = 2r - \varrho''' + \varrho$, und
$2VU = 2r - \varrho'' + \varrho$, folglich erhält man d. S.

$2VU - 2VT = \varrho''' - \varrho''$, und

$$VU - VT = \frac{\varrho''' - \varrho''}{2}.$$

2277. Fig. 472. Die Summe der 3 ⊥⊥, welche aus dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ auf die 3 Seiten gefällt werden können, ist stets eben so groß als die Summe der Radien des ⊙ im △ und des ⊙ ums △. ($VG + VU + VT = \varrho + r$).

Beweis. Nach 2274 hat man
$2VG = 2r - \varrho' + \varrho$
$2VU = 2r - \varrho'' + \varrho$
$2VT = 2r - \varrho''' + \varrho$, also d. A.

$2VG + 2VU + 2VT = 6r - \varrho' - \varrho'' - \varrho''' + 3\varrho$. Nun ist nach 2282
$4r = \varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho$, also muß

$2VG + 2VU + 2VT = 2r + \varrho$, oder
$VG + VU + VT = r + \varrho$ sein, w. z. b. w.

2278. Fig. 467. Die Verbindungslinie zwischen dem Schneidungspunkt der Höhen und einer Winkelspitze eines △ ist stets doppelt so groß als der aus dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ auf die Gegenseite gefällte ⊥.

Beweis. Sind MF und MD zwei ⊥⊥, und bildet Q den Schneidungspunkt der Höhen, so ergiebt sich △ AQC ∾ △ DMF, da alle Seiten beider △△ ∦ laufen. Hieraus folgt AQ : MF = AC : DF. Nun ist aber AC = 2DF, da BA = 2BD, folglich muß auch AQ = 2MF sein.

2279. Fig. 467. In jedem △ liegen der Mittelpunkt des ⊙ ums △, der Schwerpunkt, der Mittelpunkt der alle Seiten halbirenden Kreislinie und der Schneidungspunkt der Höhen in einer geraden Linie, und bestimmen durch ihre Lage zum letzten Punkt eine harmonische Proportion für MQ, TQ, OQ, oder MT : TO = MQ : QO.

Beweis. Der Schwerpunkt T theilt jede eine Seite halbirende Transversale AF nach dem Verhältniß 1:2. Nun ist aber nach 2278 auch MF : AQ = 1 : 2, folglich liegt T in MQ, und bestimmt, wenn man MQ = 1 setzt, MT = $\frac{1}{3}$. Nach 2263 liegt ferner der Mittelpunkt der jede Seite des △ ABC halbirenden Kreislinie in der Mitte von MQ, demnach liegen die 4 genannten Punkte wirklich in gerader Linie, und bilden durch ihre Lage die harmonische Proportion MT : TO = MQ : QO, da sich MT = $\frac{2}{3}$, TO = $\frac{1}{3}$, OQ = $\frac{1}{2}$ aus der Annahme MQ = 1 ergiebt.

2280. 1) Die Summe der Abstände zweier Winkelspitzen eines △ vom Durchschnittspunkt der Höhen ist eben so groß als die Summe der Radien des ⊙ im △ und desjenigen ⊙ am △, welcher die zwischen den Winkelspitzen liegende Seite selbst berührt.

2). Der Unterschied der Abstände derselben Linien ist stets eben so groß wie der Unterschied

der Radien derjenigen beiden ⊙⊙ am △, welche die Gegenseiten der benutzten Winkelspitzen selbst berühren.

Beweis. Folgt durch 2278 aus 2276.

2281. Die Summe der Abstände der 3 Winkelspitzen eines △s vom Durchschnittspunkt der Höhen ist eben so groß als die Summe der beiden Durchmesser, welche zu den ⊙⊙ im und ums △ gehören.

Beweis. Folgt durch 2278 aus 2277.

2282. Fig. 472. In jedem △ ist die Summe der Radien aller ⊙⊙ am △ weniger dem Radius des ⊙ im △ gleich dem doppelten Durchmesser des ⊙ ums △, oder $\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = 4r$.

Beweis. Nach 2274 haben die beiden Abschnitte des auf BC ⊥ stehenden Durchmessers die nachstehenden Längen. Es ist

$$2FG = \varrho'' + \varrho''', \text{ und}$$
$$2GH = \varrho' - \varrho. \text{ Hieraus folgt d. A.}$$
$$4r = \varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho.$$

2283. Fig. 467. Die Summe der Abstände des Centrums der alle Seiten eines △ halbirenden Kreislinie von den Mittelpunkten der 4 die drei Seitenlinien desselben berührenden ⊙⊙ ist 3mal so groß als der Durchmesser des ⊙ ums △. ($OU + OV + OY + OZ = 6r$.)

Eben so groß ist die Summe der Abstände desselben Centrums von den gleichnamigen 4 Mittelpunkten jedes der 3 △△, welche vom Schneidungspunkt der Höhen mit je zwei Winkelspitzen des Grunddreiecks gebildet werden.

Beweis. Nach 2262, 2268 und 2269 hat man

$$OV = \frac{r}{2} + \varrho',$$

$$OY = \frac{r}{2} + \varrho'',$$

Nun ist aber nach dem in 2265 gegebenen Beweise $\triangle$ OQS $\sim \triangle$ MQA, folglich ergiebt sich $\angle$ FSH $=\angle$ MAH d. h. $=\angle$ (rb), der nach 333 die Größe $\beta-\gamma$ hat.

2268. Fig. 468. Die alle Seiten eines $\triangle$ halbirende Kreislinie berührt den Kreis im $\triangle$ von Innen.

Analysis. Sei M der Mittelpunkt der alle Seiten halbirenden Kreislinie, O der Mittelpunkt des $\odot$ im $\triangle$, ME und OF $\perp$ BC, u. s. w. Die Berührung in H fände statt, wenn

$$\begin{cases} \overline{EH} : \overline{HF} = \overline{HM} : HO\ (=\varrho) \text{ wäre. Nun ist} \\ \overline{HF} : \overline{FG} = \overline{FD} : \overline{FE} \text{ (Sehnensatz), und außerdem} \\ \overline{EI} : \overline{EH} = \overline{FE} : \overline{EN}\ (=2MH), \text{ da } \triangle IFE \sim \triangle NNH. \end{cases}$$

Daher müßte (durch Zus. 5.)

$\overline{EI} : \overline{FG} = \overline{FD} : 2\varrho$ sein.

EI und FG bilden die Höhe und die Grundlinie des $\triangle$ EFG, welches $\angle$ FGE $= \frac{\beta-\gamma}{2}$ hat, da nach 2267 der zu dem Bogen GED gehörende $\angle = \beta-\gamma$ ist. Ferner ergiebt sich $\angle$ QOS oder $\angle$ (mb) nach 332 ebenfalls $= \frac{\beta-\gamma}{2}$. Zeichnet man also OS $= 2\varrho$, und zieht DQ $\parallel$ OS, so bestimmt der Schneidungspunkt Q mit AT, welcher nach 1422 das Centrum einer B, C und die beiden Mittelpunkte O und T des $\odot$ im und des $\odot$ am $\triangle$ durchlaufenden Kreislinie bildet, die Spitze eines $\triangle$ FEG $\sim \triangle$ QOS, während sich zugleich $\triangle$ QOU $\sim \triangle$ DEG ergiebt, weshalb OU : US $=$ GD : FD statt finden müßte. Es ist aber, da $\angle$ OUT $=$ R, FU $=$ TV $=$ TW $=\varrho'$, und deshalb OU $=\varrho'+\varrho$, und SU $=\varrho'-\varrho$, folglich erhält man, da nach 339 und 1354

$\varrho' : \varrho =$ AW : AR $= \frac{b+c+a}{2} : \frac{b+c-a}{2}$ ist, also d. A. u. S. d. B. Gl.

$\varrho'+\varrho : \varrho'-\varrho = b+c : a$ sein muß,

OU : US $= b+c : a$. Zugleich hat man jedoch nach 2266 und 1420

GD : FD = p—q : b—c, also müßte endlich
b + c : a = p—q : b—c sein.
Dies findet aber nach 209 und 205 wirklich statt, folglich ist der Beweis, daß ⊙ um M den ⊙ um O berührt, gefunden.

Beweis. Verlängert man ⊥ OF bis zu einer durch den Mittelpunkt T zu BC gelegten ⊥, und verbindet U mit Q, der Mitte von OT, so wird OQ = QU (∠ OUT = R), und es ergiebt sich 1stens) △OQU ∾ △GDE, da nach 332 ∠ UOQ oder ∠ (mh) = $\frac{\beta-\gamma}{2}$ ist, und sich eben so nach 2267 der auf der Hälfte des Bogens GED stehende ∠ EGD = $\frac{\beta-\gamma}{2}$ findet. 2tens) hat man FU = TV = ϱ' erhalten, weshalb, sobald man FS = FO = ϱ bestimmt, OU = $\varrho'+\varrho$, und SU = $\varrho'-\varrho$ ist.

Da nun
TW : OR = AW : AR, oder nach 339 und 1354
ϱ' : ϱ = $\frac{b+c+a}{2}$: $\frac{b+c-a}{2}$ ist, sich folglich d. A. u. S. d. B. Gl.
$\varrho'+\varrho$: $\varrho'-\varrho$ = b + c : a ergiebt, so ist wegen 2)
OU : SU = b + c : a. Man hat aber nach 209 und 205
p—q : b—c = b + c : a, also muß
OU : SU = p — q : b—c sein. Eben so ist jedoch
GD : FD = p — q : b—c, da nach 2266 GD = $\frac{p-q}{2}$, und nach 1420 FD = $\frac{b-c}{2}$ ist, demnach findet sich
OU : SU = GD : FD, und d. S. d. B. Gl.
OS : OU = GF : GD. Nun ist aber auch
OQ : OU = GE : GD, da nach 1) △OQU ∾ △GDE, folglich hat man
OS : OQ = GF : GE. Hieraus ergiebt sich,

indem zugleich nach 1) $\angle FGE = \angle QOS = \frac{\beta - \gamma}{2}$ ist, $\triangle QOS \sim \triangle GEF$, weshalb.

$\left\{\begin{array}{l} FG : OS = IE : FD \text{ sein muß. (Grundl. w. d. Höhen.)} \\ \qquad\qquad \text{Ferner ist (für H in der } \odot\text{linie um M)} \\ HF : FG = FD : FE \text{ (Sehnensatz), und} \\ IE : FE = HE : EN, \text{ da } \triangle IEF \sim \triangle EHN. \text{ Demnach ergiebt sich d. Zus. f.} \end{array}\right.$

HF : OS = HE : EN, oder da OS = 2OF, EN = 2EM, HF : OF = HE : EM. Hieraus folgt, wegen der Parallelität von OF und ME, daß H in der Lage der Centrale MO liegt, weshalb endlich OH = OF = ρ ist, also der O um M wirklich den ⊙ um O berührt.

2269. Fig. 469. Die jede Seite eines △ halbirende Kreislinie berührt alle ⊙⊙ am △ von Außen.

Analysis. } Ergeben sich mit geringen Aenderungen
Beweis. } wie in 2268, wenn man überall ρ′ statt ρ und umgekehrt, Tangentensatz statt Sehnensatz, einigemal — SU statt SU, einigemal — a statt a, und umgekehrt, A. d. B. Gl. statt S. d. B. Gl. und umgekehrt ließt, und Fig. 469. statt Fig. 468. benutzt.

2270. Fig. 470. Die alle Seiten eines △ halbirende Kreislinie berührt sämmtliche sechzehn ⊙⊙, die sich ergeben, wenn man zu jedem der vier durch den Schneidungspunkt der Höhen und die drei Winkelspitzen gebildeten △△ die vier ⊙⊙ zeichnet, welche, einzeln genommen, die drei Seitenlinien eines solchen △s innerhalb oder außerhalb tangiren.

Beweis. Nach 2265 bildet die jede Seite des △ ABC halbirende Kreislinie um M einen Ort für die Halbirungspunkte aller vom Schneidungspunkt der Höhen D nach der Peripherie des ⊙ ums △ führenden Linien. Daher ist DH = HA, DI = IB, DN = NC. Hieraus folgt, daß

von der Kreislinie um M nicht bloß alle 3 Seiten des △s ABC halbirt werden, sondern daß ganz dasselbe bei jedem der übrigen vorhandenen △△ BCD, ACD und ABD statt findet. Nach 2268 tangirt aber die alle Seiten eines △ halbirende Kreislinie den ⊙ im △ von Innen, folglich berührt die Kreislinie um M die 4 ⊙⊙ im △ um Ω, Ω', Ω'', Ω''' von Innen. Nach 2269 tangirt ferner die jede Seite eines △ halbirende Kreislinie auch die zu demselben gehörenden 3 ⊙⊙ am △ von Außen, demnach berührt dieselbe Kreislinie um M wirklich auch sämmtliche 12 ⊙⊙ am △, deren Mittelpunkte mit O, O′, O″, O‴ bezeichnet sind.

2271. Fig. 471. 1) Die vier ⊙⊙, welche sich um ein △ ABC, und um je zwei von dessen Winkelspitzen und den Schneidungspunkt der Höhen D′ beschreiben lassen, sind alle von derselben Größe. 2) Die Centralen der drei (den Kreis um ABC nicht gerechnet) entstandenen Mittelpunkte bilden ein dem △ABC ≅ △A′B′C′. 3) Der Schneidungspunkt der Höhen D′ des △ ABC bildet den Mittelpunkt des ⊙ um das △ A′B′C′. 4) Der Mittelpunkt D des ⊙ um das △ ABC ist der Schneidungspunkt der Höhen für das △ A′B′C′.

Beweis zu 1). Da ∠ CD′B = R + ∠ D′BA = 2R − α ist, so ergiebt sich der andere zu BC gehörende Peripherie∠ in dem ⊙ um CD′B = α, folglich der Centri∠ CA′B = 2α, und deshalb das △ CA′B ≅ △ CDB, dessen Spitze D der Mittelpunkt des ⊙ um △ ABC bildet. Hieraus folgt CA′ = CD = r. Eben so erhält man BC′ = BD = r, u. s. w.

Beweis zu 2). Da nach dem Beweise 1) △ AC′B ≅ △ ABD ist, so hat man AC′ = und ∓ DB. Eben so ergiebt sich AB′ = und ∓ DC. Hieraus folgt △ AB′C′ ≅ △ CDB, weshalb B′C′ = CB sein muß. Auf dieselbe Art

läßt sich $A'B' = BA$, und $C'A' = AC$ erweisen. Demnach ist wirklich $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

Beweis zu 3). Da nach 1) sowohl $A'D'$ als $B'D'$ und $C'D' = r$ ist, so bildet D' den Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle A'B'C'$.

Beweis zu 4). Da 2 Seiten der nach 2) $\cong \triangle\triangle$ $AB'C'$ und $A'BC$ $\not\cong$ sind, so findet dasselbe mit den dritten Seiten $B'C'$ und BC statt. Hieraus folgt, daß $A'D$, welche Linie die Spitzen der $\triangle\triangle$ CDB und $CA'B$ verbindet, nicht bloß auf CB, sondern auch auf $B'C' \perp$ steht. Eben so ergiebt sich $B'D$ als $\perp$ auf $A'C'$, und $C'D$ als $\perp$ auf $A'B'$. Daher muß D, der Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle ABC$, den Schneidungspunkt der Höhen für das $\triangle A'B'C'$ bilden.

2272. Fig. 471. Die Winkelspitzen eines $\triangle$ und der Schneidungspunkt der Höhen bilden überhaupt 4 $\triangle\triangle$. Die 6 Centralen der um dieselben beschriebenen $\odot\odot$ geben 4 andere $\triangle\triangle$. Zu jedem dieser 8 $\triangle\triangle$ gehören 4 die 3 Seitenlinien desselben berührenden $\odot\odot$. Die alle Seiten des zuerst genannten $\triangle$ halbirende Kreislinie berührt sämmtliche vorher erwähnten 32 $\odot\odot$.

Beweis. Sind ABC, ABD', BCD', CAD' die zuerstgenannten 4 $\triangle\triangle$ und D, C', A', B' die zugehörigen Mittelpunkte der um dieselben beschriebenen $\odot\odot$, so bilden $A'B'C'$, $A'B'D$, $B'C'D$ und $C'A'D$ die anderen 4 $\triangle\triangle$, welche mit jenen gleichartig zusammengesetzt sind, da nach 2271. 4) D, der Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle ABC$, zugleich der Schneidungspunkt der Höhen für das $\triangle A'B'C'$ ist. Nach 2271. 3) bildet ferner D', der Schneidungspunkt der Höhen des $\triangle ABC$, zugleich den Mittelpunkt des $\odot$ um das $\triangle A'B'C'$. Hieraus geht nach 2263 hervor, daß M, der Mittelpunkt der alle Seiten des $\triangle ABC$ halbirenden Kreislinie, den gleichnamigen Mittelpunkt für das $\triangle A'B'C'$ bildet, und außerdem ergiebt sich, da beide $\triangle\triangle$ nach 2271. 2.) $\cong$ sind, daß jene Kreislinie nicht bloß die Seiten des $\triangle$

ABC sondern auch die des △ A'B'C' halbirt. Daraus folgt nun endlich, daß die Kreislinie um M, welche nach 2270 die 16 zu den △△ ABC, ABD', BCD', CAD' gehörenden ⊙⊙ tangirt, aus denselben Gründen auch die 16 gleichnamigen ⊙⊙ von den △△ A'B'C', A'B'D, B'C'D, C'A'D berühren muß.

2273. Fig. 472 und 473. 1) Verbindet man die Mittelpunkte M, N, O, Q der 4 die 3 Seitenlinien eines △ ABC berührenden ⊙⊙ mit den vorhandenen 12 Berührungspunkten, und verlängert die erhaltenen 12 Radien gehörig, so schneiden sich dieselben in den Mittelpunkten der 4 Kreislinien, welche durch je 3 der vorhergenannten Centra gelegt werden können. 2.) Die 8 Kreislinien, welche durch je 3 der ursprünglichen 4, oder durch je 3 der abgeleiteten 4 Mittelpunkte beschrieben werden können, sind alle von derselben Größe. Der Halbmesser einer jeden ist doppelt so groß als der Radius des ⊙ um das Grunddreieck ABC.

Beweis zu 1). Fig. 472. Da ∠ SBQ = ∠ F'BN ist, muß ∠ SQN = ∠ F'NQ sein (Komplemente). Auf demselben Wege ergiebt sich ∠ F'NO = ∠ D'ON, und ∠ D'OQ = ∠ SQO. Beschreibt man, Fig. 473., um △ NOQ einen ⊙, und verlängert die wie in Fig. 472 liegenden Linien NF', OD' und QS bis F, D und E, so erhält man, da nach dem Vorigen ∠ F'NO + ∠ F'NQ + ∠ D'OQ = R ist, auch ∠ ONF' + ∠ F'NQ + ∠ QND, oder ∠ OND = R. Daher muß OD ein Durchmesser sein. Eben so findet sich ∠ NOF und ∠ QNE = R, folglich sind die Linien NF und QE gleichfalls Durchmesser, und es schneiden sich deshalb wirklich die 3 Linien NF', OD' und QS, Fig. 472 und 473, in dem Mittelpunkt M' des ⊙ um das △ ONQ. Ferner hat man (Fig. 472.) ∠ H'QN = ∠ ENQ (Komplemente der = ∠ H'BQ und EBN), und außerdem ∠ H'QM = ∠ QMO' (Komplemente der = ∠ E'AM

und G′AM), und ∠ ENM = ∠ O′MN (Komplemente der = ∢ MCI und MCG′), demnach läßt sich wie vorher beweisen, daß auch die Verlängerungen der 3 Radien QH′, MG′ und NE in dem Mittelpunkt O′ des ⊙ um das △ NMQ zusammentreffen. Eben so ergeben sich endlich N′ und Q′, die Mittelpunkte der ⊙⊙ um die △△ OMQ und OMN, als Durchschnittspunkte der übrigen 6 Radien.

Beweis zu 2.) Nach 1417 ist M der Schneidungspunkt der Höhen für das △ NOQ, daher sind die 4 ⊙⊙ um die △△ NOQ, NMQ, NMO, OMQ nach 2271. 1) alle von derselben Größe. Eben so ergiebt sich, da nach 2271. 4) M′, der Mittelpunkt des ⊙ um das △ NOQ, zugleich der Schneidungspunkt der Höhen für das △ N′O′Q′ ist, daß alle 4 ⊙⊙ um die △△ N′O′Q′, N′M′Q′, N′M′O′ und O′M′Q′ dieselbe Größe haben müssen. Nun sind aber die letzteren 4 △△ den 4 vorhergenannten ≅, da nach 2271. 2) △ N′O′Q′ ≅ △ NOQ ist, folglich müssen alle um diese 8 △△ beschriebenen ⊙⊙ von gleicher Größe sein. Der Halbmesser eines jeden ist endlich doppelt so groß als der Radius des ⊙ um das Grunddreieck ABC, da A,B,C die Fußpunkte der Höhen im △ NQO sind, also nach 2264 eine diese Punkte durchlaufende Kreislinie die Seiten des △ NOQ halbirt, und deren Radius deshalb nach 2262 halb so groß sein muß als der Halbmesser des ⊙ um das △ NOQ.

2274. Fig. 472. Jeder Durchmesser eines ⊙ ums △, welcher auf einer Seite winkelrecht steht, wird von derselben in 2 Abschnitte getheilt. Der zum Theil in das △ fallende Abschnitt ist halb so groß als die Summe der Radien derjenigen beiden ⊙⊙ am △, welche die undurchschnittenen Seiten außerhalb des △ berühren $\left(\perp FG = \frac{\varrho'' + \varrho'''}{2}\right)$. Der andere Abschnitt ist halb so groß als der Un-

terschied von den Radien des dritten ⊙ am △ und des ⊙ im △ $\left(\perp GH = \frac{\varrho' - \varrho}{2}\right)$.

Beweis. Sind N, O, Q die Mittelpunkte der Berührungskreise am △ ABC, so bilden die Punkte A, B, C nach 1417 die Fußpunkte der Höhen des △ NOQ. Hieraus folgt, (wenn H in AQ ꝛc. angenommen wird) da zugleich CH = HB ist, daß FH einen ⊥ BC stehenden Durchmesser bildet, also ∓ NE und OD, oder ϱ''' und ϱ'' ist. Nun halbirt aber nach 2264 die Kreislinie ums △ ABC die Seiten des △ NOQ, demnach ist FN = FO, und deshalb in dem ▭ ONED nach 172. a. $2FG = OD + NE = \varrho'' + \varrho'''$.

Da ferner GH ∓ MI und SQ, oder ϱ und ϱ', nach dem Vorigen ist, HM aber = HQ nach 1422 sein muß, so ergiebt sich endlich nach 172. b. in dem ▭ IMQS $2HG = QS - IM = \varrho' - \varrho$.

Anmerkung. Aus dem vorstehenden Gesetz folgen sehr einfache Auflösungen für die Aufgaben △ aus r, ϱ, ϱ', und △ aus r, ϱ', ϱ'', siehe 2046 und 2047.

2275. Fig. 472. Durch den vorhergehenden Satz wird man auf die folgenden bei △△ statt findenden Sätze geleitet:

1) Der Durchmesser des ⊙ am △, welcher die Hypotenuse selbst berührt, ist dem Umfange des △ gleich ($2\varrho''' = a + b + c$).

Beweis. Nach 839 ist $2CE = a + b + c$. Nun muß aber, wenn $\gamma = R$, ∠ NCE = ∠ ENC = ½R sein, also auch 2NE oder $2\varrho''' = 2CE$ oder $a + b + c$.

2) Die Summe der Durchmesser des ⊙ im △ und der beiden die Katheten selbst berührenden ⊙⊙ am △ ist stets dem Umfange des △ gleich. ($2\varrho + 2\varrho' + 2\varrho'' = a + b + c$).

Beweis. Die △△ IMC, CMG', SQC, F'CQ, D'OC und OCD sind rechtwinklig und gleichschenklig. Nach 873 ist daher

$\varrho + \varrho''$, oder $DI = AC$, und
$\varrho + \varrho'$, oder $GI' = BC$. Ferner muß aber nach 1418
$\varrho' + \varrho''$, oder $DI' = AB$ sein, demnach ist
$2\varrho + 2\varrho' + 2\varrho'' = a + b + c$.

3.) Der Radius des $\odot$ am $\triangle$, welcher die Hypotenuse eines $\triangle$ selbst berührt, ist eben so groß als die Summe von den Radien der beiden übrigen $\odot\odot$ am $\triangle$ nebst dem Radius des $\odot$ im $\triangle$. ($\varrho''' = \varrho + \varrho' + \varrho''$).

Beweis. Folgt aus 1) und 2.)

4.) In jedem $\triangle$ ist die Summe von den Radien der beiden $\odot\odot$ am $\triangle$, welche die Katheten selbst berühren, oder der Unterschied zwischen dem Radius des die Hypotenuse selbst berührenden $\odot$ am $\triangle$ und dem Radius des $\odot$ im $\triangle$ eben so groß als der Radius des $\odot$ ums $\triangle$, oder die halbe Hypotenuse. ($\varrho' + \varrho''$, oder $\varrho''' - \varrho = r = \frac{c}{2}$.)

Beweis. Nach 1418 ist $D'I' = AB$ oder $2r$. $D'I'$ ist aber $= \varrho' + \varrho''$, da $D'OC$ und CQI' $\triangle\triangle$ sind. $\varrho''' - \varrho$ endlich hat dieselbe Größe, da nach 3) $\varrho''' - \varrho = \varrho' + \varrho''$ sein muß.

2276. Fig. 472. 1.) Die Summe der beiden aus dem Mittelpunkt des $\odot$ ums $\triangle$ auf 2 Seiten desselben gefällten $\perp\perp$ ist stets halb so groß als die Summe der Radien des $\odot$ im $\triangle$ und des $\odot$ am $\triangle$, welcher die dritte Seite des $\triangle$ geradezu berührt. $\left(VT + VU = \frac{\varrho + \varrho'}{2}\right)$.

2) Der Unterschied derselben $\perp\perp$ ist dagegen halb so groß als der Unterschied der Radien der beiden $\odot\odot$ am $\triangle$, welche die zu den $\perp\perp$ gehörenden Seiten geradezu berühren. $\left(VU - VT = \frac{\varrho''' - \varrho}{2}\right)$.

Beweis zu 1.) Nach 2274 ist $2TR = \varrho''' - \varrho$, und $2UW = \varrho'' - \varrho$. Daher ergiebt sich

$2VT = 2r - \varrho''' + \varrho$, und
$2VU = 2r - \varrho'' + \varrho$, also

$2VT + 2VU = 4r - \varrho''' - \varrho'' + 2\varrho$. Nach 2274 ist aber
$2FG = \varrho''' + \varrho''$, demnach hat man

$2VT + 2VU + 2FG = 4r + 2\varrho$, oder, da
$2FG = 4r - 2GH$, d. Subtr.

$2VT + 2VU = 2GH + 2\varrho$. Hieraus folgt endlich, da nach 2274 $2GH = \varrho' - \varrho$ ist,

$2VT + 2VU = \varrho' - \varrho + 2\varrho$, oder

$$VT + VU = \frac{\varrho' + \varrho}{2}$$

Beweis zu 2). Wie in 1) ergiebt sich
$2VT = 2r - \varrho''' + \varrho$, und
$2VU = 2r - \varrho'' + \varrho$, folglich erhält man d. S.

$2VU - 2VT = \varrho''' - \varrho''$, und

$$VU - VT = \frac{\varrho''' - \varrho''}{2}.$$

2277. Fig. 472. Die Summe der 3 $\perp\perp$, welche aus dem Mittelpunkt des $\odot$ ums $\triangle$ auf die 3 Seiten gefällt werden können, ist stets eben so groß als die Summe der Radien des $\odot$ im $\triangle$ und des $\odot$ ums $\triangle$. $(VG + VU + VT = \varrho + r)$.

Beweis. Nach 2274 hat man
$2VG = 2r - \varrho' + \varrho$
$2VU = 2r - \varrho'' + \varrho$
$2VT = 2r - \varrho''' + \varrho$, also d. A.

$2VG + 2VU + 2VT = 6r - \varrho' - \varrho'' - \varrho''' + 3\varrho$. Nun ist nach 2282
$4r = \varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho$, also muß

$2VG + 2VU + 2VT = 2r + \varrho$; oder
$VG + VU + VT = r + \varrho$ sein, w. z. b. w.

2278. Fig. 467. Die Verbindungslinie zwischen dem Schneidungspunkt der Höhen und einer Winkelspitze eines △ ist stets doppelt so groß als der aus dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ auf die Gegenseite gefällte ⊥.

Beweis. Sind MF und MD zwei ⊥ ⊥, und bildet Q den Schneidungspunkt der Höhen, so ergiebt sich △ AQC ∾ △ DMF, da alle Seiten beider △△ ∦ laufen. Hieraus folgt AQ : MF = AC : DF. Nun ist aber AC = 2DF, da BA = 2BD, folglich muß auch AQ = 2MF sein.

2279. Fig. 467. In jedem △ liegen der Mittelpunkt des ⊙ ums △, der Schwerpunkt, der Mittelpunkt der alle Seiten halbirenden Kreislinie und der Schneidungspunkt der Höhen in einer geraden Linie, und bestimmen durch ihre Lage zum letzten Punkt eine harmonische Proportion für MQ, TQ, OQ, oder MT : TO = MQ : QO.

Beweis. Der Schwerpunkt T theilt jede eine Seite halbirende Transversale AF nach dem Verhältniß 1:2. Nun ist aber nach 2278 auch MF : AQ = 1 : 2, folglich liegt T in MQ, und bestimmt, wenn man MQ = 1 setzt, MT = $\frac{2}{3}$. Nach 2263 liegt ferner der Mittelpunkt der jede Seite des △ ABC halbirenden Kreislinie in der Mitte von MQ, demnach liegen die 4 genannten Punkte wirklich in gerader Linie, und bilden durch ihre Lage die harmonische Proportion MT : TO = MQ : QO, da sich MT = $\frac{2}{3}$, TO = $\frac{1}{3}$, OQ = $\frac{1}{2}$ aus der Annahme MQ = 1 ergiebt.

2280. 1) Die Summe der Abstände zweier Winkelspitzen eines △ vom Durchschnittspunkt der Höhen ist eben so groß als die Summe der Radien des ⊙ im △ und desjenigen ⊙ am △, welcher die zwischen den Winkelspitzen liegende Seite selbst berührt.

2). Der Unterschied der Abstände derselben Linien ist stets eben so groß wie der Unterschied

der Radien derjenigen beiden ⊙⊙ am △, welche die Gegenseiten der benutzten Winkelspitzen selbst berühren.

Beweis. Folgt durch 2278 aus 2276.

2281. Die Summe der Abstände der 3 Winkelspitzen eines △s vom Durchschnittspunkt der Höhen ist eben so groß als die Summe der beiden Durchmesser, welche zu den ⊙⊙ im und ums △ gehören.

Beweis. Folgt durch 2278 aus 2277.

2282. Fig. 472. In jedem △ ist die Summe der Radien aller ⊙⊙ am △ weniger dem Radius des ⊙ im △ gleich dem doppelten Durchmesser des ⊙ ums △, oder $\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = 4r$.

Beweis. Nach 2274 haben die beiden Abschnitte des auf BC ⊥ stehenden Durchmessers die nachstehenden Längen. Es ist

$$2FG = \varrho'' + \varrho''', \text{ und}$$
$$2GH = \varrho' - \varrho. \quad \text{Hieraus folgt d. L.}$$
$$4r = \varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho.$$

2283. Fig. 467. Die Summe der Abstände des Centrums der alle Seiten eines △ halbirenden Kreislinie von den Mittelpunkten der 4 die drei Seitenlinien desselben berührenden ⊙⊙ ist 3mal so groß als der Durchmesser des ⊙ ums △. ($OU + OV + OY + OZ = 6r$.)

Eben so groß ist die Summe der Abstände desselben Centrums von den gleichnamigen 4 Mittelpunkten jedes der 3 △△, welche vom Schneidungspunkt der Höhen mit je zwei Winkelspitzen des Grunddreiecks gebildet werden.

Beweis. Nach 2262, 2268 und 2269 hat man

$$OV = \frac{r}{2} + \varrho',$$

$$OY = \frac{r}{2} + \varrho'',$$

$$OZ = \frac{r}{2} + \varrho''',$$

$$OU = \frac{r}{2} - \varrho. \quad \text{Hieraus folgt d. A.:}$$

$$OV + OY + OZ + OU = 2r + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho. \quad \text{Nach}$$

2282 ist aber

$$\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = 4r, \text{ also muß}$$

$$OV + OY + OZ + OU = 6r \text{ sein.}$$

Nach 2265 halbirt die Kreislinie um O auch alle Seiten von jedem der 3 $\triangle\triangle$, welche der Schneidungspunkt der Höhen O mit je 2 von den 3 Winkelspitzen A, B, C bildet, und die Halbmesser der $\odot\odot$ um diese $\triangle\triangle$ haben mit dem Radius des $\odot$ um das $\triangle$ ABC nach 2271. 1) dieselbe Größe r; folglich muß sich ganz wie vorher bei jedem der 3 $\triangle\triangle$ die Summe der zu Paar stehenden Linien eben so groß wie bei dem $\triangle$ ABC, nämlich $= 6r$, ergeben.

2284. Die Summe der Abstände des Centrums der alle Seiten eines $\triangle$ halbirenden Kreislinie von den 32 Mittelpunkten der in 2272 näher bezeichneten $\odot\odot$ ist 48 mal so groß als der Radius r des $\odot$ ums $\triangle$.

Beweis. Folgt durch 2283 aus 2272.

2285. Fig. 472. Die Fläche jedes $\triangle$ ist die mittlere Proportionalfläche zwischen den beiden Rechtecken, welche aus je zwei von den 4 die 3 Seitenlinien des $\triangle$ berührenden $\odot\odot$ gebildet werden können, d. h. (398), es ist $f^2 = \sqrt{\varrho\varrho'\varrho''\varrho'''}$.

Beweis. Sind N, Q, O die Mittelpunkte der $\odot\odot$ am $\triangle$, so bilden CN, BQ und AQ die Höhen des $\triangle$NOQ nach 1417, woher MAQC und BNQC $\square\square$ im $\odot$ sind, also $\angle$ BXC $=$ $\angle$ MOC $=$ $\angle$ MAC $= \frac{\alpha}{2}$ sein muß, deshalb CX $= b + c$ ist. Da nun CY nach 339 die Länge $\frac{a+b+c}{2}$ hat, so findet sich YX $= \frac{b+c-a}{2}$, woraus $\perp$

$NY : \frac{b+c+a}{2} = \frac{b+c-a}{2} : YZ$ hervorgeht. $\perp NY$ ist aber $= \varrho'''$ und $\perp YZ = \varrho''$, da $\angle OZN = R$, also $ZY = QD'$ sein muß: folglich ergiebt sich $\varrho''' : \frac{b+c+a}{2} = \frac{b+c-a}{2} : \varrho''$. Nun hat man ferner

$$f^2 = \varrho \frac{b+c+a}{2} \text{ nach 343, und}$$

$$f^2 = \varrho' \frac{b+c-a}{2} \text{ nach 1541, weshalb}$$

$\varrho \frac{b+c+a}{2} : f^2 = f^2 : \varrho' \frac{b+c-a}{2}$ sein muß. Vorher ergab sich auf

$\varrho''' : \frac{b+c+a}{2} = \frac{b+c-a}{2} : \varrho''$, also erhält man durch Zus. f.

$\varrho\varrho''' : f^2 = f^2 : \varrho'\varrho''$, oder (398)

$$f^2 = \sqrt{\varrho\,\varrho'\,\varrho''\,\varrho'''}.$$

Anmerkung. Da nach 1969

$$\varrho : \frac{a+c-b}{2} = \frac{a+b-c}{2} : \varrho'$$

ist, so läßt sich auf dem zuletzt in dem vorstehenden Beweise eingeschlagenen Wege auch die Proportion

$$\frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+c-b}{2} : f^2 = f^2 : \frac{a+b-c}{2} \times \frac{b+c-a}{2},$$

oder die bekannte Formel:

$$f^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}$$

geometrisch erweisen.

2286. Fig. 472. Durch 2283 wird man auf die folgenden Sätze von $\triangle$ geleitet:

1.) Das Rechteck aus den Halbmessern der beiden $\odot\odot$ am $\triangle$, welche die Katheten selbst berühren, ist eben so groß als das Rechteck aus dem Halbmesser des die Hypotenuse geradezu berührenden $\odot$ am $\triangle$ und dem Radius des $\odot$ im $\triangle$. ($\varrho'\varrho'' = \varrho\varrho'''$).

Beweis. Nach 1543 ist

$$CD' = AG' = AE', \text{ und}$$
$$CS = BI = BE'. \text{ Hieraus folgt}$$
$$CD' \times CS = AE' \times BE'.$$

Da CD'O und CQS rechtwinklige gleichschenklige $\triangle\triangle$ sind, ($\angle\gamma = R$), so hat man $CD' = \varrho'$, und $CS = \varrho''$, also $CD' \times CS = \varrho'\varrho''$. Nach 1969 ist aber ferner $AE' \times BE' = \varrho\varrho'''$, folglich muß

$$\varrho'\varrho'' = \varrho\varrho''' \text{ sein.}$$

2) Die Fläche eines $\triangle$ ist eben so groß als das Rechteck aus den Halbmessern der beiden $\odot\odot$ am $\triangle$, welche die Katheten selbst berühren, oder als das Rechteck aus den Halbmessern des die Hypotenuse geradezu berührenden $\odot$ am $\triangle$ und des $\odot$ im $\triangle$. ($\varrho'\varrho'' = f^2 = \varrho\varrho'''$).

Beweis. Nach 341 ist $f^2 = \frac{1}{2}\varrho(a+b+c)$, und nach 2275. 1) $\frac{1}{2}(a+b+c) = \varrho'''$, folglich muß $f^2 = \varrho\varrho'''$ sein. $\varrho\varrho'''$ ist aber nach 1) $= \varrho'\varrho''$, demnach ist f^2 auch $= \varrho'\varrho''$.

2287.

Geometrische Bestimmung von 21 bei einem $\triangle$ vorhandenen Centrallinien, durch je 2 oder 3 der Radien, welche zu den nachstehenden 7 jene Abstände der Mittelpunkte bildenden Kreisen gehören.

Fig. 467.
- I. M. $\odot$ ums $\triangle$ mit dem Radius r.
- II. U. $\odot$ im $\triangle$ " " " ϱ.
- III. V. $\odot\odot$ am $\triangle$ " " " ϱ'.
- IV. Y. " " " " ϱ''.
- V. Z. " " " " ϱ'''.
- VI. O. $\odot$ um das von den Fußpunkten der Höhen gebildete $\triangle$ nach 2264 und 2262 " " " $\frac{r}{2}$.

VII. Q. Wenn das Grunddreieck spitzwinklig ist: ⊙ in dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △ mit dem Radius r. oder, wenn das Grunddreieck stumpfwinklig ist: ⊙ an dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △ mit dem Radius r', welcher die keine Seite des Grunddreiecks schneidende Seite des Höhendreiecks geradezu berührt. ⊙ um Q Fig. 467. a.

1) (MU) Die Centrallinie der Mittelpunkte des ⊙ im und des ⊙ ums △ ist die mittlere Proportionale zwischen r und r − 2ϱ.

Beweis. Siehe 2. Ber. §. 12.

2), 3), 4) (MV, MY, MZ). Die vom Mittelpunkt des ⊙ im △ nach den Mittelpunkten der 3 ⊙⊙ am △ führenden Centrallinien bilden mittlere Proportionalen zwischen r und r + 2ϱ', oder r und r + 2ϱ'', oder r und r + 2ϱ'''.

Beweis. Siehe 2028.

5) (UO) Die Centrallinie zwischen dem Mittelpunkt des ⊙ im △ und dem Mittelpunkt des ⊙ um das von den Fußpunkten der Höhen gebildete △ ist $= \frac{r}{2} - \varrho$.

Beweis. Siehe 2268.

6), 7), 8) (VO, YO, ZO). Die 3 Centrallinien zwischen den Mittelpunkten der ⊙⊙ am △, und dem Mittelpunkt des ⊙ um das von den Fußpunkten der Höhen gebildete △ haben die Längen $\frac{r}{2} + \varrho'$, $\frac{r}{2} + \varrho''$, $\frac{r}{2} + \varrho'''$.

Beweis. Siehe 2269.

9) (QO) Für spitzwinklige △. Die Centrale der Mittelpunkte des ⊙ in dem und des ⊙ um das

von den Fußpunkten der Höhen gebildete △ ist die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{r}{2}$ und $\frac{r}{2} - 2r$.

Beweis. Siehe g. Betr. §. 12.

9. a) Fig. 467. a. (QQ) Fürs stumpfwinklige △. Die Centrale zwischen dem Mittelpunkt eines ⊙ an dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △ und dem Mittelpunkt des ⊙ um dasselbe △ ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Halbmesser des letzteren ⊙ und der Summe aus demselben Radius und dem Durchmesser des zuerst genannten ⊙. $\left(\frac{r}{2} : OQ = OQ : \frac{r}{2} + 2r\right)$.

Beweis. Siehe 2028.

10) (OM) Fürs spitzwinklige △. Die von dem Mittelpunkte des ⊙ um das von den Fußpunkten der Höhen gebildete △ nach dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ führende Centrale ist die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{r}{2}$ und $\frac{r}{2} - 2r$.

Beweis. Betrachtet man das von den Fußpunkten der Höhen gebildete △NRH als das ursprüngliche, und △ABC als das abgeleitete, so bildet nach 1417 der Mittelpunkt Q des ⊙ im △ NRH den Schneidungspunkt der Höhen für das △ ABC. Hieraus folgt nach 2264 und 2262, daß der Mittelpunkt O des ⊙ um das △NRH mit dem Mittelpunkt Q des ⊙ in demselben △, und dem Mittelpunkt M des ⊙ um das △ ABC in dieselbe gerade Linie fällt, und QM halbirt, woher die in Rede stehende Centrallinie mit der Centrallinie 9) übereinstimmt.

10. a) Fig. 467. a. (OM) Fürs stumpfwinklige △. Die von dem Mittelpunkte des ⊙ um das von den Fußpunkten der Höhen gebildete △ nach dem

Mittelpunkt des ⊙ ums △ führende Centrale ist die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{r}{2}$ und $\frac{r}{2} + 2r$.

Beweis. Ergiebt sich wörtlich wie in 10), wenn man am statt im, 9. a) statt 9) liest, und Fig. 467. a. benutzt.

11) (QM) Fürs spitzwinklige △. Die von dem Mittelpunkte des ⊙ in dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △ nach dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ führende Centrale ist die mittlere Proportionallinie zwischen r und $r - 4r$.

Beweis. Folgt aus dem Beweise 10).

11. a) Fig. 467. a. (MQ) Fürs stumpfwinklige △. Die Centrale zwischen dem Mittelpunkt des ⊙ ums △ und dem Mittelpunkt desjenigen ⊙ an dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △, welcher ꝛc. ꝛc., ist die mittlere Proportionallinie zwischen r und $r + 4r$.

Beweis. Folgt aus dem Beweise 10. a).

12) (QU) Fürs spitzwinklige △. Das halbe Quadrat der Centrallinie zwischen dem Mittelpunkt des ⊙ in dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △ und dem Mittelpunkt des ⊙ im △ ist $= \varrho^2 - rr$.

Beweis. Man hat nach 10) $OM^2 = OQ^2 = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 2r\right)$, ferner nach 1) $UM^2 = r(r - 2\varrho)$, und nach 5) die Transversale $UO = \frac{r}{2} - \varrho$.

Nun ist nach 218 Zusatz

$\frac{UQ^2}{2} + \frac{UM^2}{2} = UO^2 + OQ^2$, oder

$\frac{UQ^2}{2} + \frac{UM^2}{2} - UO^2 = QQ^2$. Hieraus folgt

$\frac{UQ^2}{2} + r\left(\frac{r}{2} - \varrho\right) - \left(\frac{r}{2} - \varrho\right)^2 = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 2r\right)$,

oder, wenn man die beiden Rechtecke mit derselben Höhe $\left(\frac{r}{2} - \varrho\right)$ vereinigt, und bei dem dritten Rechteck umgekehrt verfährt,

$$\frac{UQ^2}{2} + \left(\frac{r}{2} - \varrho\right)\left[r - \left(\frac{r}{2} - \varrho\right)\right] = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - rr,$$

d. h. es ist

$$\frac{UQ^2}{2} + \left(\frac{r}{2} - \varrho\right)\left(\frac{r}{2} + \varrho\right) = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - rr, \text{ oder nach 205}$$

$$\frac{UQ^2}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - \varrho^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - rr, \text{ weshalb}$$

$$\frac{UQ^2}{2} = \varrho^2 - rr \text{ sein muß.}$$

12. a) Fig. 467. a. (UQ) Fürs stumpfwinklige △. Das halbe Quadrat der Centrallinie zwischen dem Mittelpunkt des ⊙ im △ und dem Mittelpunkt desjenigen ⊙ an dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △, welcher ꝛc., ist $= \varrho^2 + rr'$.

Beweis. Ergiebt sich wörtlich wie in 12), wenn man jedes Glied welches r enthält nicht subtrahirt, sondern addirt, r' statt r, 10) a. statt 10) liest, und Fig. 467. a. benutzt.

13), 14), 15) (OV, OY, OZ) Fürs spitzwinklige △. Das halbe Quadrat der Centrallinie zwischen dem Mittelpunkte des ⊙ in dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △ und einem Mittelpunkt der 3 ⊙⊙ am △ ist entweder $= \varrho'^2 - rr$, oder $\varrho'''^2 - rr$, oder $\varrho''''^2 - rr$.

Beweis. Man hat nach 10) $OM^2 = OQ^2 = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 2r\right)$, ferner nach 2), 3), 4) $MV^2 = r(r + 2\varrho')$, und nach 6), 7), 8) die Transversale $VO = \frac{r}{2} + \varrho'$ ꝛc.

Nun ist nach 218 Zusatz

$$\frac{VQ^2}{2} + \frac{VM^2}{2} = VO^2 + OQ^2, \text{ oder}$$

$\frac{VQ^2}{2} + \frac{VH^2}{2} - VO^2 = OQ^2$. Hieraus folgt

$\frac{VQ^2}{2} + r\left(\frac{r}{2} + \varrho'\right) - \left(\frac{r}{2} + \varrho'\right)^2 = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 2r\right)$, oder, wenn man die beiden Rechtecke mit derselben Höhe $\left(\frac{r}{2} + \varrho'\right)$ vereinigt, und bei dem dritten Rechteck umgekehrt verfährt,

$\frac{VQ^2}{2} + \left(\frac{r}{2} + \varrho'\right)\left[r - \left(\frac{r}{2} + \varrho'\right)\right] = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - rr$,

d. h. es ist

$\frac{VQ^2}{2} + \left(\frac{r}{2} + \varrho'\right)\left(\frac{r}{2} - \varrho'\right) = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - rr$, oder nach 205

$\frac{VQ^2}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - \varrho''^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - rr$, weshalb

$\frac{VQ^2}{2} = \varrho''^2 - rr$ sein muß.

13. a.), 14. a.), 15. a.) Fig. 467. a. (VQ ꝛc.) Für stumpfwinklige △. Das halbe Quadrat der Centrallinie zwischen einem Mittelpunkt der 3 ⊙⊙ am △ und dem Mittelpunkt desjenigen ⊙ an dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △, welcher π., ist entweder $= \varrho'^2 + rr'$, oder $\varrho'''^2 + rr'$, oder $\varrho''''^2 + rr'$.

Beweis. Ergiebt sich wörtlich wie in 13), 14), 15), wenn man jedes Glied, welches r enthält, nicht subtrahirt, sondern addirt, r' statt r, 10. a) statt 10. liest, und Fig. 467. a. benutzt.

16), 17), 18) (VU, YU, ZU) Die von dem Mittelpunkt eines ⊙ am △ zum Mittelpunkt des ⊙ im △ führende Centrale ist die mittlere Proportionallinie zwischen 4r und $\varrho' - \varrho$, oder $\varrho'' - \varrho$, oder $\varrho''' - \varrho$.

Beweis. Nach 1422 ist WC = WU = WV. Man hat aber

WX : WC = WC : WF, da △ WXC ∼ △ WFC.

Hieraus folgt, da WX = 2r, und $FW = \frac{\varrho'}{2} - \frac{\varrho}{2}$ nach 2274 ist, $2r : \frac{UV}{2} = \frac{UV}{2} : \frac{\varrho'}{2} - \frac{\varrho}{2}$, weshalb

$4r : UV = UV : \varrho' - \varrho$ sein muß.

19.) 20.) 21.) (VY, YZ, ZV). Jede Centrale zweier ⊙⊙ am △ ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser des ⊙ ums △ und der Summe der Durchmesser derjenigen beiden ⊙⊙ am △ zu denen die Centrale gehört, d. h. zwischen $2r$ und $2\varrho' + 2\varrho''$, oder $2\varrho' + 2\varrho'''$, oder $2\varrho'' + 2\varrho'''$.

Beweis. Da UA den ∠ α selbst und YZ den Nebenwinkel halbirt, so ergiebt sich ∠ WAX = ∠ ZBY = ∠ ZCY = R, woher WX einen ⊥ BC stehenden Durchmesser bildet, und △ XCW ∼ △ XFC, also XW : XC = XC : XF sein muß. Nun bilden aber die Punkte A, B und C die Fußpunkte der Höhen des △ VYZ, folglich theilt die Kreislinie um △ ABC nach 2264 YZ in X in 2 gleiche Theile, und bestimmt, da ∠ ZCY = R, XY = XC. Endlich ist XW = $2r$, und XF nach 2274 = $\frac{\varrho'' + \varrho'''}{2}$, demnach erhält man statt der vorhergehenden Proportion:

$$2r : \frac{YZ}{2} = \frac{YZ}{2} : \frac{\varrho'' + \varrho'''}{2}, \text{ oder}$$

$$2r : YZ = YZ : 2\varrho'' + 2\varrho'''.$$

Anmerkung. Fig. 467 und 467. a. Da Q, der Mittelpunkt des ⊙ in (oder an) dem von den Fußpunkten der Höhen gebildeten △, zugleich nach 10) der Schneidungspunkt der Höhen des △ ABC ist, und nach 2279 der Schwerpunkt T (Durchschnittspunkt von t, t', t'') die Entfernung jenes Punkts vom Mittelpunkt des ⊙ ums △ ABC nach dem Verhältniß 1 : 2 = MT : TQ theilt, MQ^2 aber selbst, und die Quadrate aller Entfernungen der Punkte M und Q von den Mittelpunkten der ⊙⊙ im und am △ nach dem Vorigen gegeben sind, so folgt hieraus mittelst 2219 und 2279, daß sich die Quadrate sämmtlicher Abstände des Schwerpunkts von den im Vorhergehenden betrachteten 7 Mittelpunkten durch lauter Quadrate oder Rechtecke aus den entsprechenden Radien bestimmen lassen.

Ende des ersten Theils, oder der geometrischen Analysis.

Verbesserungen für den ersten Band.

S. IV Z. 6 v. o. lies nicht: Mathematik, sondern: Mathematik.
— 85 — 4 v. o. — — dritten Band, sondern: letzten Band.
— 48 — 19 v. u. — hinter: bei der: in §. 22. Fig. 16.
— 54 — 11 v. u. — nicht: Fig. 15. a., sondern: Fig. 17. a.
— 95 — 4 v. o. — — △ ABC, sondern: △ ABD.
— 116 — 9 v. u. — — findet, sondern: finden kann.
— 128 — 15 v. u. — — PBA, sondern: PBN
— 128 — 17 v. u. — — ∠ BNC, sondern: ∠ MCN.
— 132 — 7 v. u. — vor Aufgabe: Fig. 42.
— 138 — 9 v. u. — nicht: GA und BA, sondern: BA und GA.
— 190 — 17 v. o. — hinter b: durch Linien zwischen a und c.
— 253 — 2 v. u. — nicht: (xz), sondern: (xy).
— 264 — 15 v. u. — — Seiten, sondern: Linien.
— 265 — 1 v. o. — — Seiten, sondern: Linien.

Verbeſſerungen für den zweiten Band.

S. 6 Z. 16 v. o. lies nicht: h'', ſondern: h'.
— 32 — 3 u. 4. v. u. laſſe: P in L, P' in L', aut.
— 68 — 7 v. o. lies nicht: P, P, L, ſondern: P, P', L.
— 73 — 12 v. o. lies nicht: L, $L_{\alpha,\varrho}$, ſondern: L, $L'_{\alpha,\varrho}$.
— 96 — 4 v. u. lies nicht: K, K, K'', ſondern: K, K', K''.
— 233 — 13 v. o. — — P', P, K_d, ſondern: P', P_b, K_d.
— 488 — 8 v. u. — — P''Y'X, ſondern: P''YX.

Inhalt des ersten Bandes.

	Seite
Vorrede.	III — XII
Ueber die Aufgabe.	3 — 76
1. Eintheilung der Aufgaben. §. 1. bis §. 6. .	3 — 12
2. Von den Bedingungen der Aufgaben. §. 7. bis §. 21.	12 — 41
3. Ueber die Analysis, Auflösung, Determination und den Beweis der Aufgaben. §. 22. bis §. 34.	41 — 76
Bemerkungen über den Unterricht im Aufgabenlösen.	77 — 84
Erläuterungen zum Gebrauch des Werks.	85 — 102
I. Eintheilung und Uebersicht des ganzen Werks.	87 — 92
II. Ueber die in dem Werke gebrauchten Zeichen. .	92 — 102
Erster Theil.	
Die geometrische Analysis.	
Betrachtungen über die geometrische Analysis.	105 — 139
I. Hauptstück.	
Anleitungen und Beispiele. . . .	139 — 312
I. A. Erster Abschnitt.	
Anleitungen und Beispiele, mit Rücksicht auf die Lehren der Geometrie bis zum Kreise. No. 1 — 262.	140 — 196
1stes Kapitel. Voranschickungen, welche die bekannten Aufgaben des Systems der Geometrie nebst ihren Folgerungen enthalten. No. 1 — 63. .	140 — 145
2tes Kapitel. Vorbereitungen und Beispiele, zu denen hauptsächlich Dreiecksaufgaben gewählt sind. No. 64 — 172. b.	146 — 170
3tes Kapitel. Vorbereitungen und Beispiele für die Verwandlungen, Theilungen, und mit den ersteren im Zusammenhange stehenden Dreiecks-Aufgaben. No. 173 — 241.	170 — 191
4tes Kapitel. Schlußbemerkungen. No. 242—262.	191 — 196

Seite

I. B. Zweiter Abschnitt.

Anleitungen und Beispiele, mit Rücksicht auf die Lehren vom Kreise ohne Proportionen. No. 263 — 388. . . . . 196 — 236

1stes Kapitel. Voranschickungen, welche die bekannten Aufgaben des Systems der Geometrie nebst ihren Folgerungen enthalten. No. 263 — 273. . 196 — 198

2tes Kapitel. Vorbereitungen und Beispiele. No. 274 — 375. . . . . 198 — 234

3tes Kapitel. Schlußbemerkungen. No. 376 — 383. 234 — 236

I. C. Dritter Abschnitt.

Anleitungen und Beispiele, mit Rücksicht auf die Lehren der Aehnlichkeit. No. 384 — 608. . . 237 — 312

1stes Kapitel. Voranschickungen, welche die bekannten Aufgaben des Systems der Geometrie nebst ihren Folgerungen enthalten. No. 384 — 416. 237 — 241

2tes Kapitel. Vorbereitungen und Beispiele. (Konstruktionen von Proportionen, Bestimmungen über die Aehnlichkeit der Figuren, und Daten.) No. 417 — 513. . . . . 241 — 269

3tes Kapitel. Vorbereitungen und Beispiele. (Oerter, Hilfs-Aufgaben und Gesetze.) No. 514 — 602. 269 — 303

4tes Kapitel. Schlußbemerkungen. No. 603 — 608. 303 — 312

Figuren-Tafeln A. und B. Fig. I — XXX.
" " 1 — 17. Fig. 1 — 136.

Inhalt des zweiten Bandes.

	Seite
II. Hauptstück.	
Uebungen, welche entweder durch das erste Hauptstück vorbereitet, oder an sich leicht sind. No. 609 — 1353. . . .	1 — 180
II. A. Erster Abschnitt.	
Aufgaben, welche ohne die Lehre vom Kreise, und ohne Proportionen lösbar sind. No. 609 — 779. .	1 — 46
1stes Kapitel. Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben. No. 609 — 655.	1 — 8
2tes Kapitel. Vierecks-Aufgaben aller Art. No. 656 — 694.	9 — 18
3tes Kapitel. Verwandlungen. No. 695 — 717.	19 — 24
4tes Kapitel. Theilungen. No. 718 — 740.	24 — 32
5tes Kapitel. Gemischte Aufgaben. No. 741 — 779.	32 — 46
II. B. Zweiter Abschnitt.	
Aufgaben, welche durch die Lehre vom Kreise ohne Proportionen lösbar sind. No. 780 — 1041.	46 — 99
1stes Kapitel. Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben. No. 780 — 824.	46 — 54
2tes Kapitel. Vierecks-Aufgaben aller Art. No. 825 — 872.	54 — 64
3tes Kapitel. Verwandlungen. No. 873 — 893.	64 — 67
4tes Kapitel. Kreis-Aufgaben. No. 894 — 959.	67 — 79
5tes Kapitel. Gemischte Aufgaben. No. 960 — 1041.	79 — 99
II. C. Dritter Abschnitt.	
Aufgaben, welche durch die Lehre von der Aehnlichkeit lösbar sind. No. 1042 — 1353. . .	100 — 180
1stes Kapitel. Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben. No. 1042 — 1130.	100 — 118
2tes Kapitel. Vierecks-Aufgaben aller Art. No. 1131 — 1156.	118 — 126
3tes Kapitel. Verwandlungen. No. 1157 — 1200.	126 — 133
4tes Kapitel. Kreis-Aufgaben. No. 1201 — 1259.	133 — 144
5tes Kapitel. Theilungen. No. 1260 — 1279.	144 — 151
6tes Kapitel. Gemischte Aufgaben. No. 1280 — 1353.	152 — 180

Seite

III. Hauptstück.

Uebungen, welche nicht immer durch das erste Hauptstück vorbereitet sind. No. 1354 — 2261. . . . . 181 — 519

III. A. Erster Abschnitt.

Aufgaben, welche ohne die Lehre von der Aehnlichkeit lösbar sind. No. 1354 — 1664. . . 181 — 285

1stes Kapitel. Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben. No. 1354 — 1423. . . . . 181 — 200
2tes Kapitel. Vierecks-Aufgaben aller Art. No. 1424 — 1477. . . . . 200 — 217
3tes Kapitel. Verwandlungen. No. 1478 — 1548. 218 — 229
4tes Kapitel. Kreis-Aufgaben. No. 1549 — 1584. 229 — 239
5tes Kapitel. Gemischte Aufgaben. No. 1585 — 1664. 239 — 285

III. B. Zweiter Abschnitt.

Aufgaben, welche durch die Lehre von der Aehnlichkeit lösbar sind. No. 1665 — 1985. . . 286 — 368

1stes Kapitel. Dreiecks- und Parallelogramm-Aufgaben. No. 1665 — 1779. . . . . 286 — 311
2tes Kapitel. Vierecks-Aufgaben aller Art. No. 1780 — 1835. . . . . 311 — 323
3tes Kapitel. Verwandlungen. No. 1836 — 1874. 323 — 328
4tes Kapitel. Kreis-Aufgaben. No. 1875 — 1912. 329 — 338
5tes Kapitel. Theilungen. No. 1912 — 1931. 338 — 345
6tes Kapitel. Gemischte Aufgaben. No. 1932 — 1985. 345 — 368

III. C. Dritter Abschnitt.

Schwer lösbare Aufgaben. No. 1986 — 2261. 369 — 519

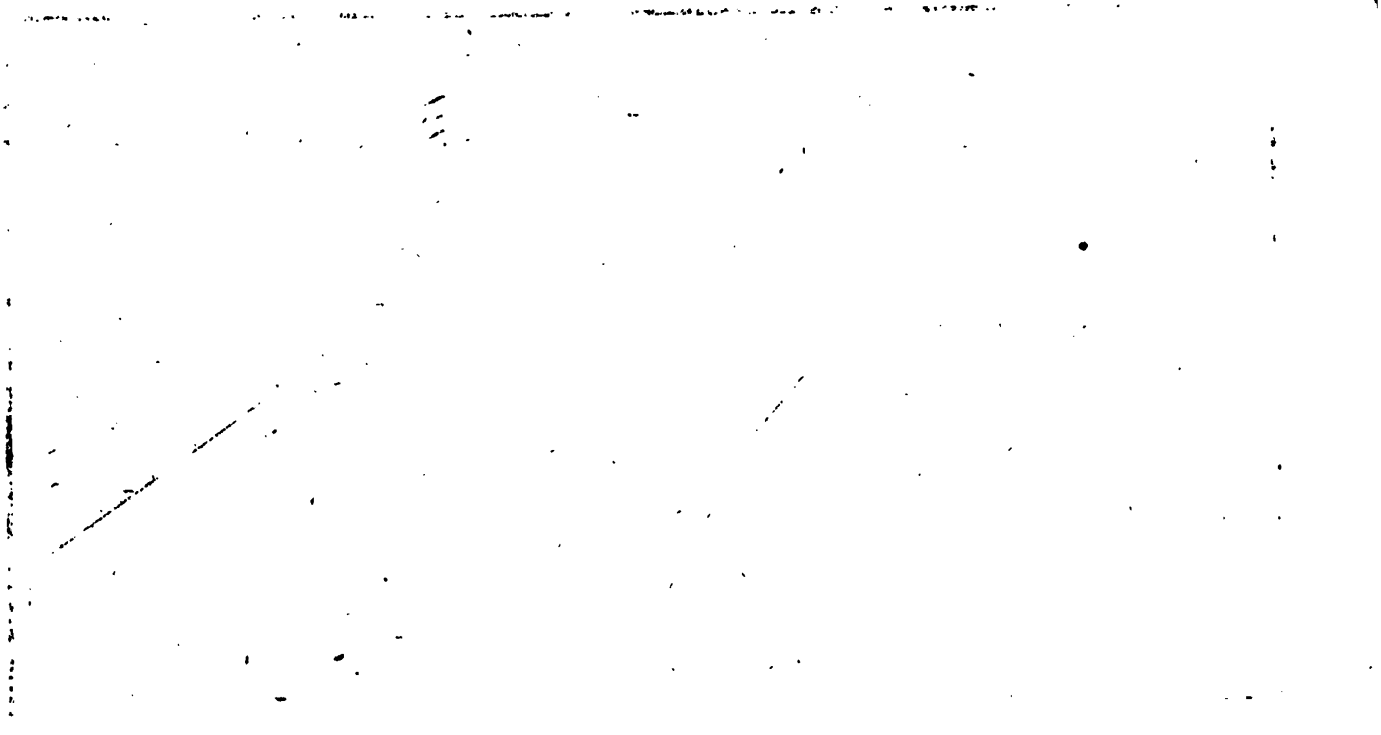
1stes Kapitel. Dreiecks-Aufgaben. No. 1986 — 2049. 369 — 407
2tes Kapitel. Vierecks-Aufgaben aller Art. No. 2050 — 2066. . . . . 407 — 416
3tes Kapitel. Verwandlungen. No. 2067 — 2079. 417 — 425
4tes Kapitel. Kreis-Aufgaben. No. 2080 — 2184. 425 — 465
5tes Kapitel. Theilungen. No. 2185 — 2192. 466 — 470
6tes Kapitel. Gemischte Aufgaben. No. 2193 — 2261. 470 — 519

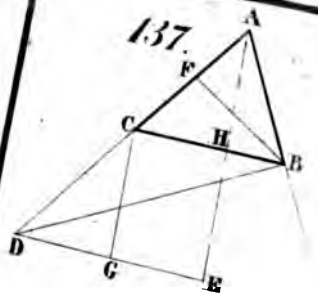
Gesetze für mehrere beim Dreieck vorkommende Kreise. No. 2262 — 2286. . . . . 520 — 536

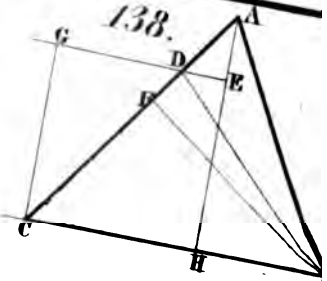
Geometrische Bestimmung von den 21 Centrallinien für 7 bei einem Dreieck vorkommende Kreise durch deren Radien. No. 2287. . . . . 536 — 542

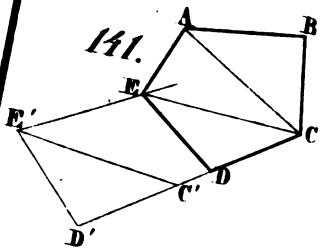
Figuren-Tafeln 18 — 59. Fig. 137 — 473.

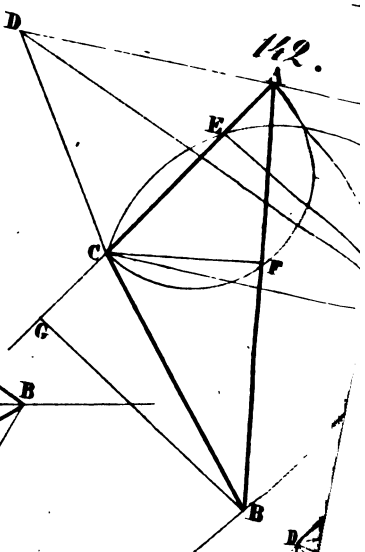
Die Figuren-Tafeln des ersten Bandes sind im zweiten mit benutzt worden.

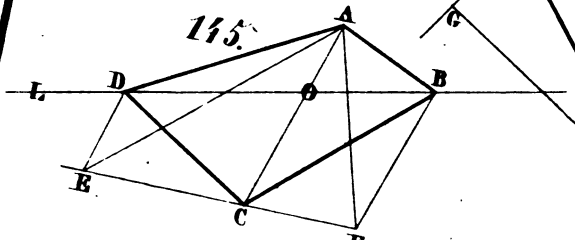


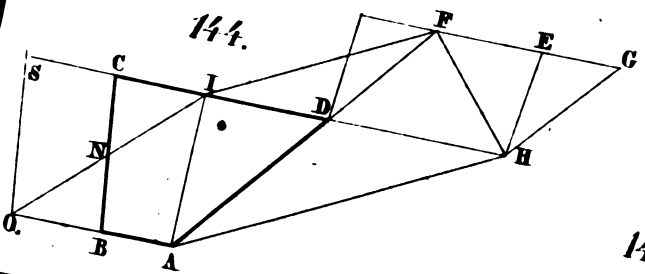

137.
A
F
C
H
B
D
G
E

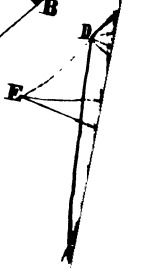

138.
A
G
D
E
F
C
H


141.
A
B
E
E'
C
D
C'
D'


142.
D
A
E
C
F
G
B

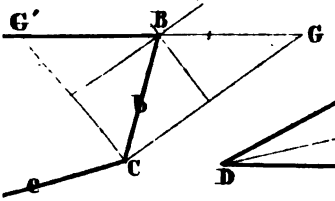

145.
A
L
D
O
B
E
C
F


144.
F
E
G
S
C
I
D
N
H
O
B
A

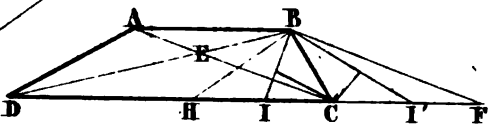

D
E

147.
C

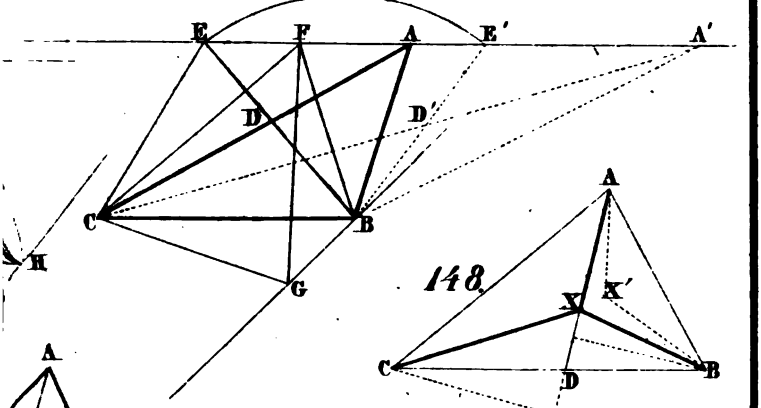
139.



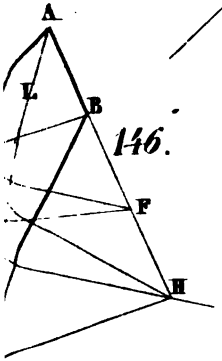
140



143.

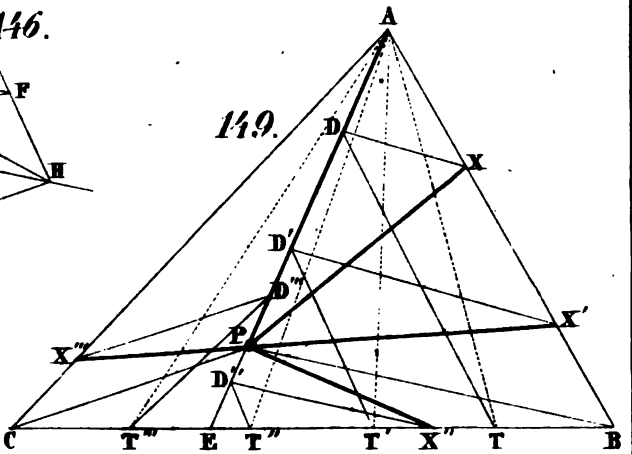


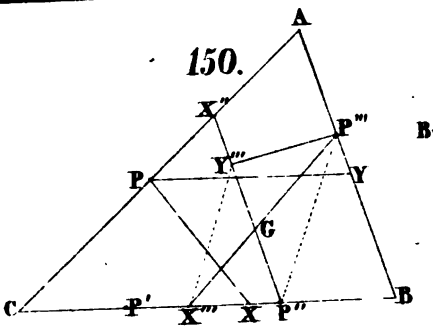
148.

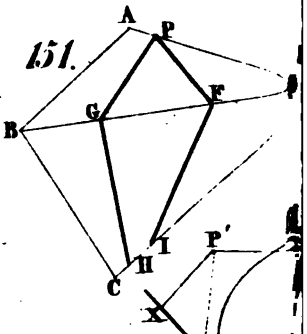


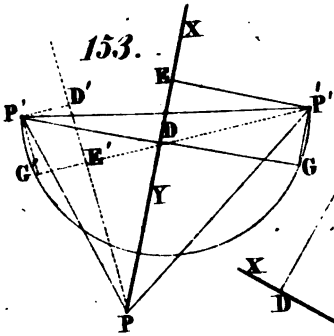
146.

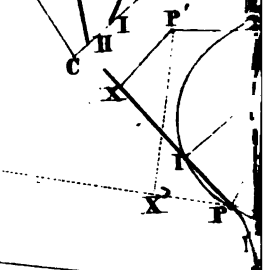
149.

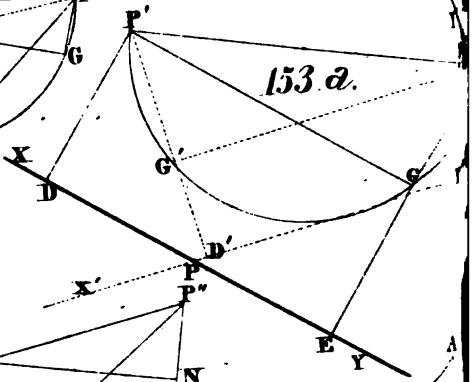


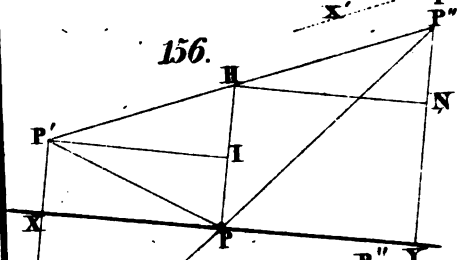

150.
A
X''
P'''
Y'''
Y
P
G
C
P'
X'''
X
P''
B

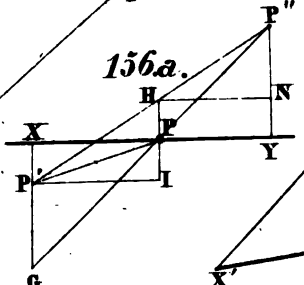

151.
A
P
B
G
F
I
H
C

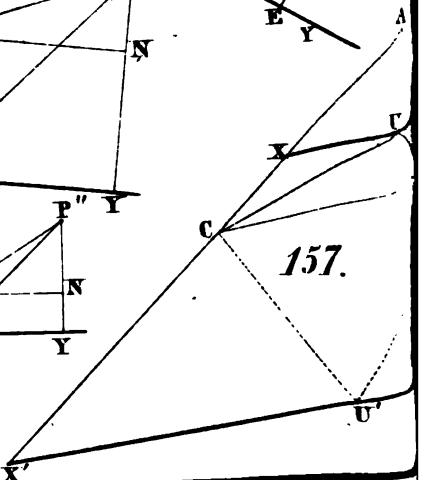

153.
X
E
P'
D'
P''
D
E'
G'
G
Y
P

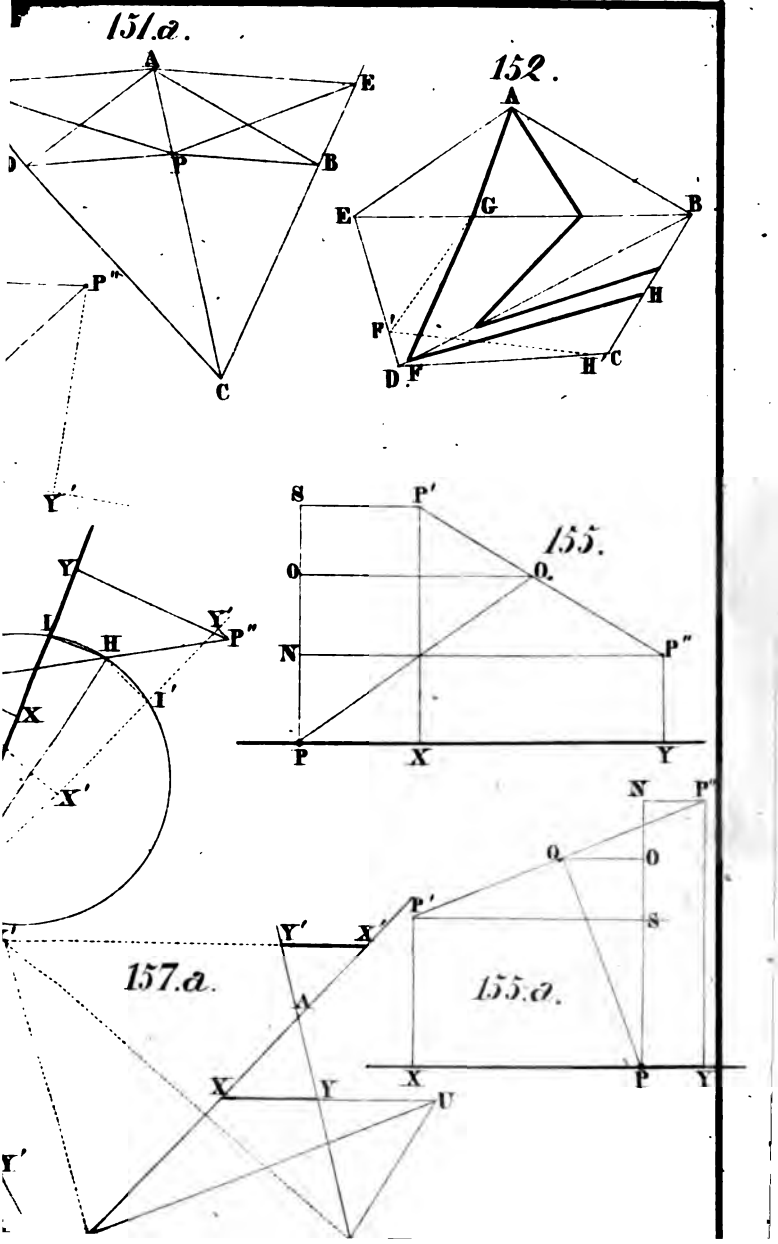

P'
I
X'
P

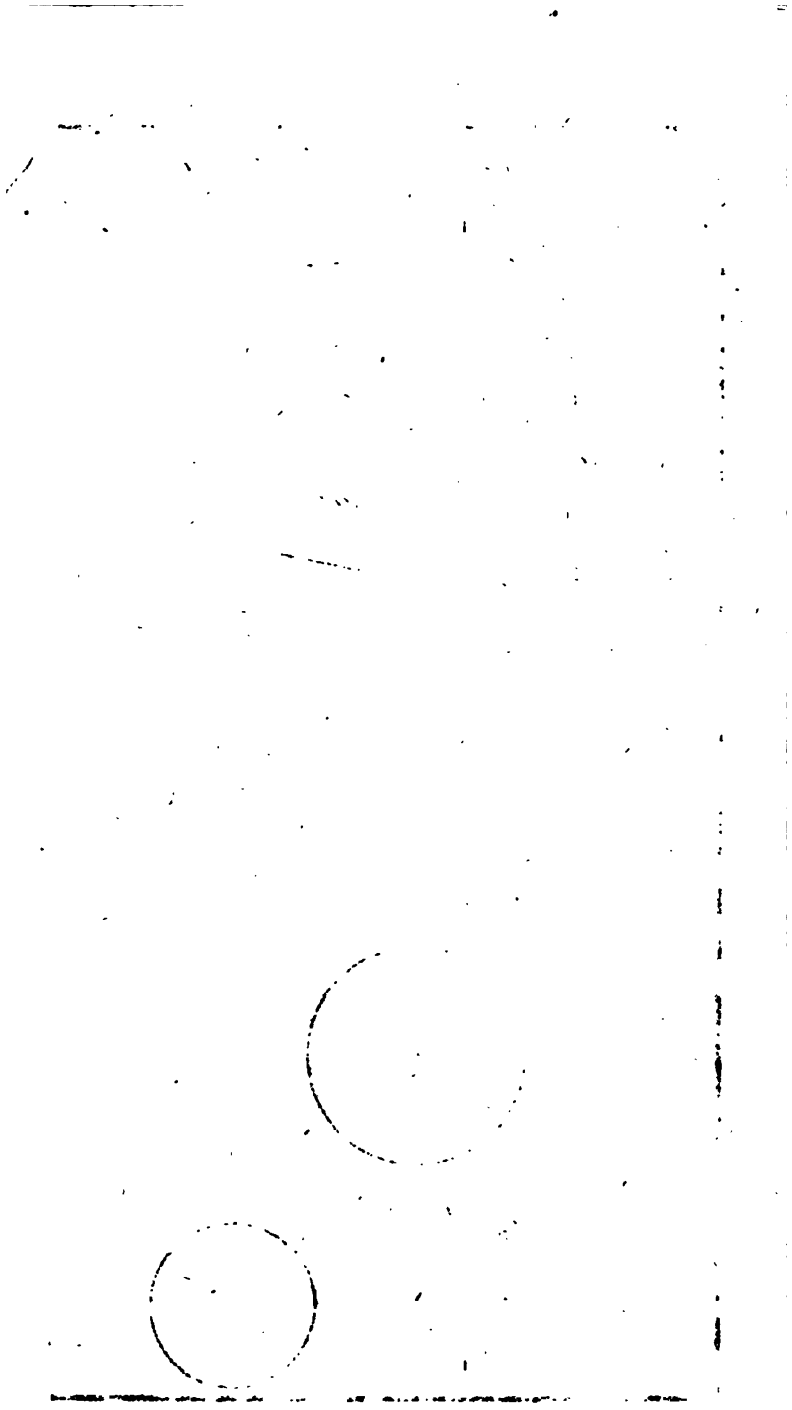

153 a.
P'
G'
G
X
D
D'
P
X'
E
Y

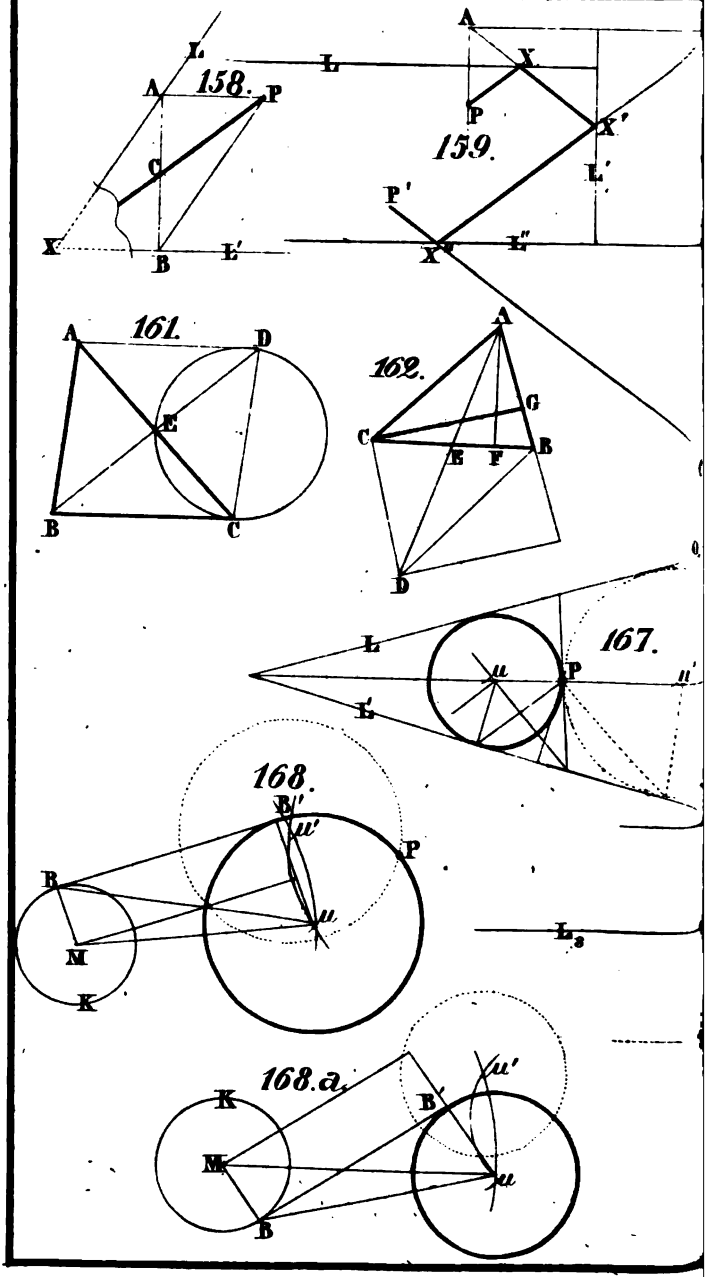

156.
P''
H
N
P'
I
X
P
Y

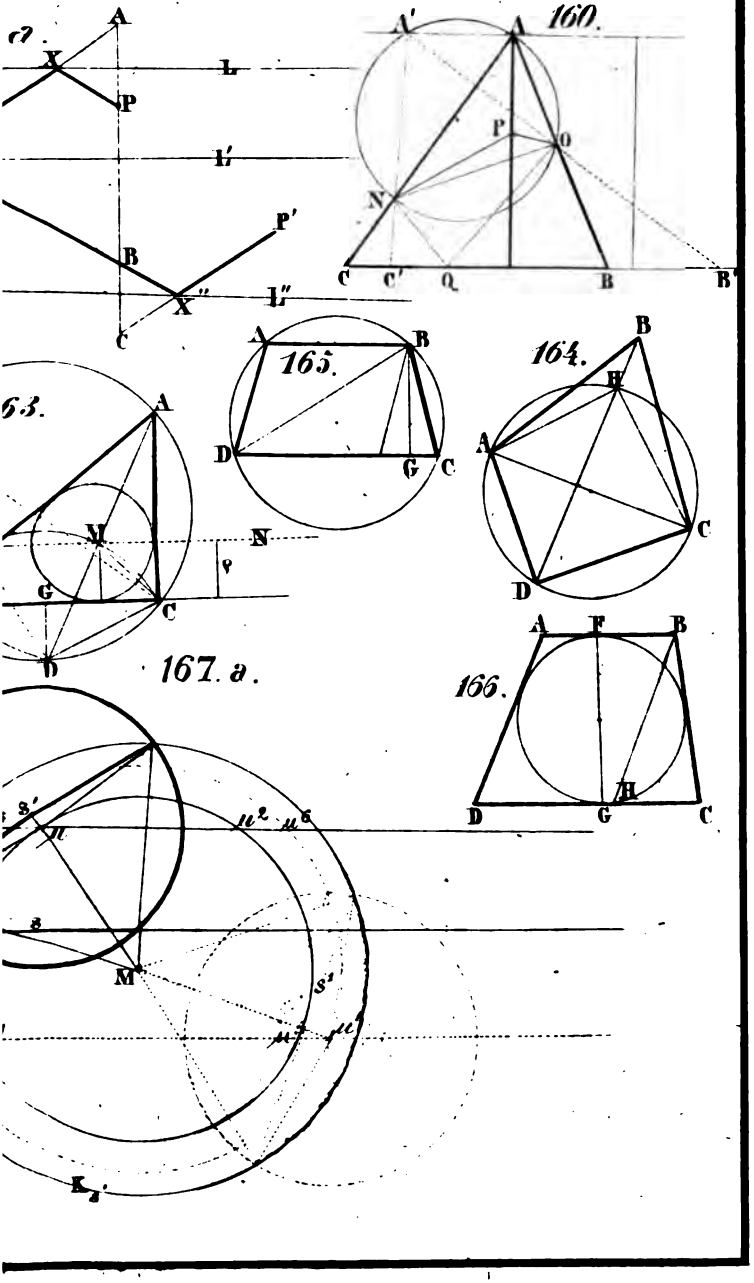

156a.
P''
H
N
X
P
Y
P'
I
G

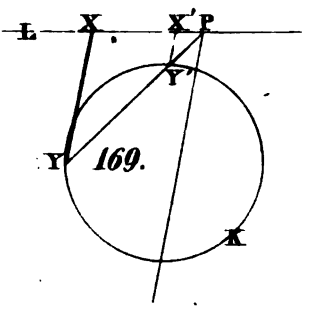

A
C
X
C
157.
U'
X'


151.a.
A
E
B
P
P''
C
Y'
152.
A
E
G
B
H
P'
D
F
H
C
S
P'
155.
O
O
N
P''
P
X
Y
Y
I
H
Y'
P''
X
I'
X'
N
P''
O
O
P'
S
Y'
X'
157.a.
155.a.
A
X
Y
U
X
P
Y
Y'

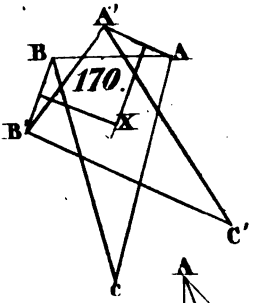



158.
159.
161.
162.
167.
168.
168.a.

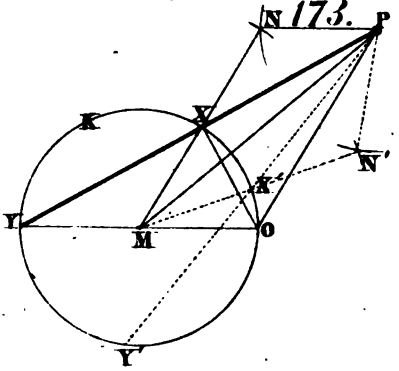

a.
A
X
L
P
L'
P'
B
X''
L''
C
160.
A'
A
P
O
N
C
C'
Q
B
B'
165.
A
B
D
G
C
164.
B
H
A
C
D
63.
A
M
N
G
C
D
167. a.
166.
A
F
B
H
D
G
C
s'
n
M
s'
K



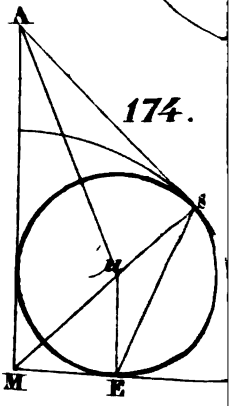
169.



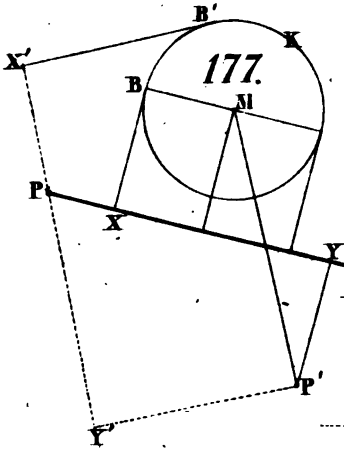
170.



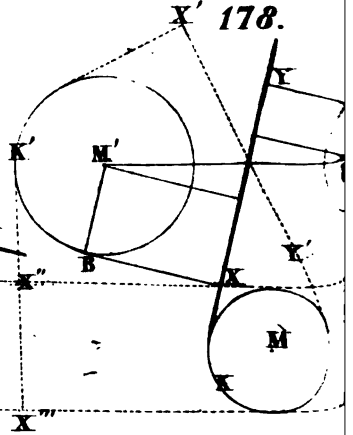
173.



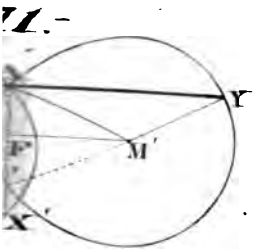
174.



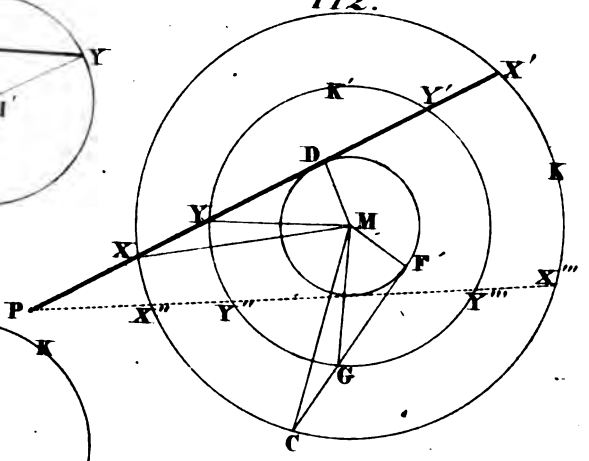
177.



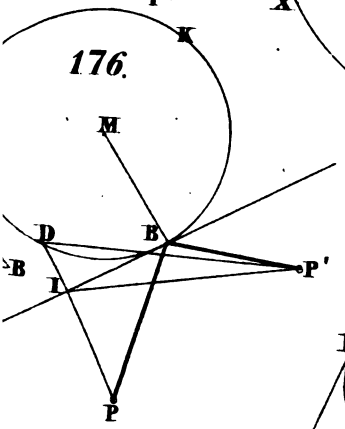
178.



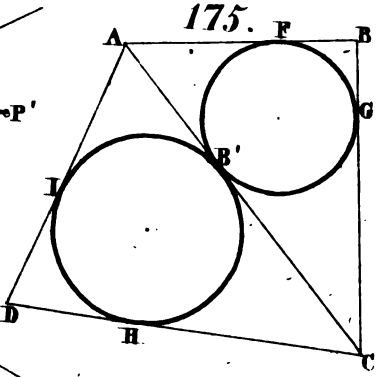
172.



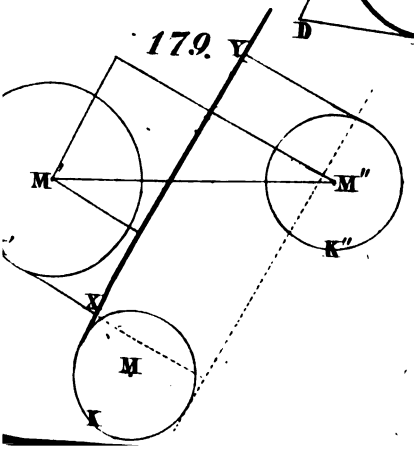
176.



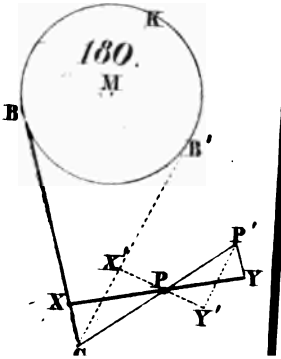
175.

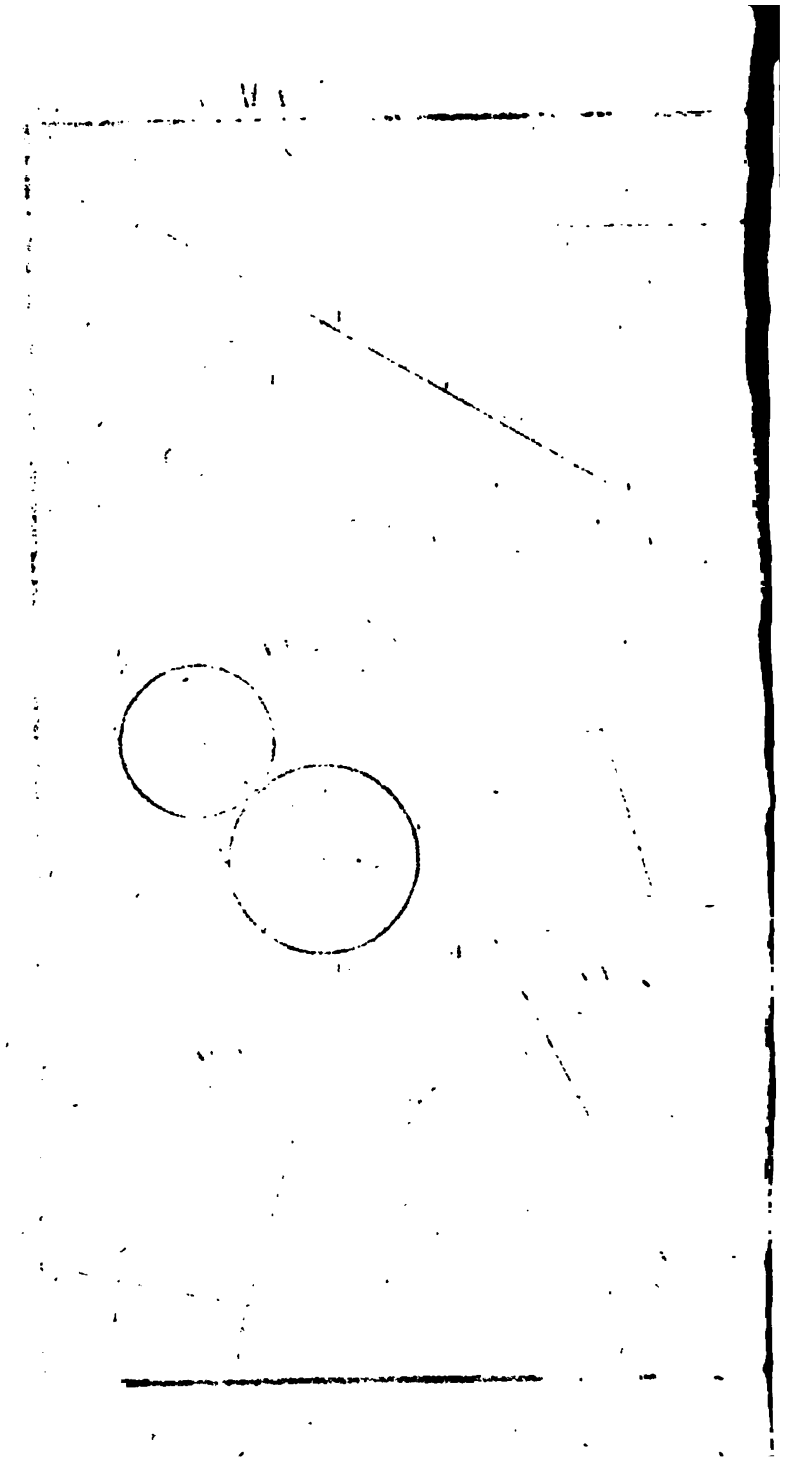


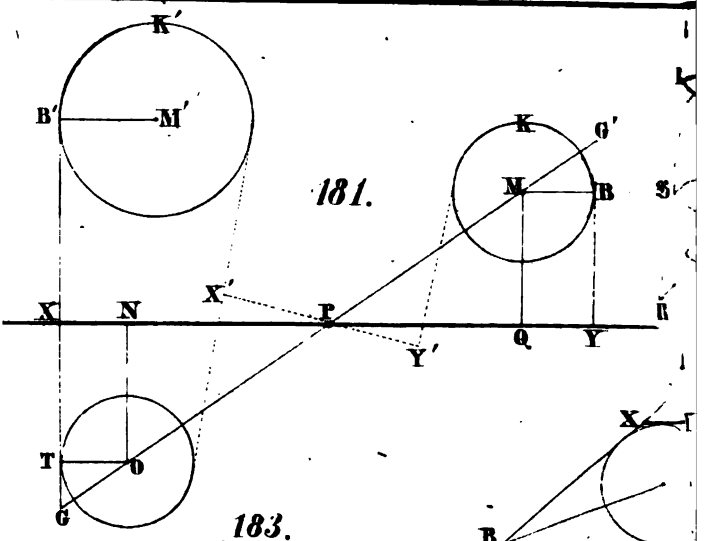
179.

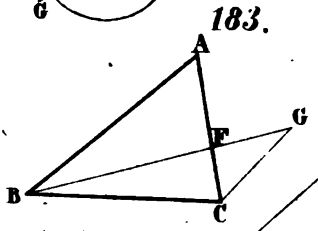


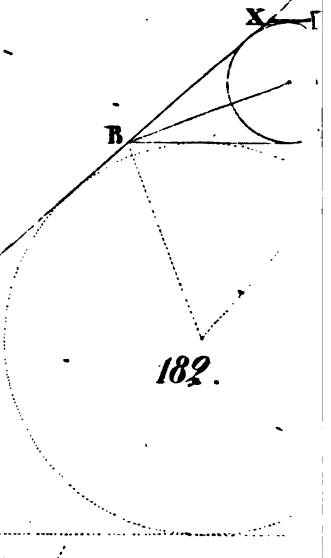
180.

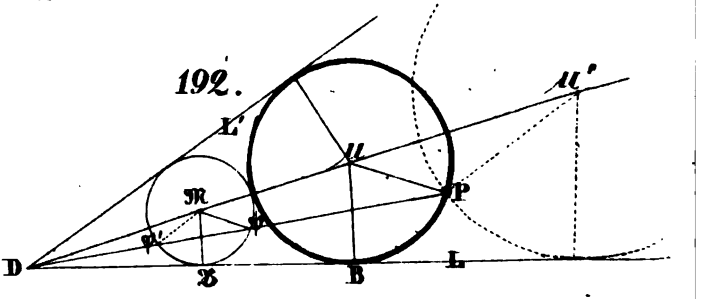


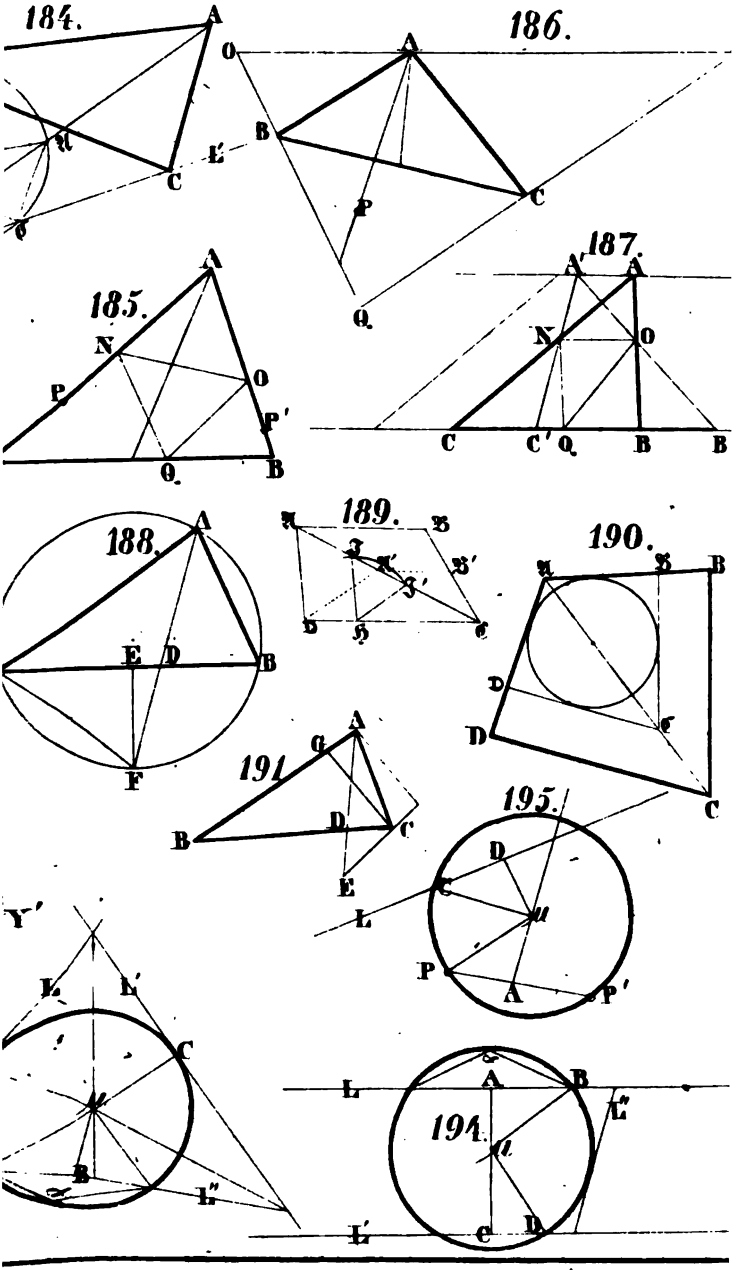


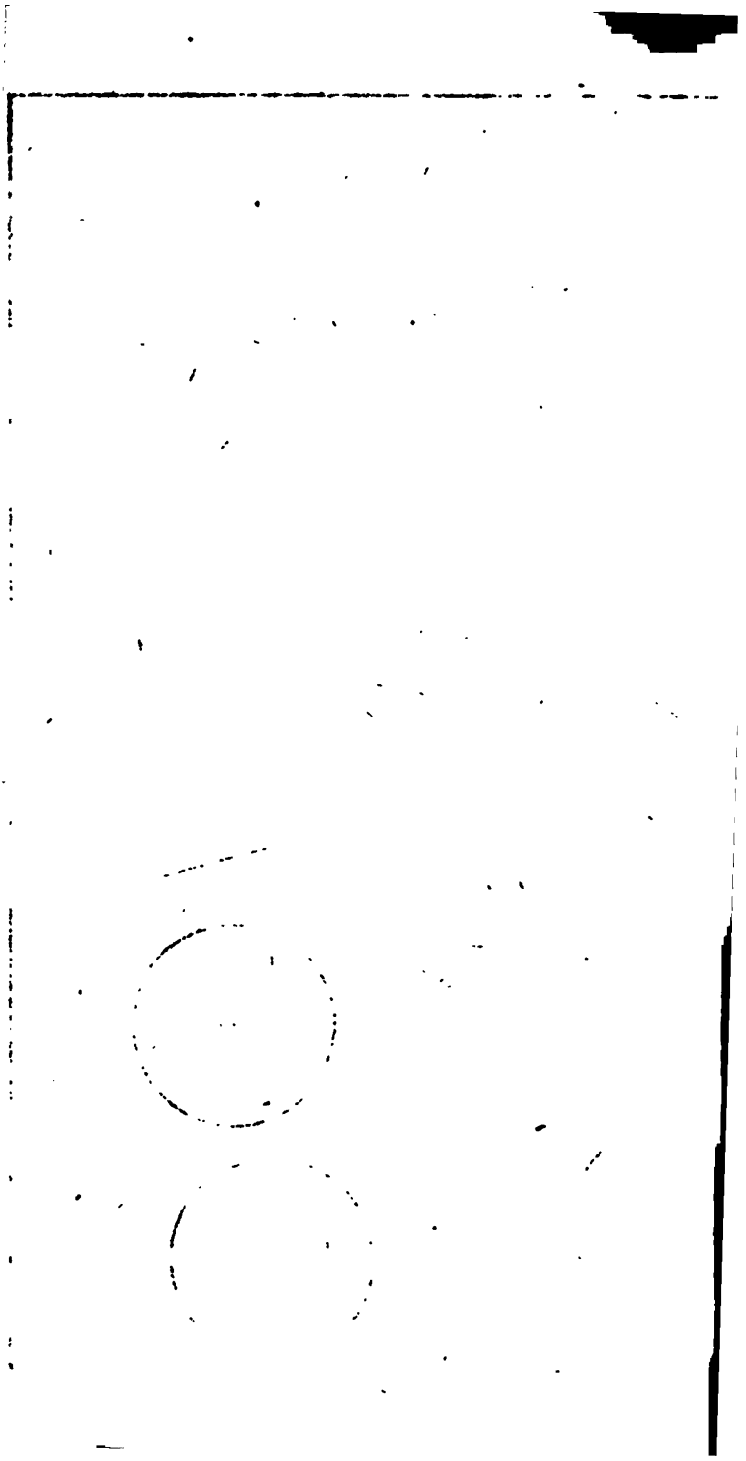

K'
B'
M'
181.
K
G'
M
B
S
X
N
X'
P
Q
Y
Y'
T
O
G

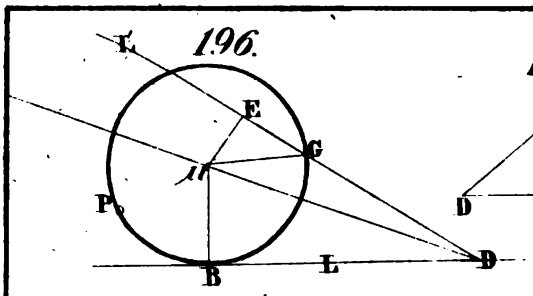

183.
A
F
G
B
C

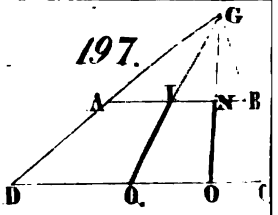

X
B
182.
X'

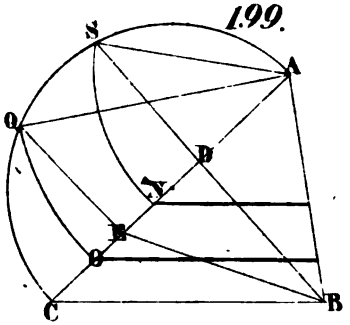

192.
L'
M'
M
R
P
D
Z
B
L

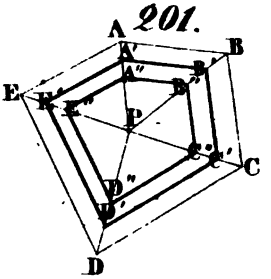

184.
186.
185.
187.
188.
189.
190.
191
195.
194.

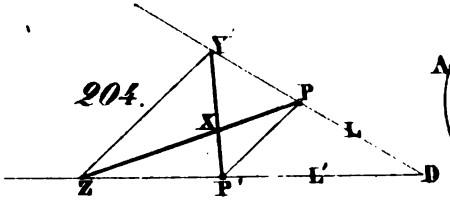


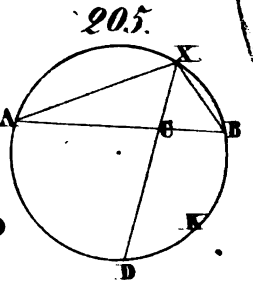

196.
L
E
G
P
B
L
D

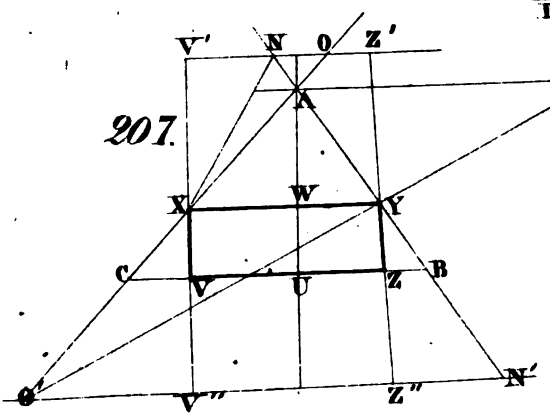

197.
G
A
N
B
D
O
O


199.
S
A
Q
B
Y
E
O
C
B

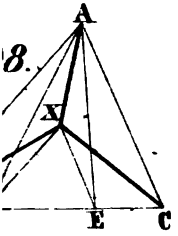

201.
A
B
E
C
D


204.
V
P
X
L
Z
P'
L'
D

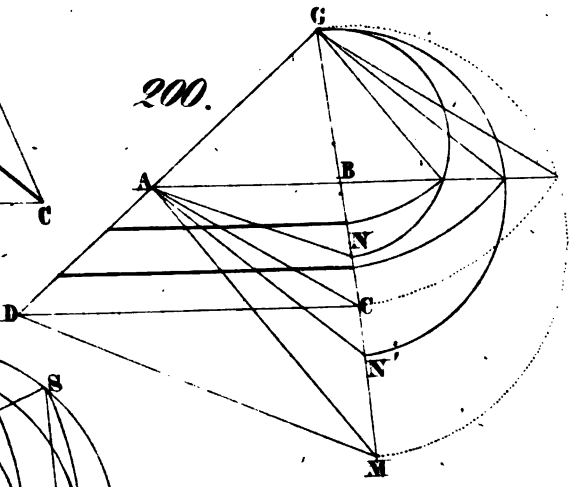

205.
X
A
C
B
K
D


207.
V'
N
O
Z'
A
X
W
Y
C
V
U
Z
B
V''
Z''
N'

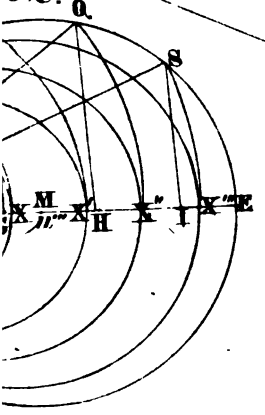
206.
V'
X'



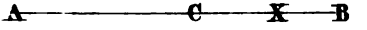
8.



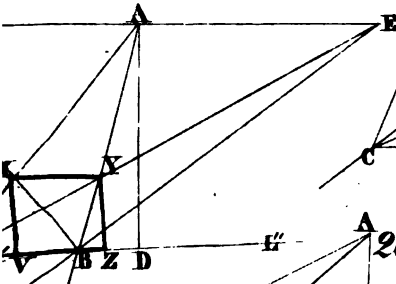
200.

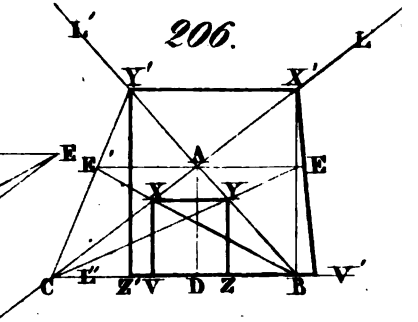


202.

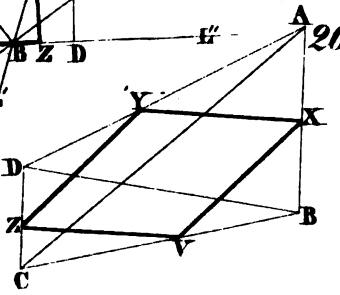


203.

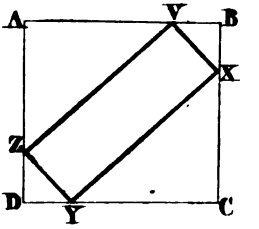




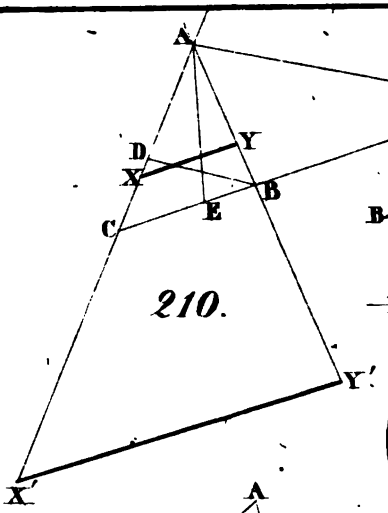
206.



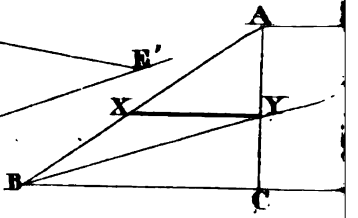
208.

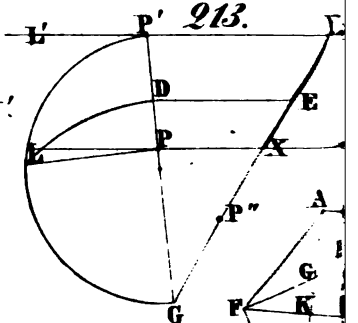


209.

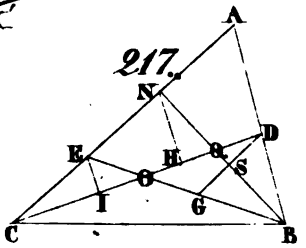


210.

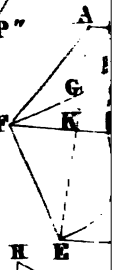


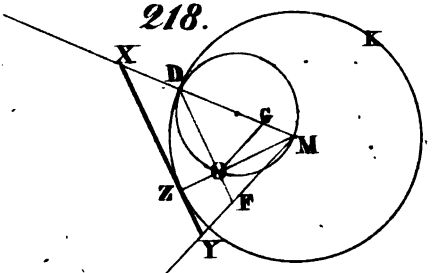


213.

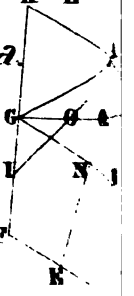


217.

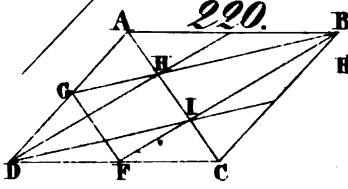




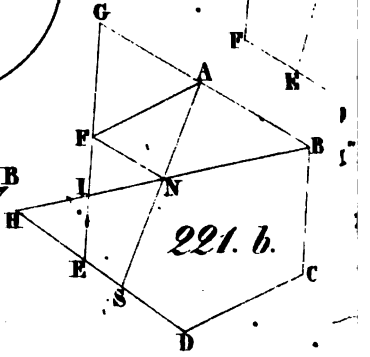
218.



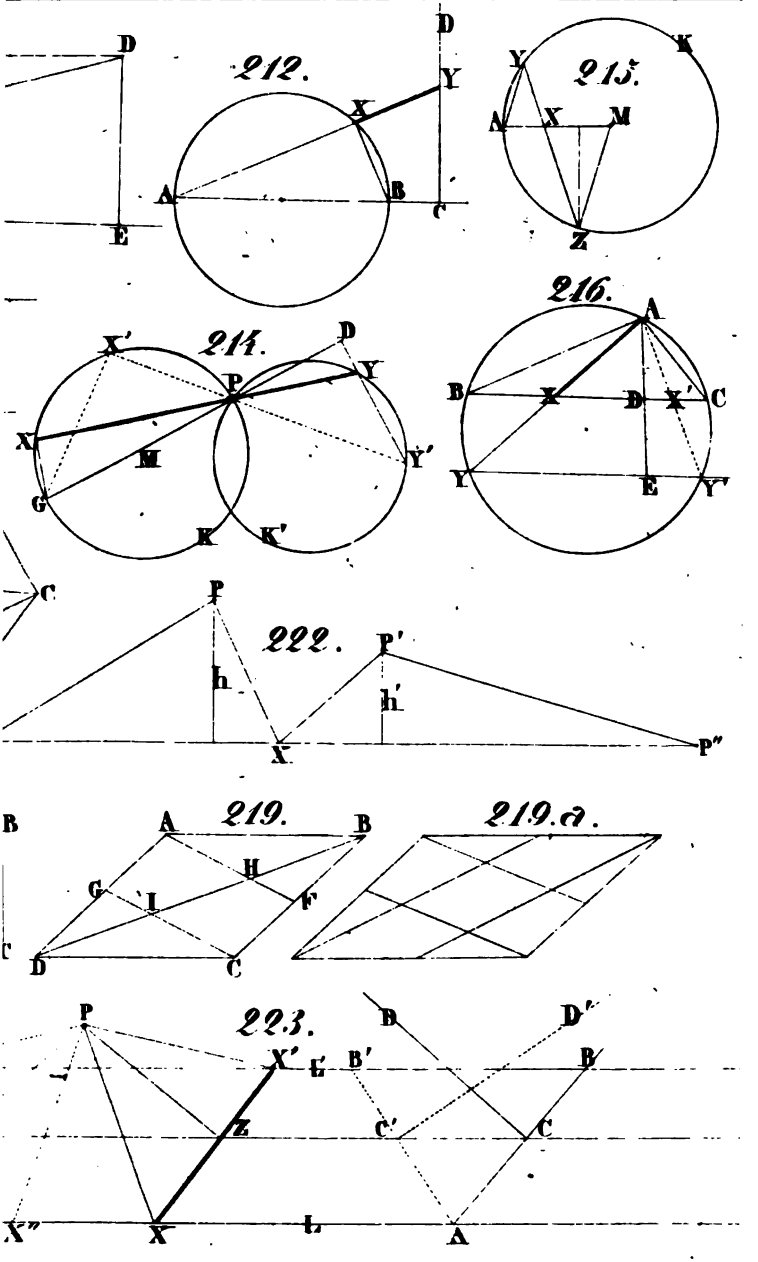
221. a.

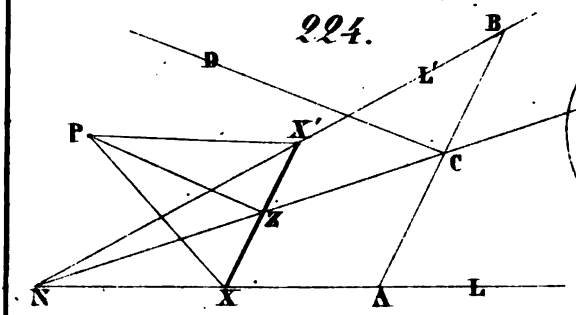


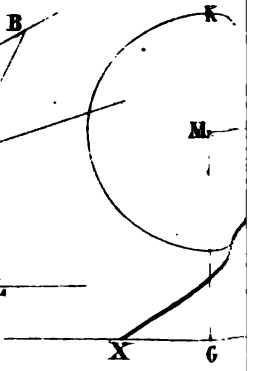
220.

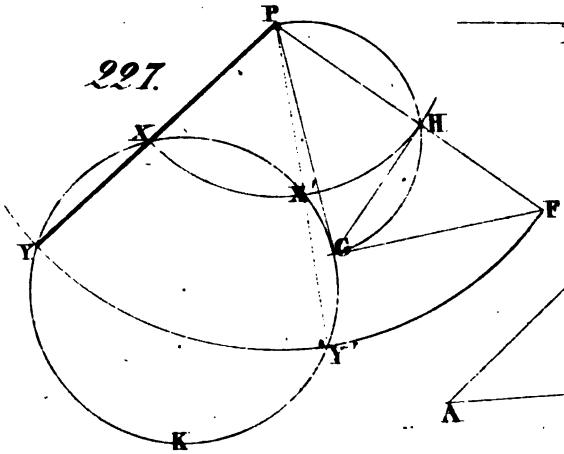


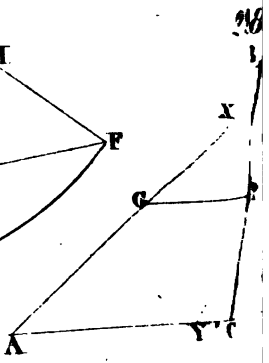
221. b.

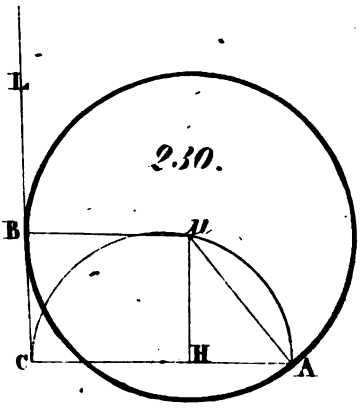

212.
213.
214.
216.
222.
219.
219.a.
223.
D
E
A
B
C
X
Y
M
Z
X'
Y'
P
G
K
K'
h
h'
P'
P''
H
I
F
L
B'
C'
D'
X''

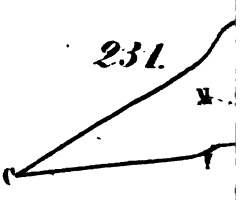

224.
B
D
L'
P
X'
C
Z
N
X
A
L

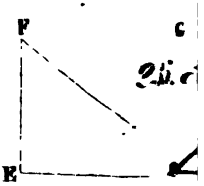

K
M
X
G

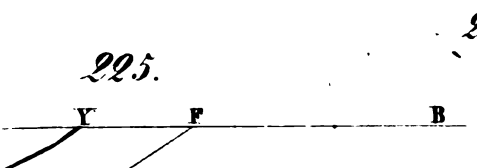

227.
P
X
H
M
F
Y
G
Y'
K

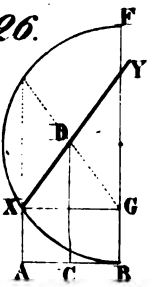

X
G
A
Y'

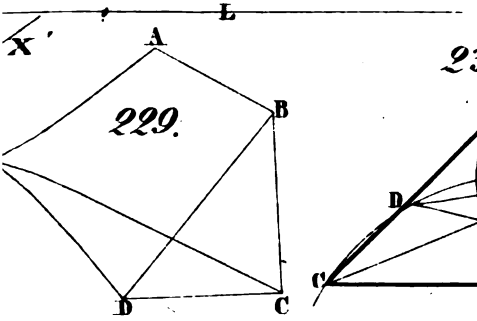

230.
L
B
u
C
H
A

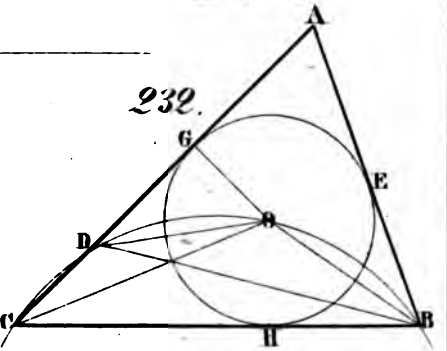

231.
M
C
Y

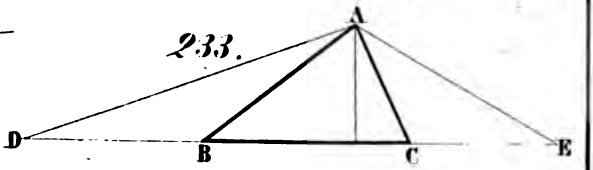

F
G
E


225.
Y
F
B

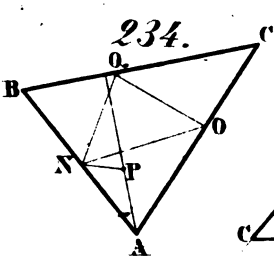

226.
F
Y
D
X
G
A
C
B

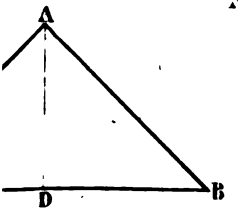

L
X
A
229.
B
D
C

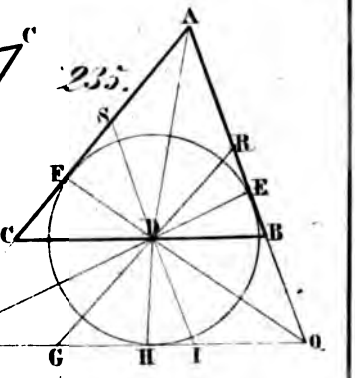

232.
A
G
E
D
O
C
H
B

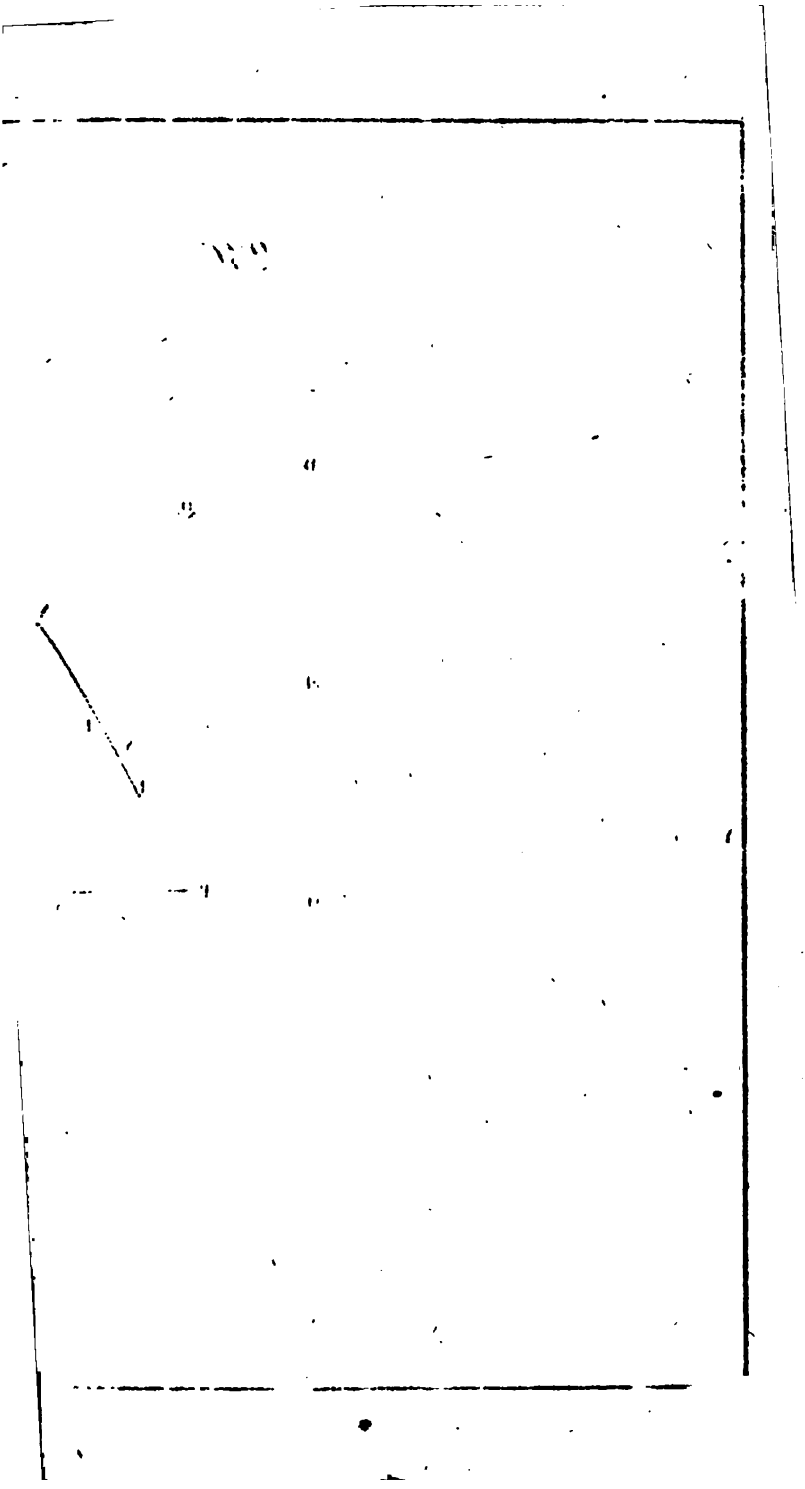

233.
A
D
B
C
E

B

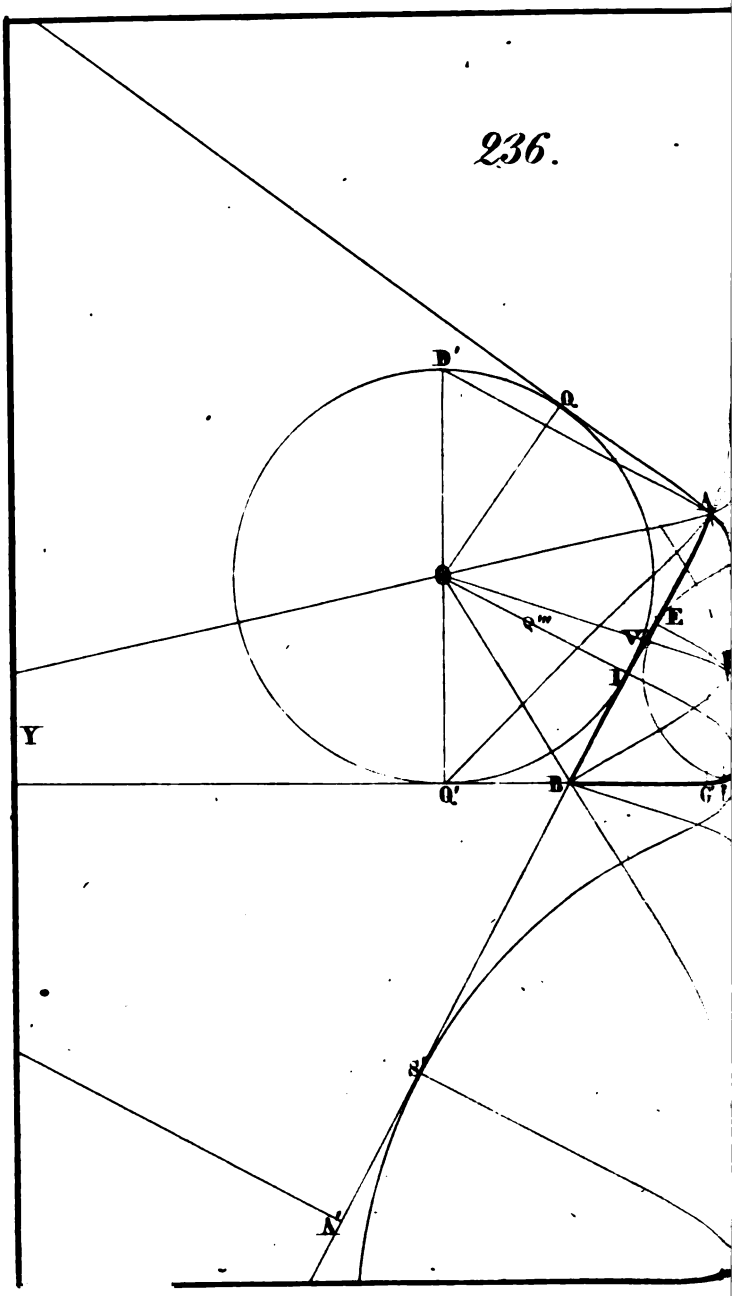

234.
C
O
B
O
N
P
A


A
D
B

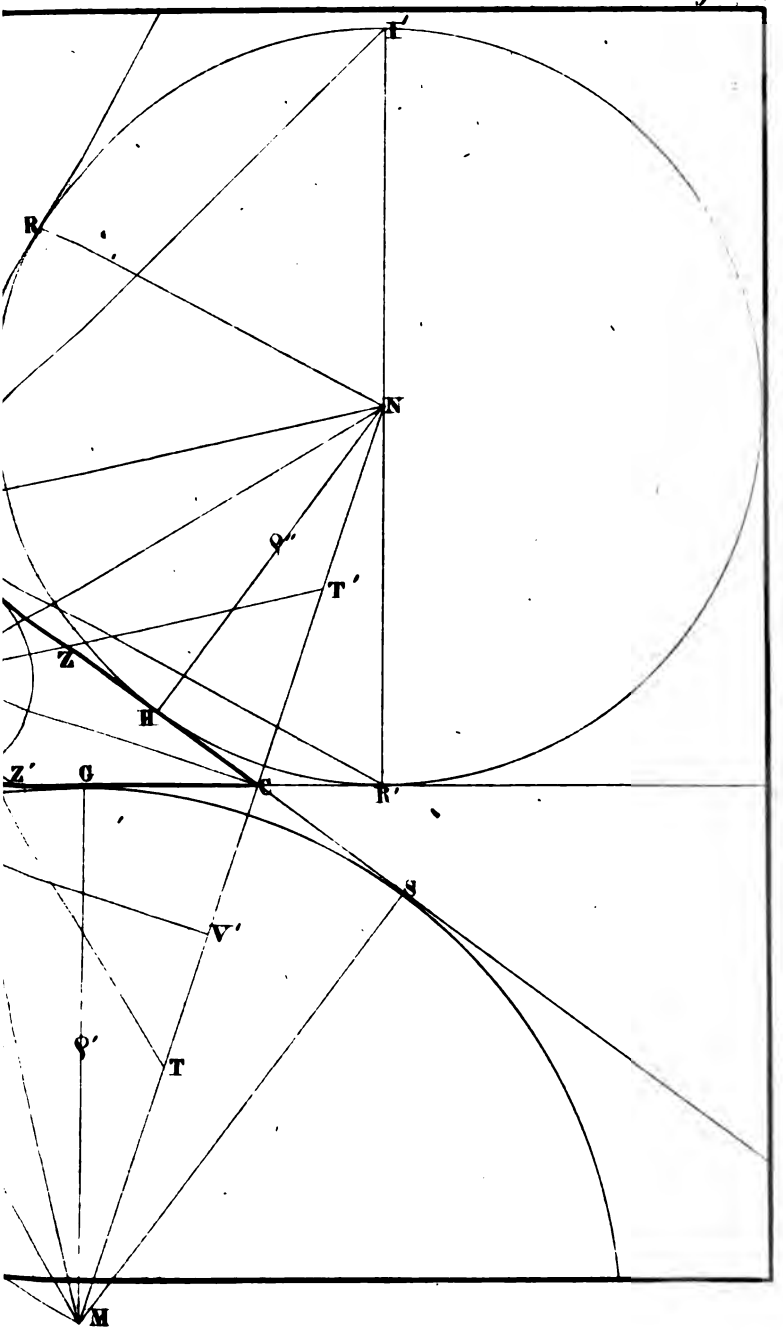

235.
A
S
R
F
E
C
O
B
N
G
H
I
O

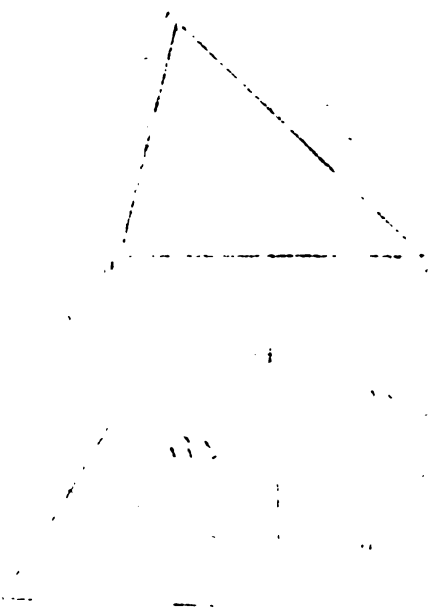


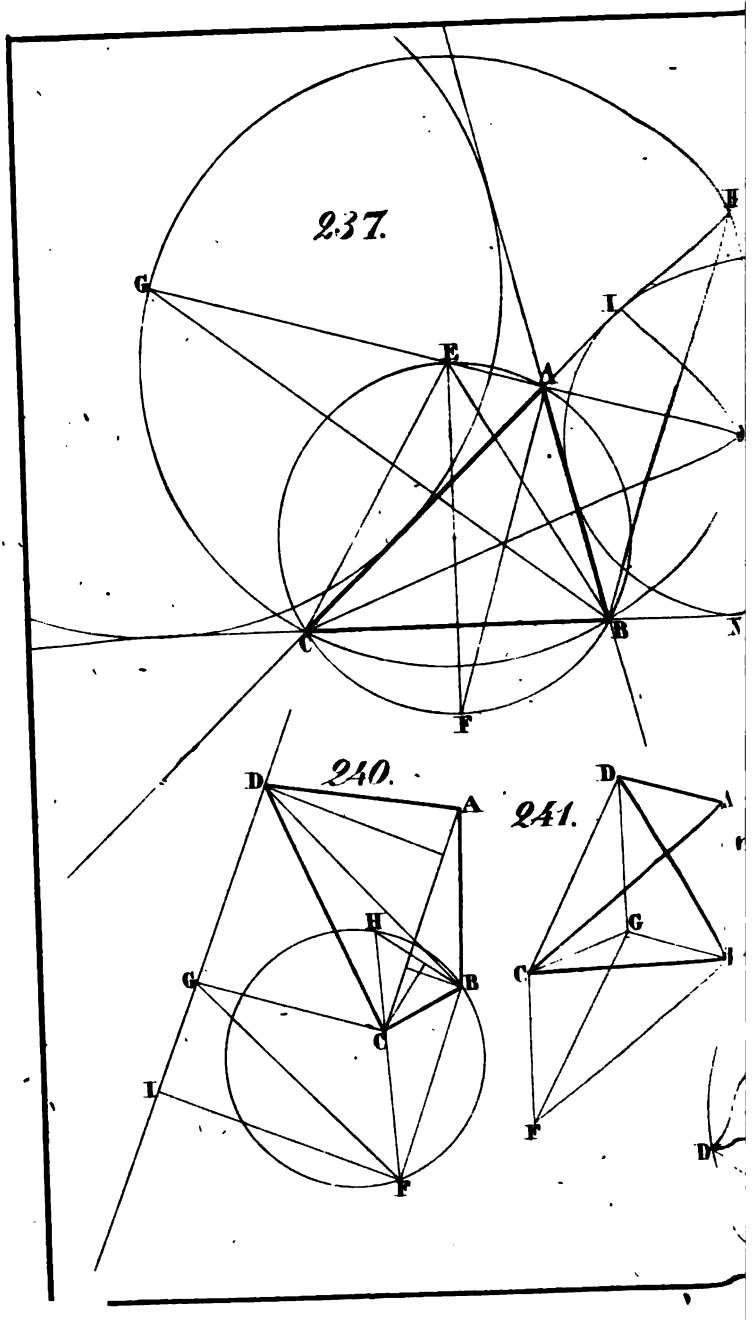
236.

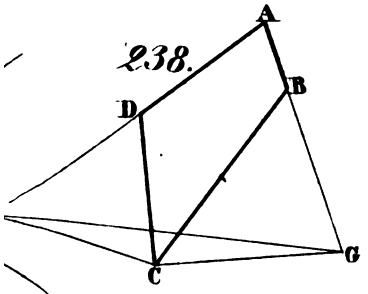


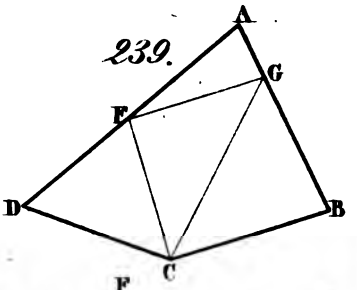
TAF 26. Fig. 236.

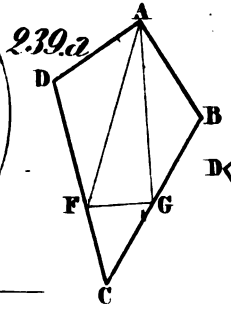


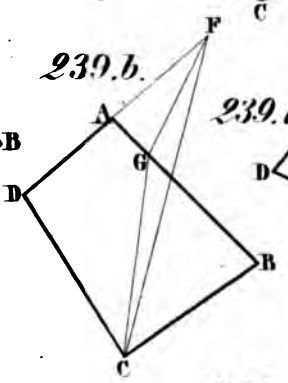


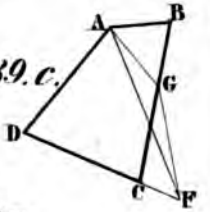

237.
G
E
A
I
H
C
B
F
240.
D
A
H
G
B
C
I
F
241.
D
G
C
F
D

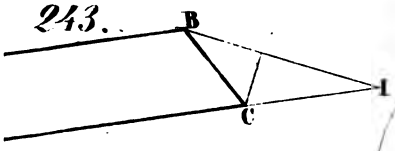

238.
A
B
D
C
G

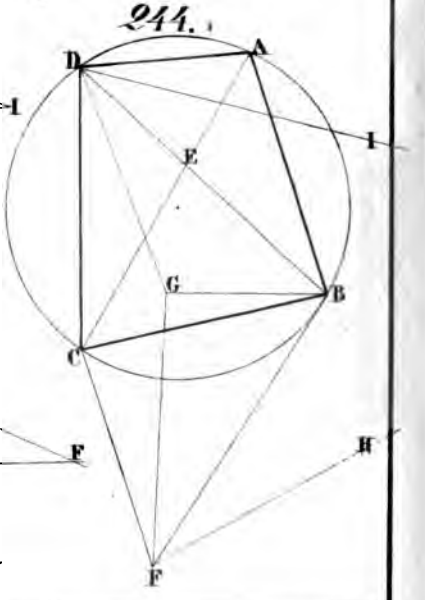

239.
A
G
F
D
B
C

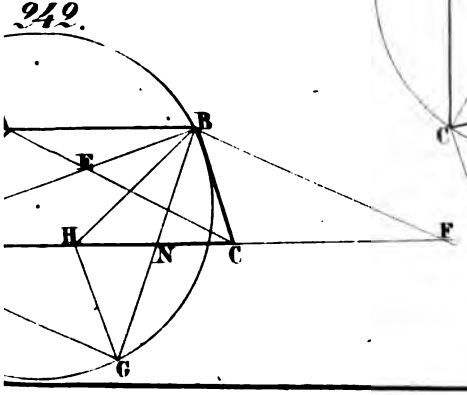

239.a
A
D
B
F
G
C

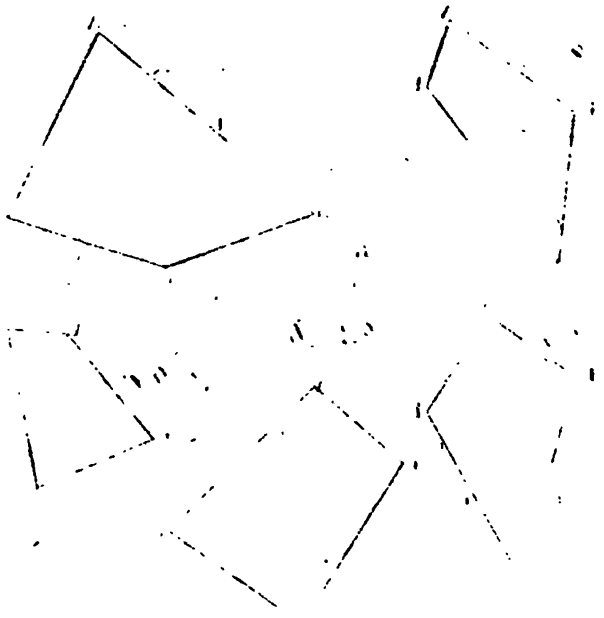

239.b.
F
A
G
D
B
C

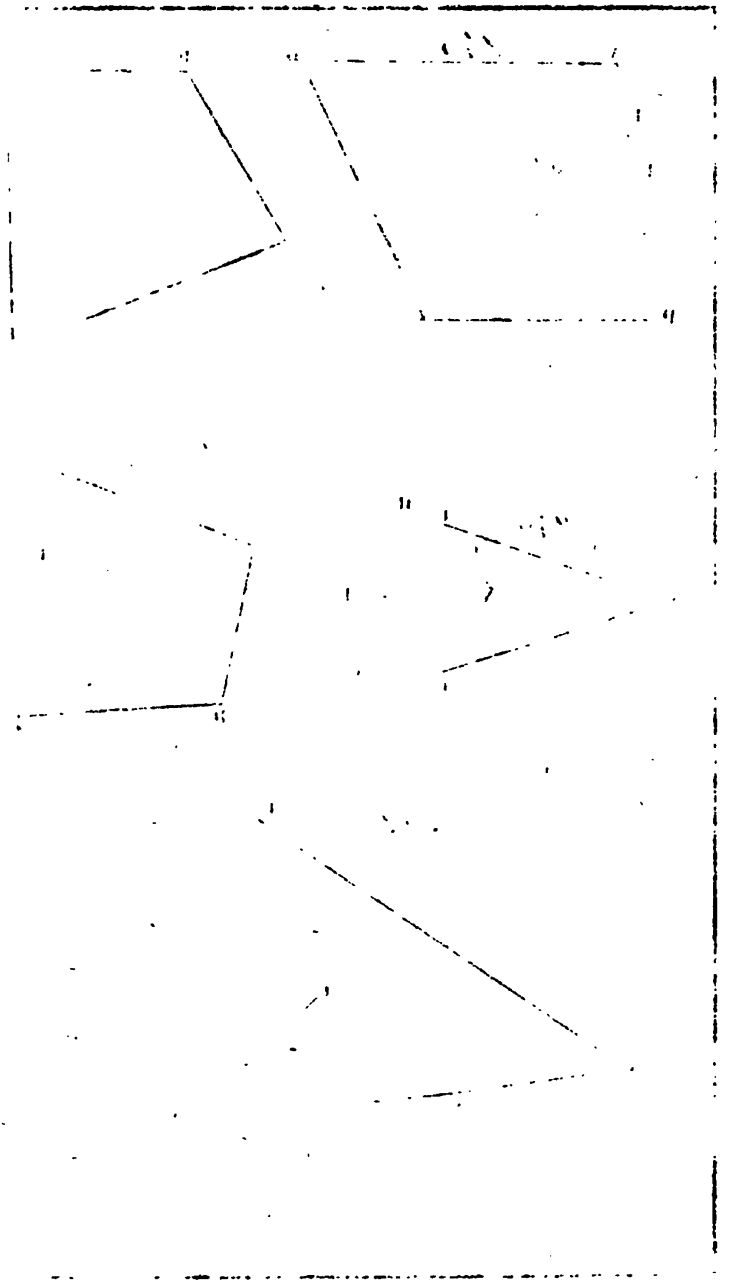

239.c.
A
B
G
D
C
F

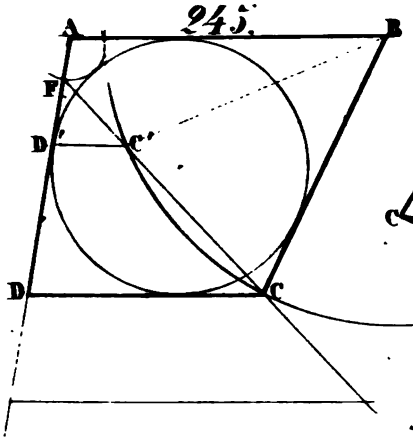

243.
B
C
I

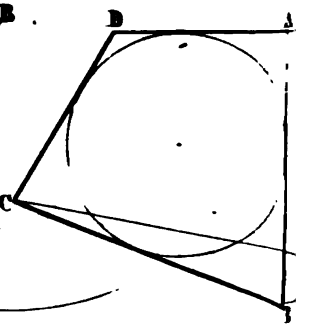

244.
D
A
I
E
G
B
C
H
F

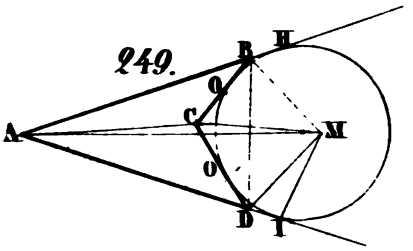

242.
B
E
H
N
C
F
G

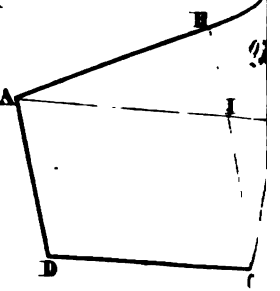


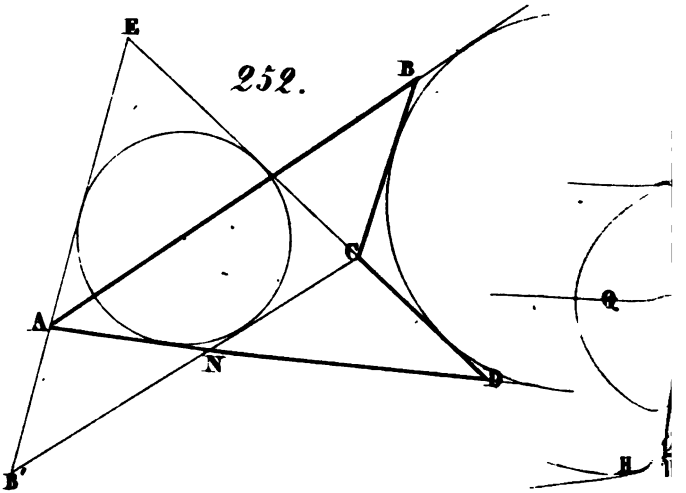


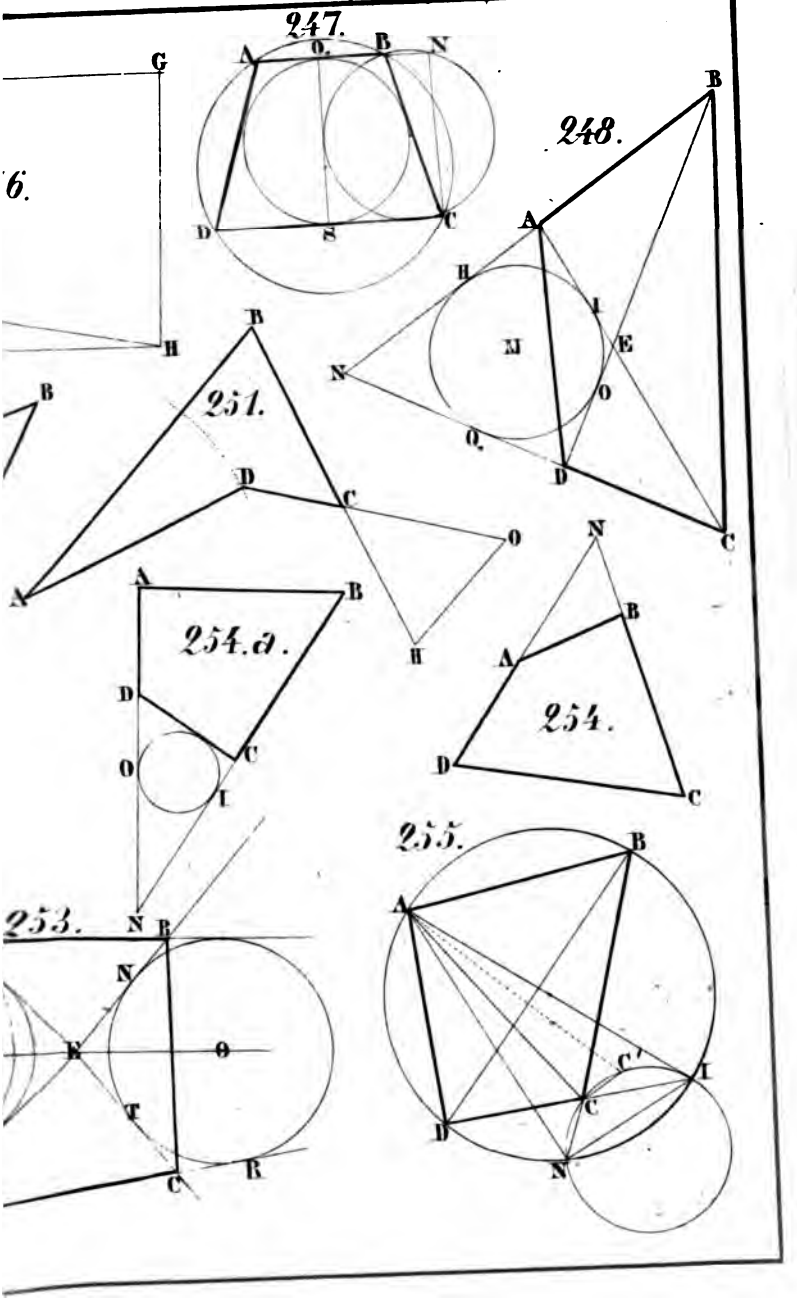

245.
A
B
F
D'
C'
D
C

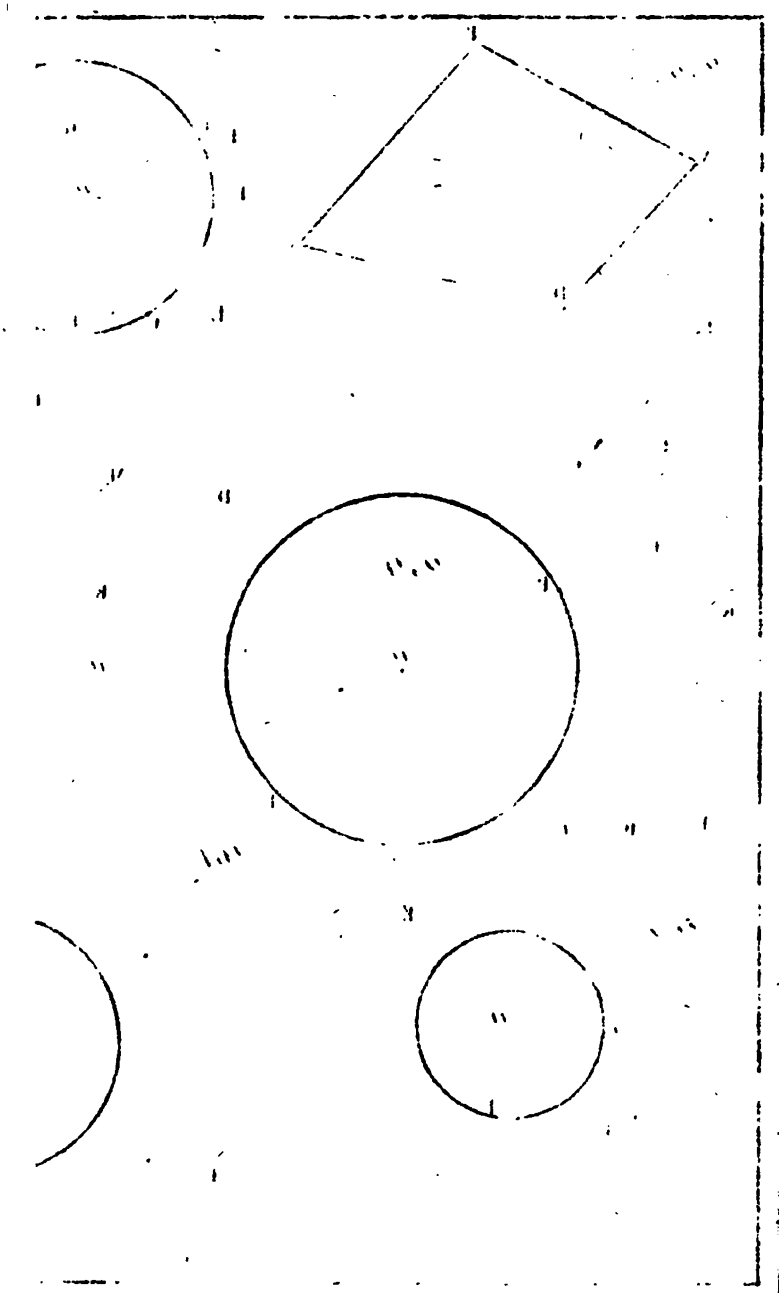

D
C

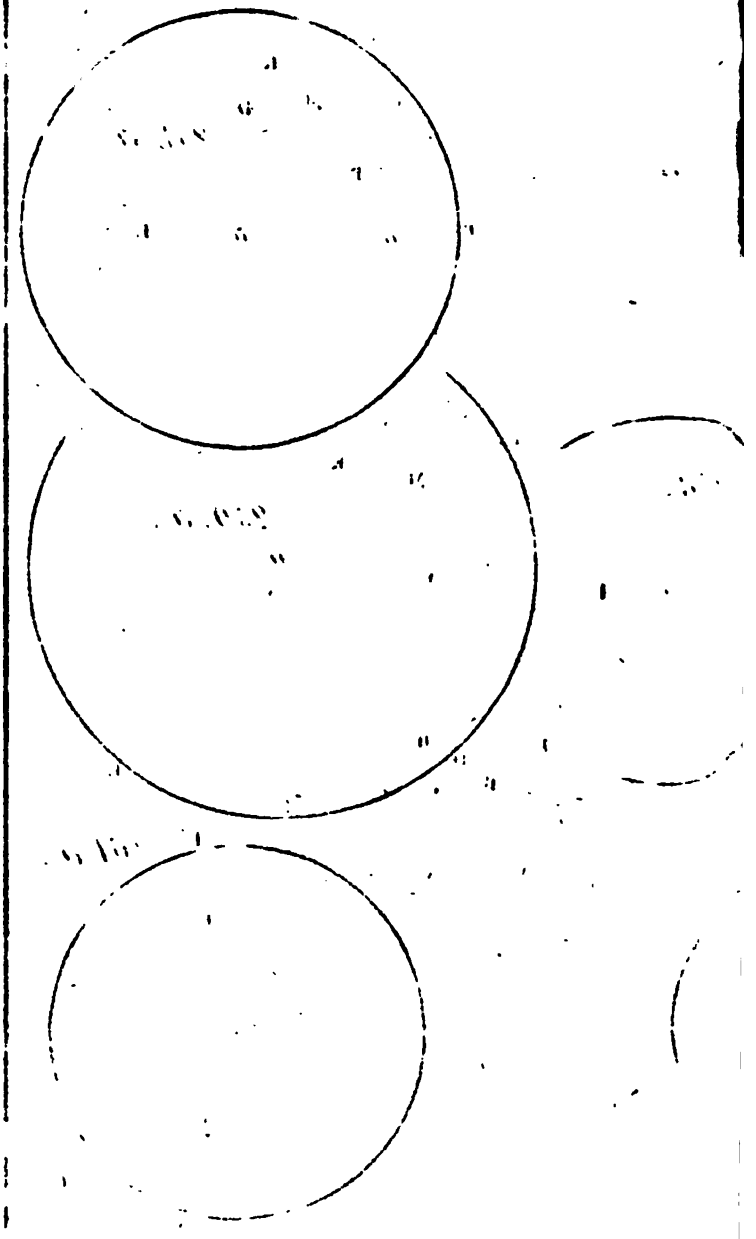

249.
B
H
O
C
A
M
O
D
I

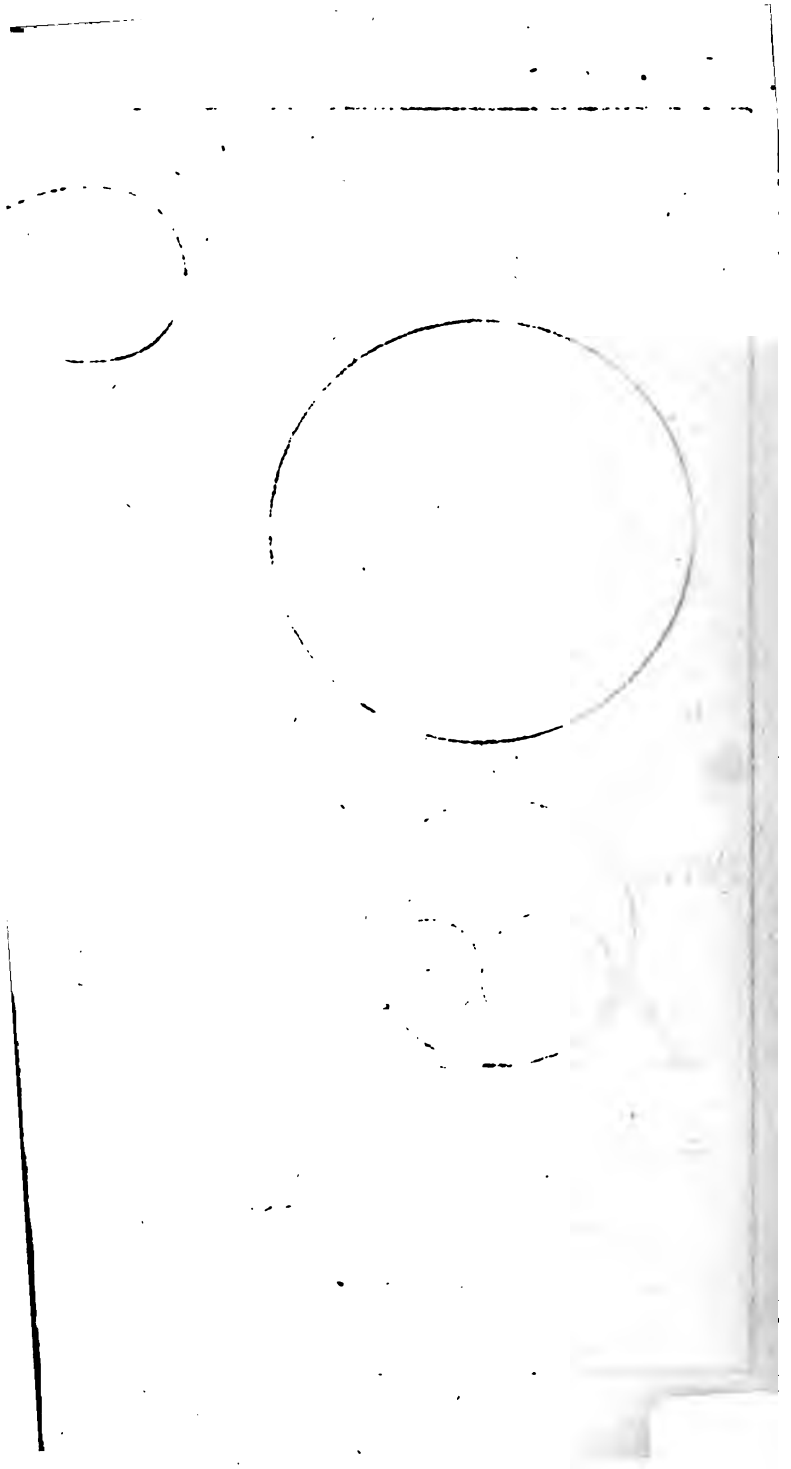

B
A
I
D

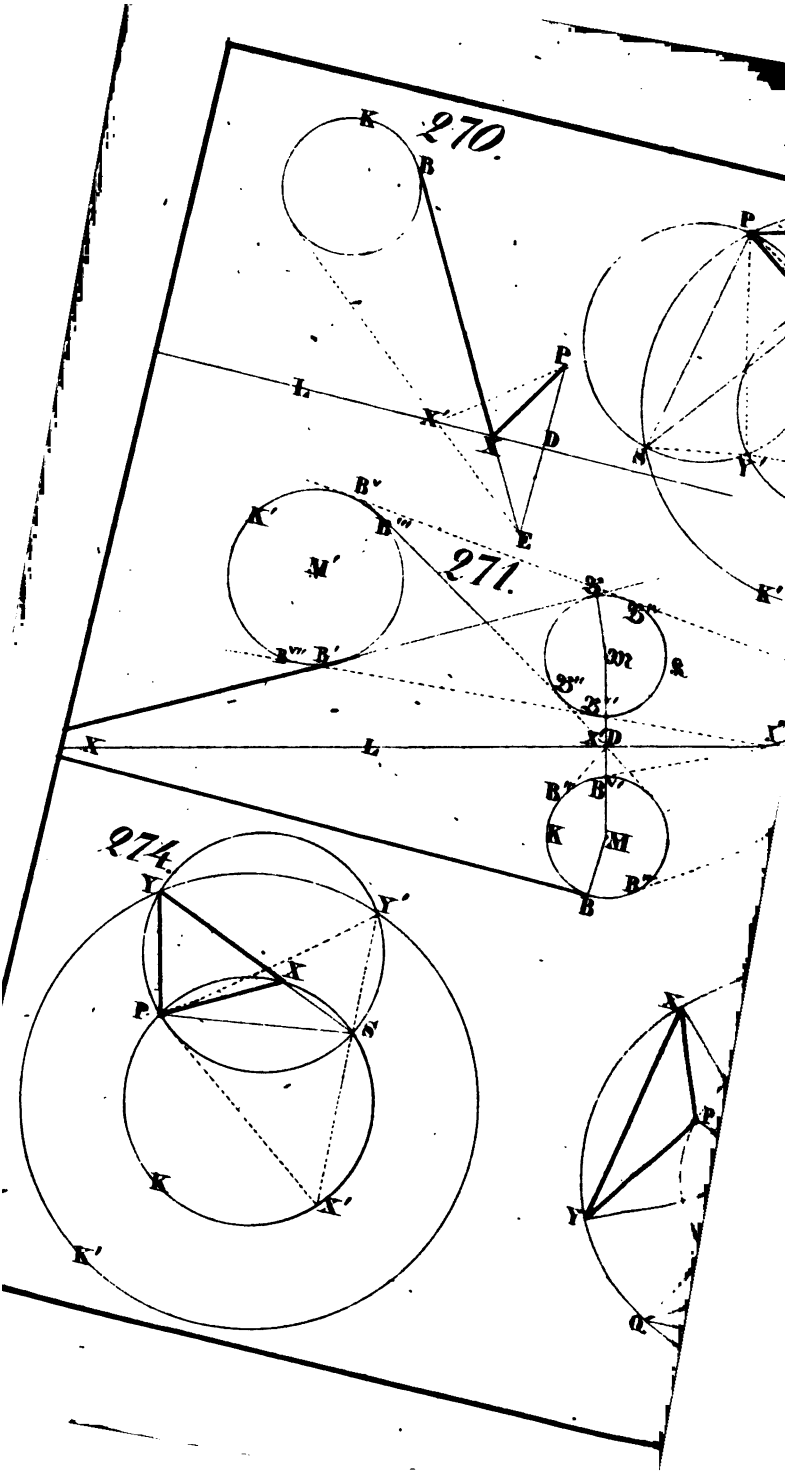

E
252.
B
G
A
N
D
B'
Q
H

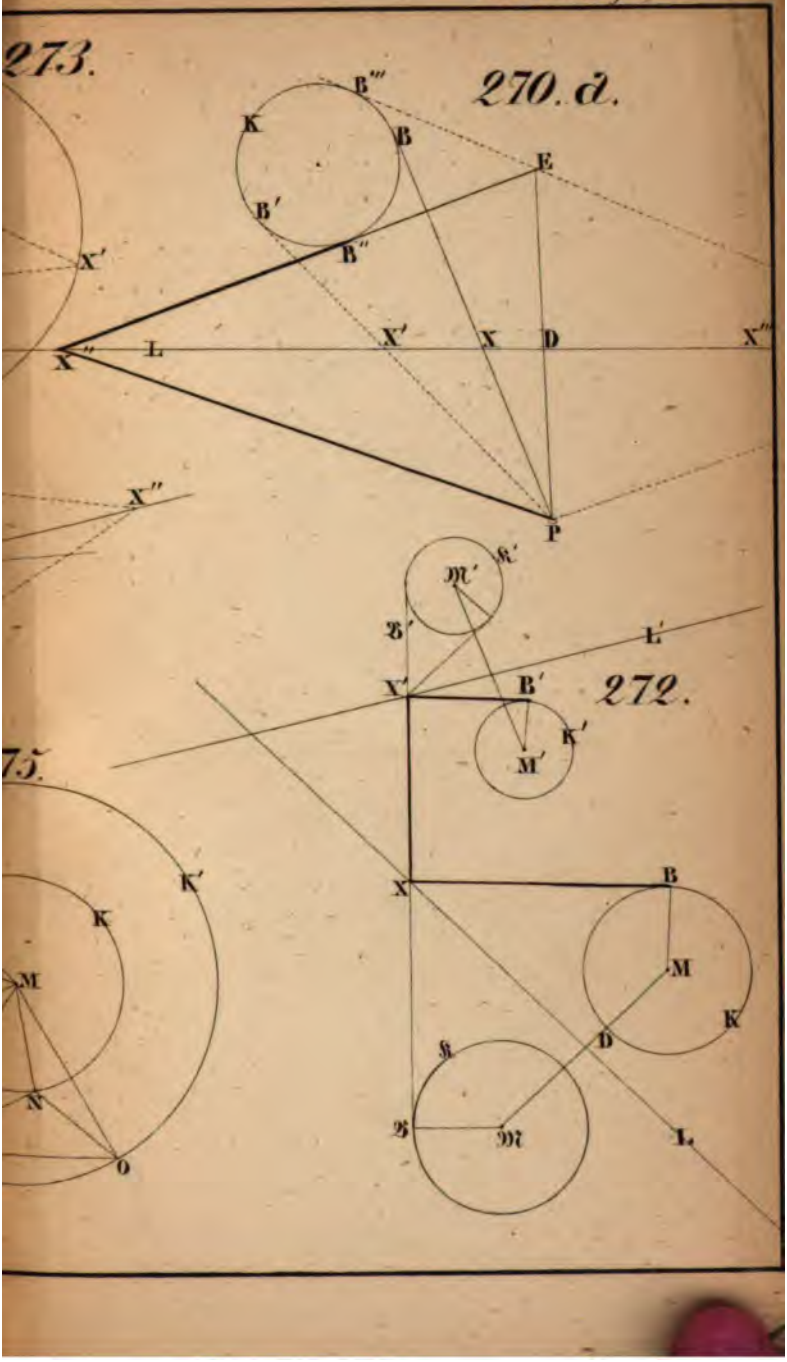

247.
248.
251.
254.a.
254.
255.
253.
6.



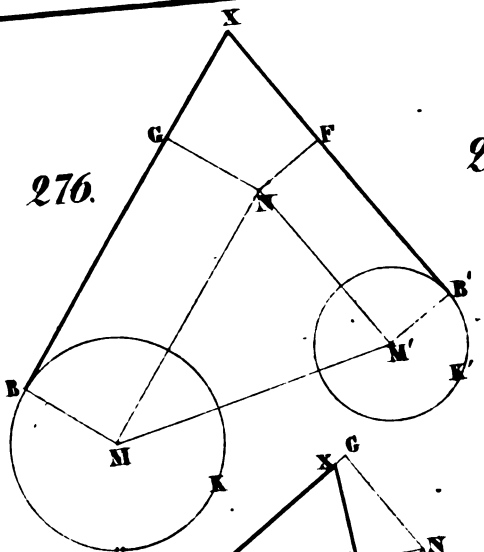




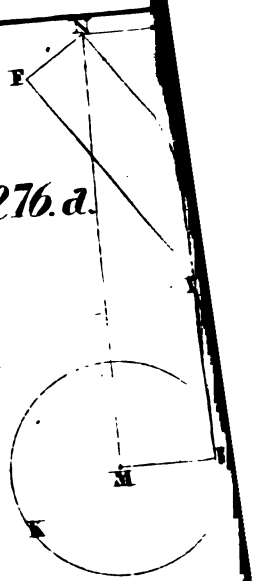

270.
271.
274.


273.
270. d.
B'''
K
B
E
B'
B''
X'
X''
L
X'
X
D
X''
X''
P
M'
S'
B'
L'
X'
B'
272.
K'
M'
75.
K'
K
M
N
O
X
B
M
K
D
S
B'
M'
L

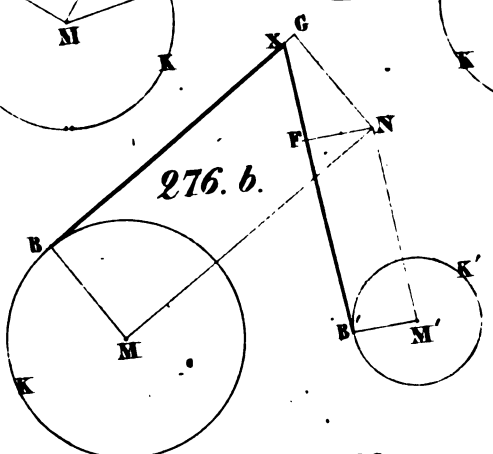
276.

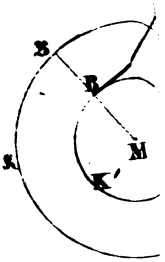


276. a.

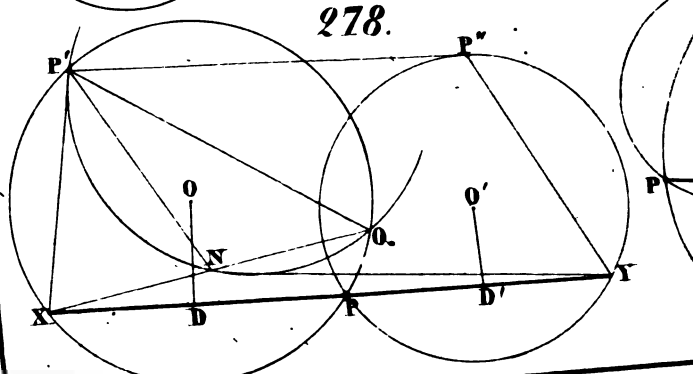


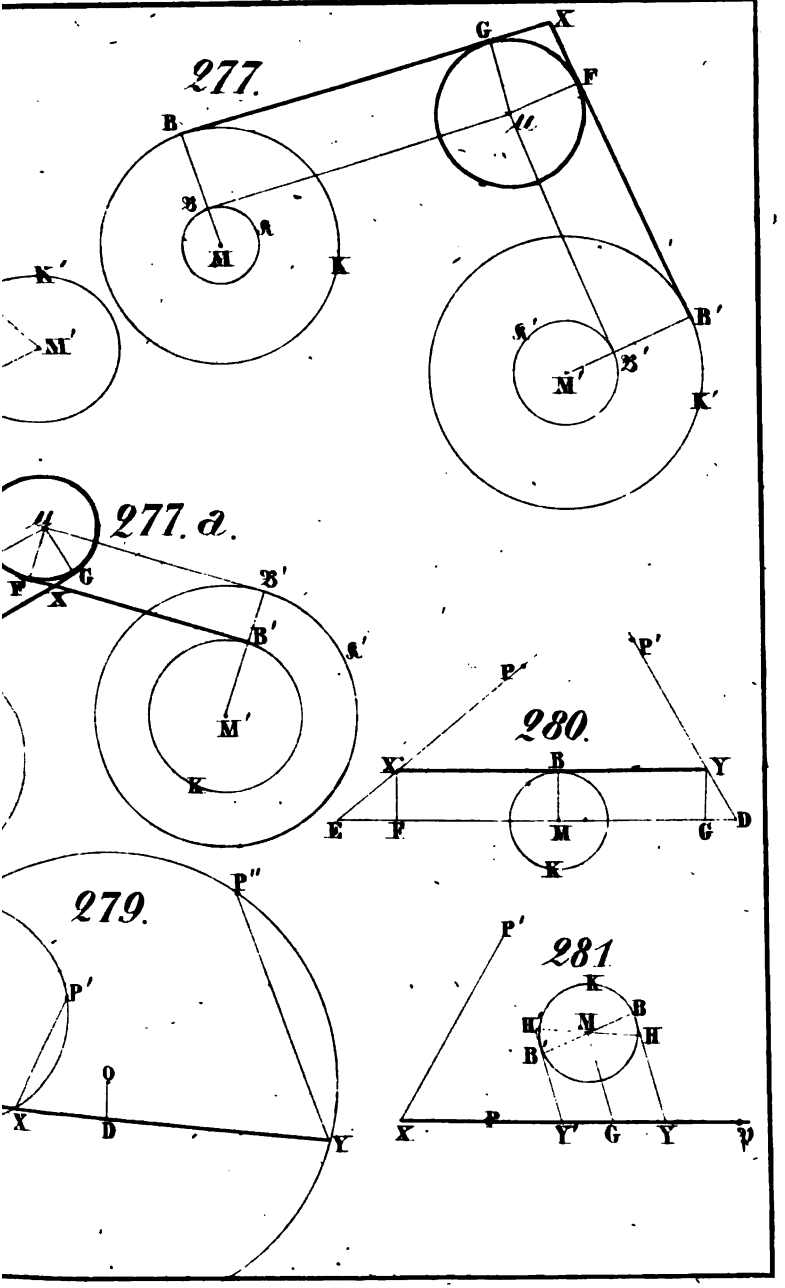
276. b.

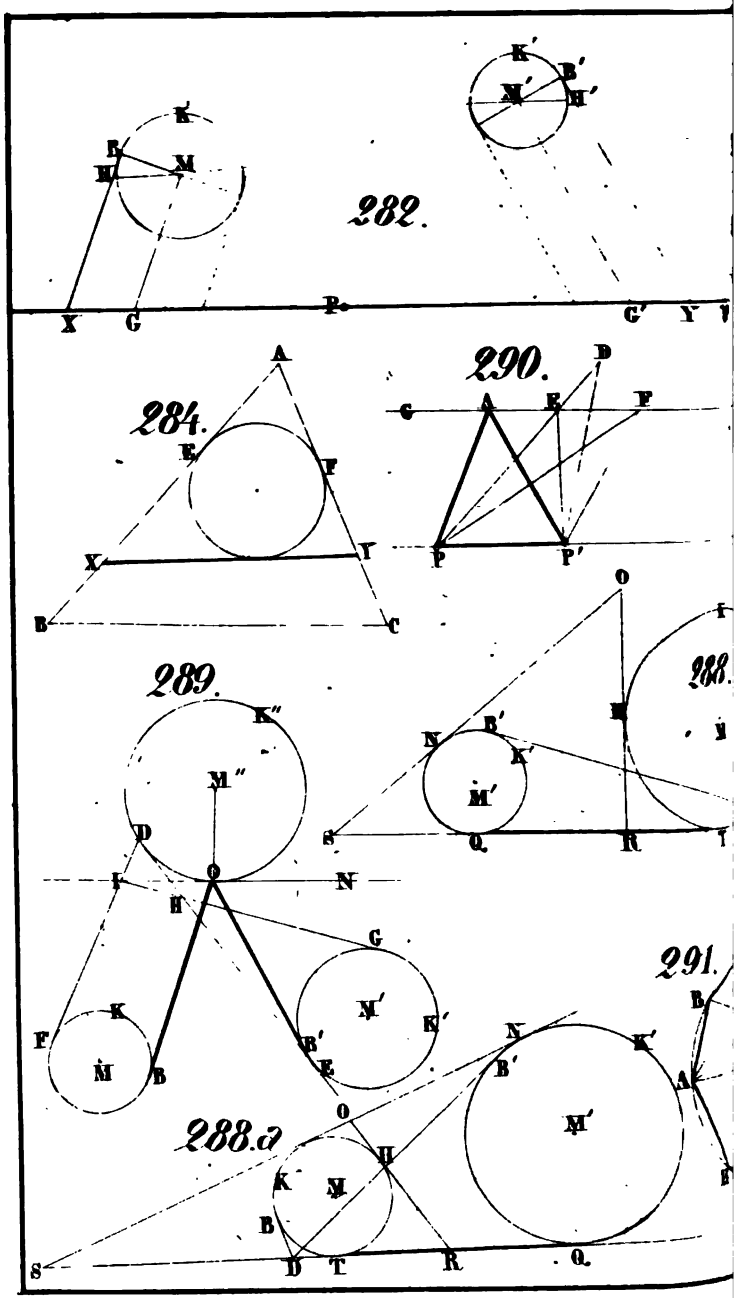


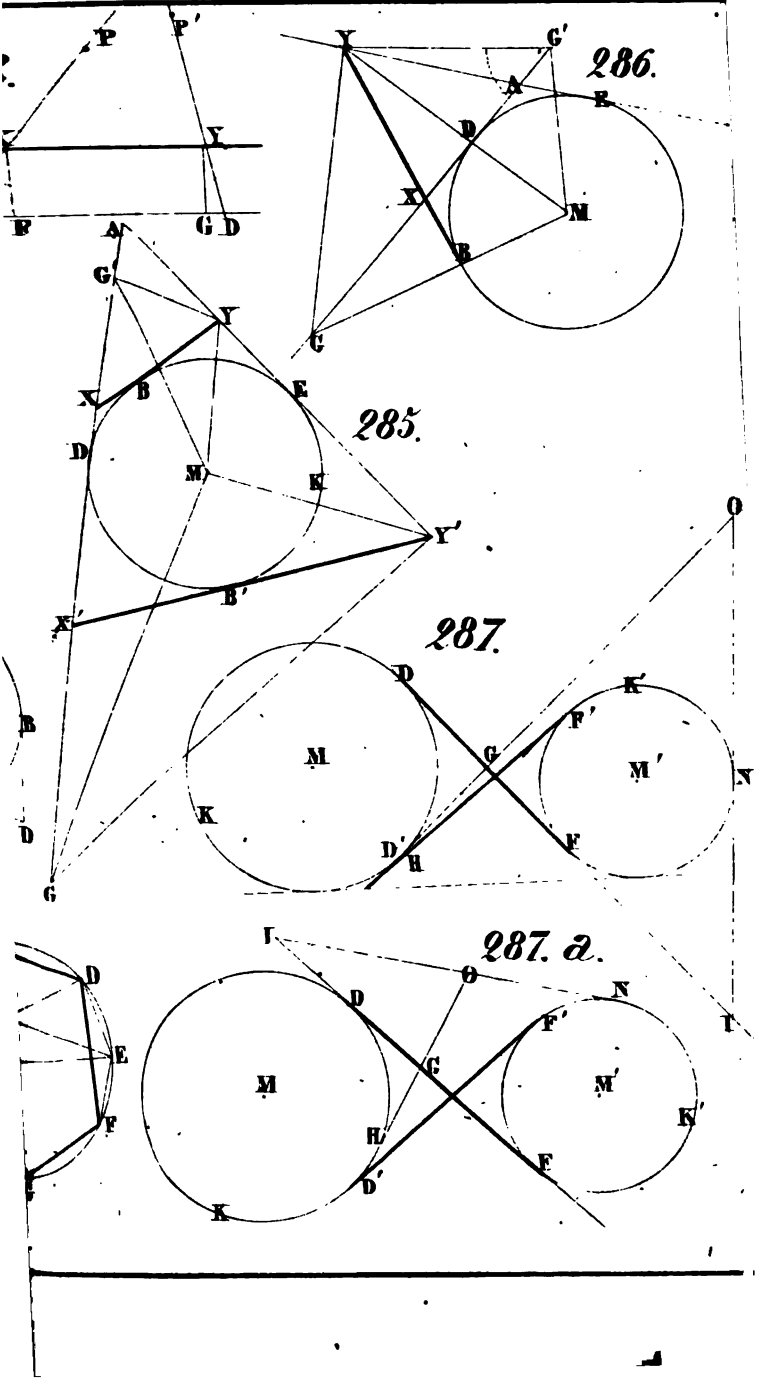


278.

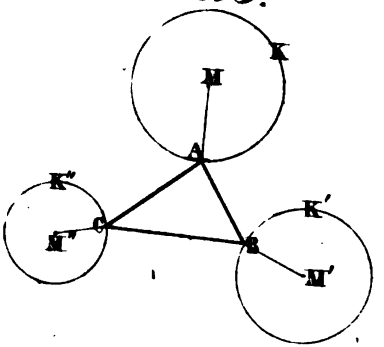


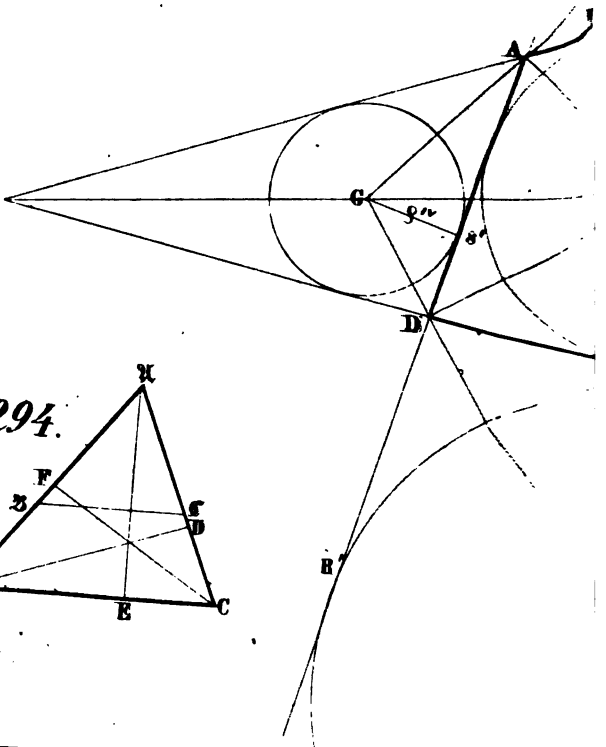

277.
G
X
F
B
M
K
K'
M'
B'
M'
K'
277. a.
F
X
G
B'
M'
K
280.
P
P'
X
B
Y
E
F
M
G
D
K
279.
P''
P'
O
X
D
Y
281
P'
K
B
H'
M
H
B'
X
P
Y'
G
Y
P


282.
284.
290.
289.
288.
291.
288.a

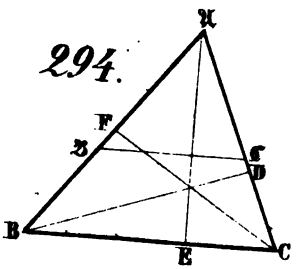

286.
285.
287.
287. a.

293.

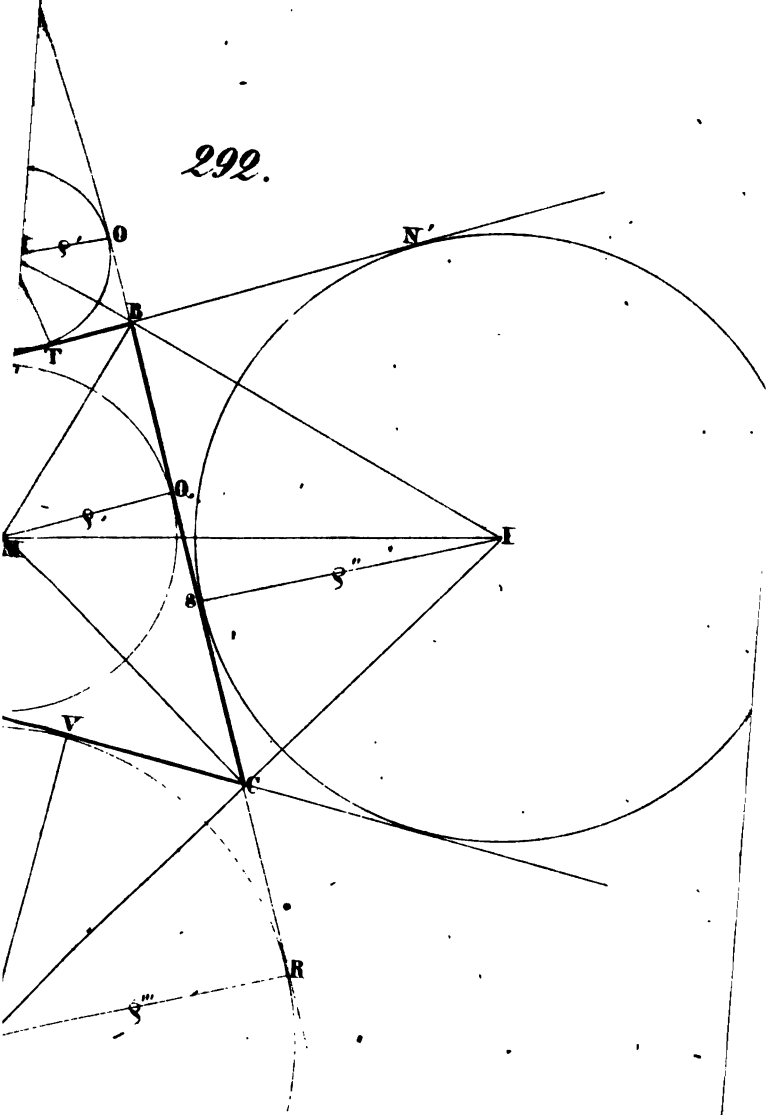


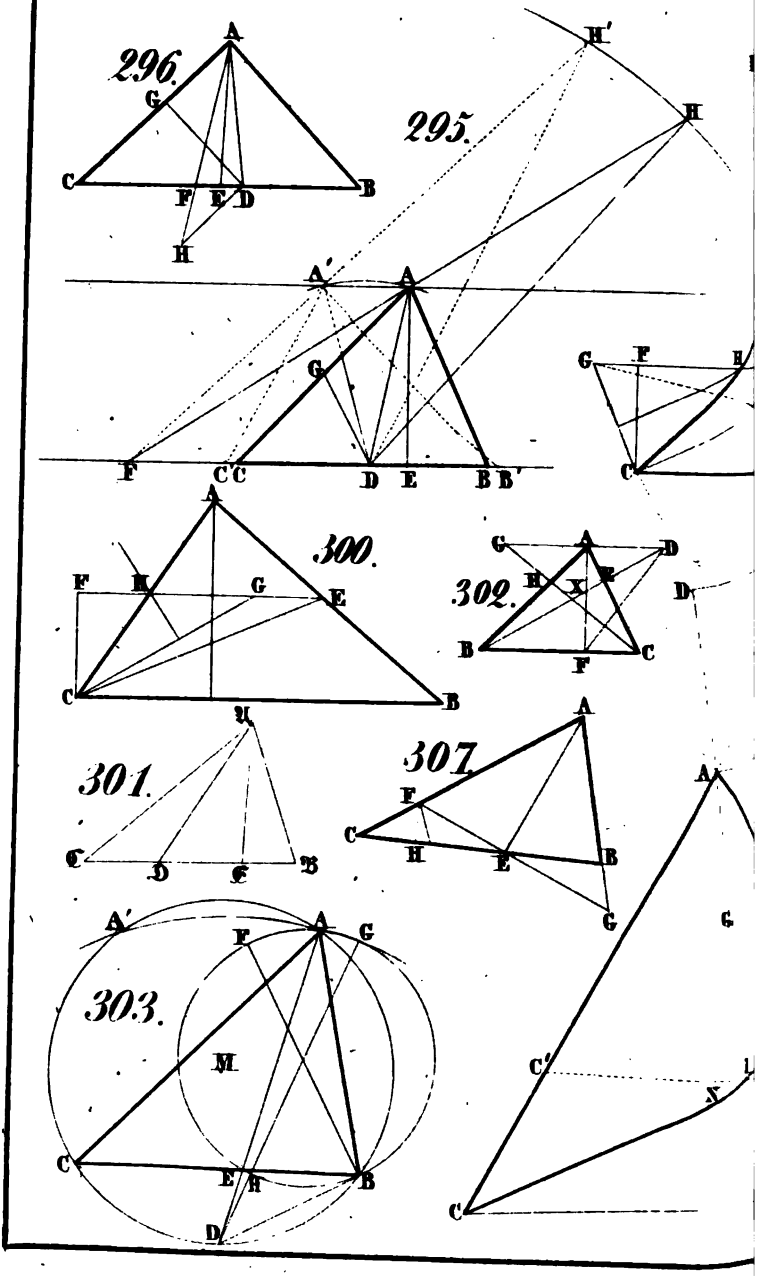


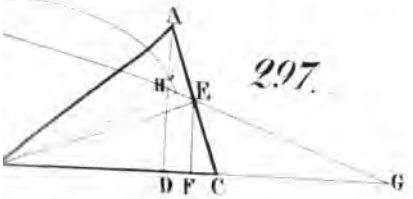
294.



292.

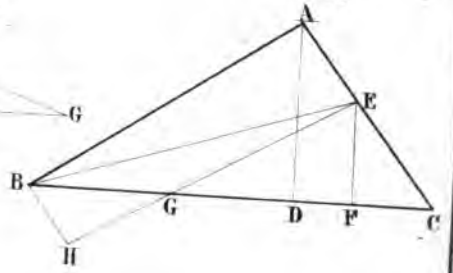



296.
A
G
C
F
E
D
B
H
295.
H'
H
A'
A
G
F
C C
D
E
B B'
G
F
H
C
300.
A
F
H
G
E
C
B
302.
G
A
D
H
X
E
D
B
F
C
301.
A
C
D
E
B
307.
A
F
C
H
E
B
G
A
C
303.
A'
A
F
G
M
C
E
H
B
D
C'
X

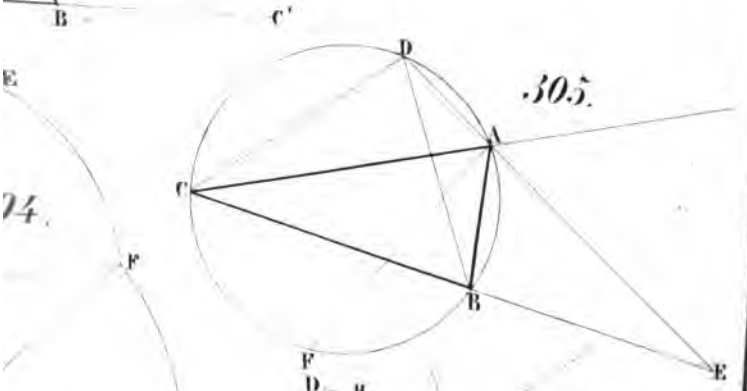


297.

298.

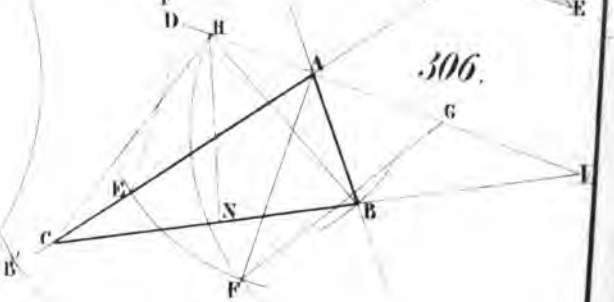


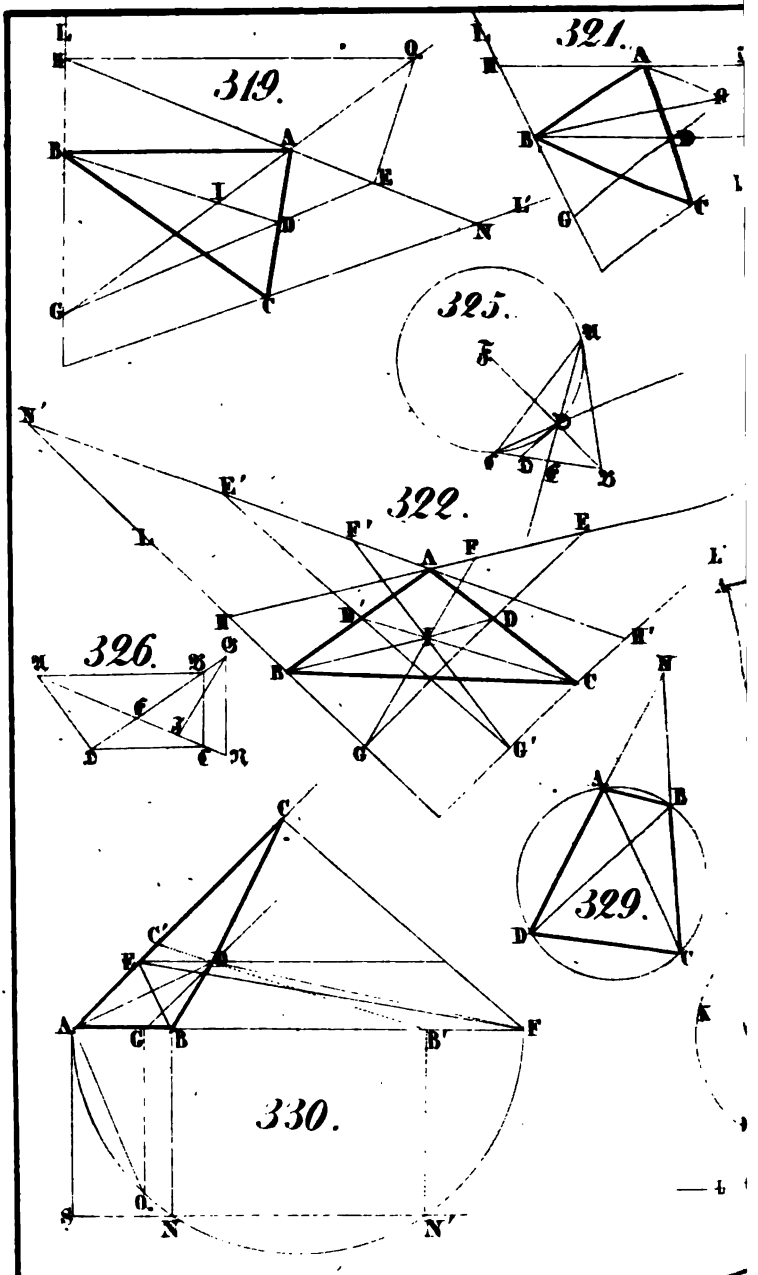
299.

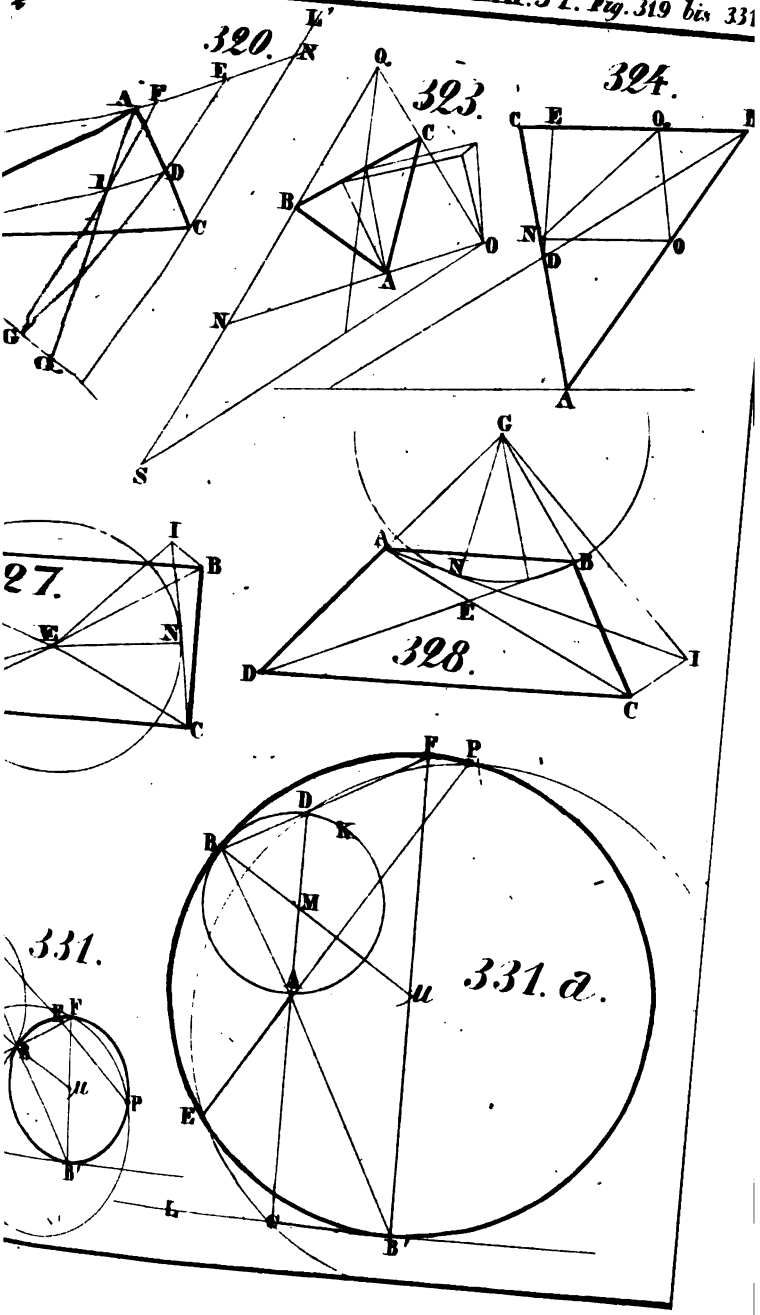


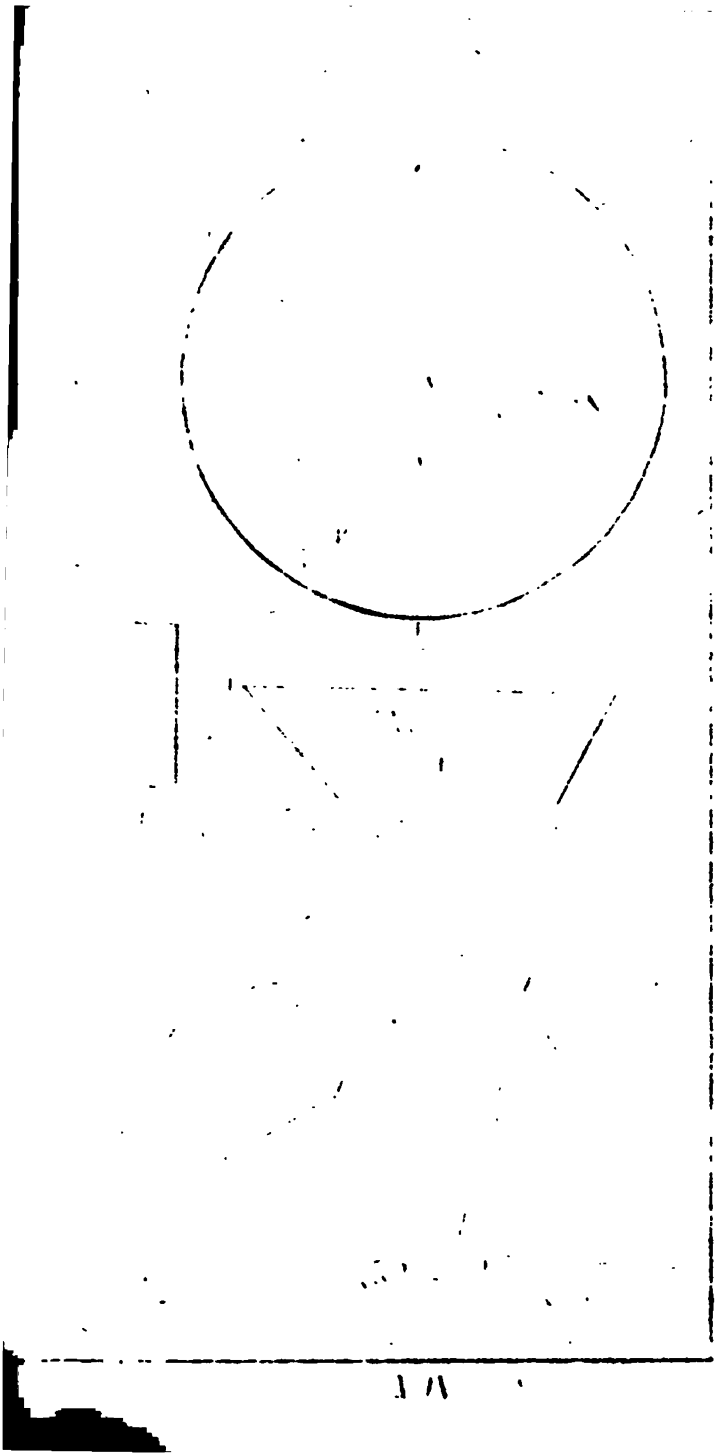
305.

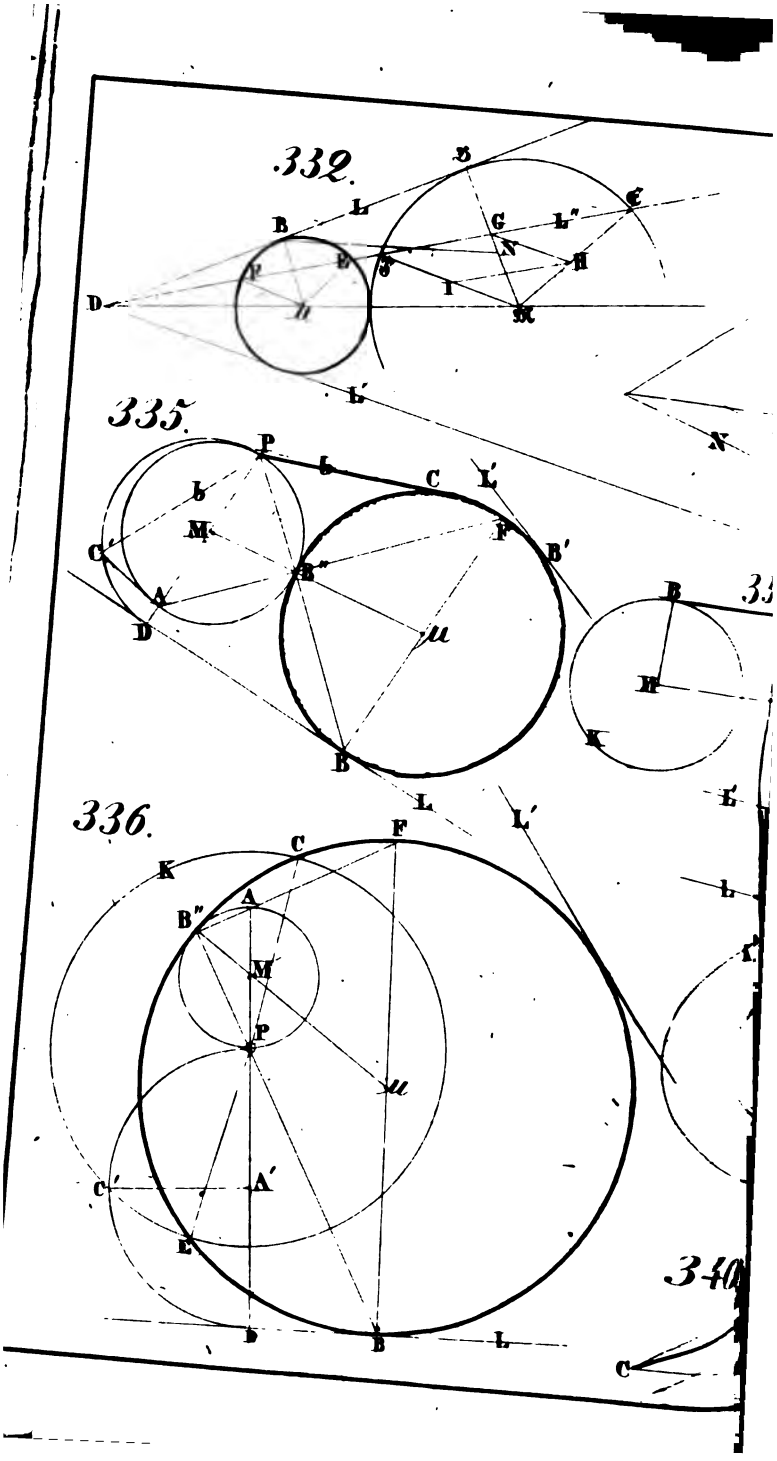
306.



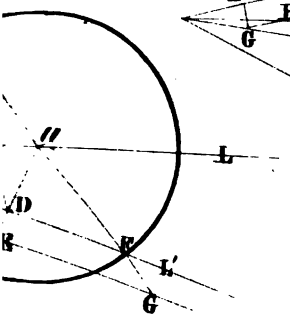

319.
321.
325.
322.
326.
329.
330.


320.
323.
324.
327.
328.
331.
331. a.

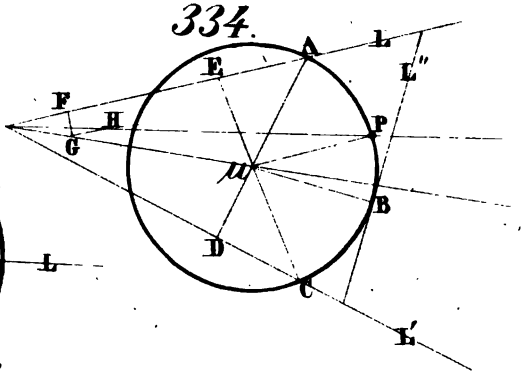



332.
335.
336.
340.

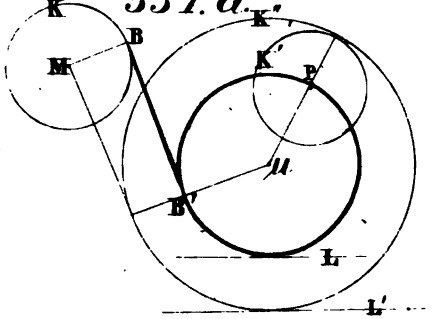
333.

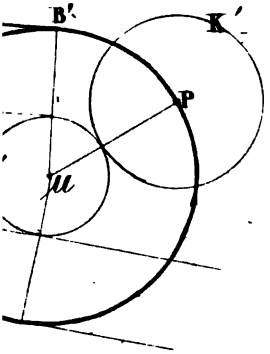


334.

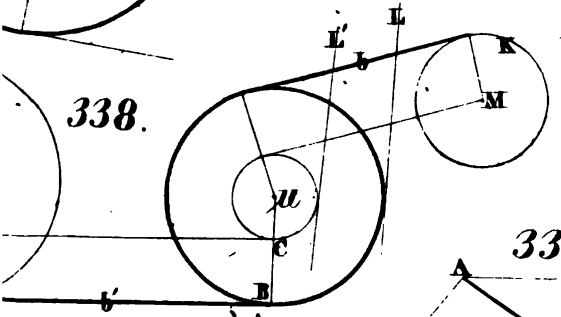


337. d.

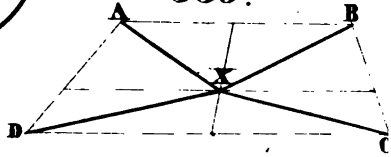




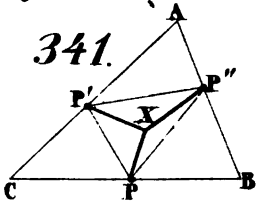
338.

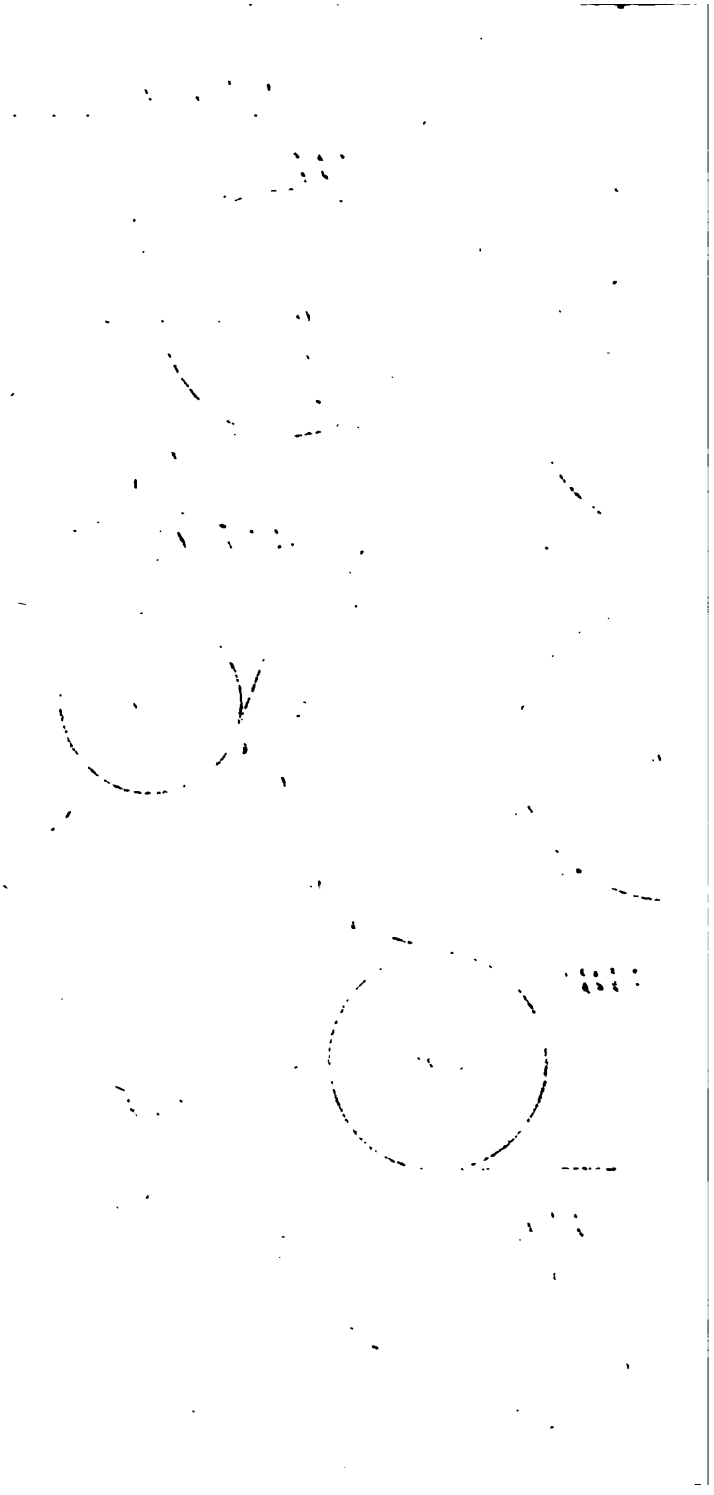


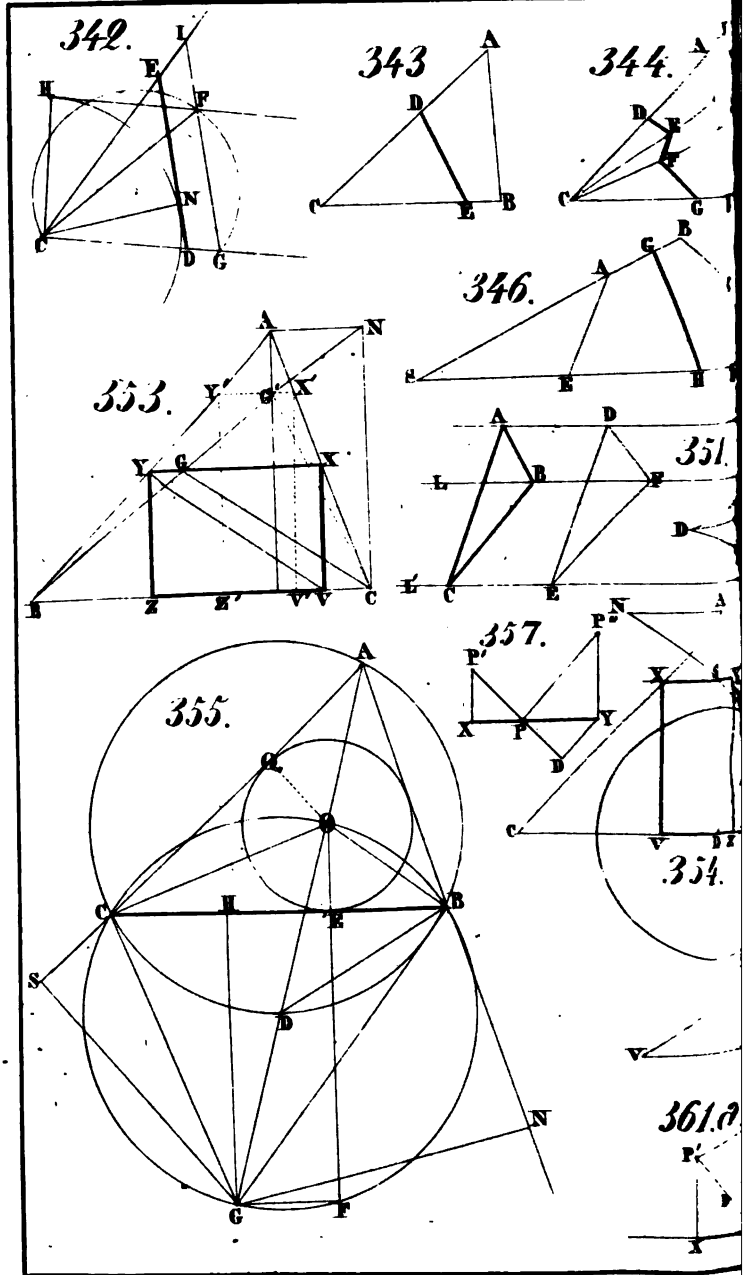
339.

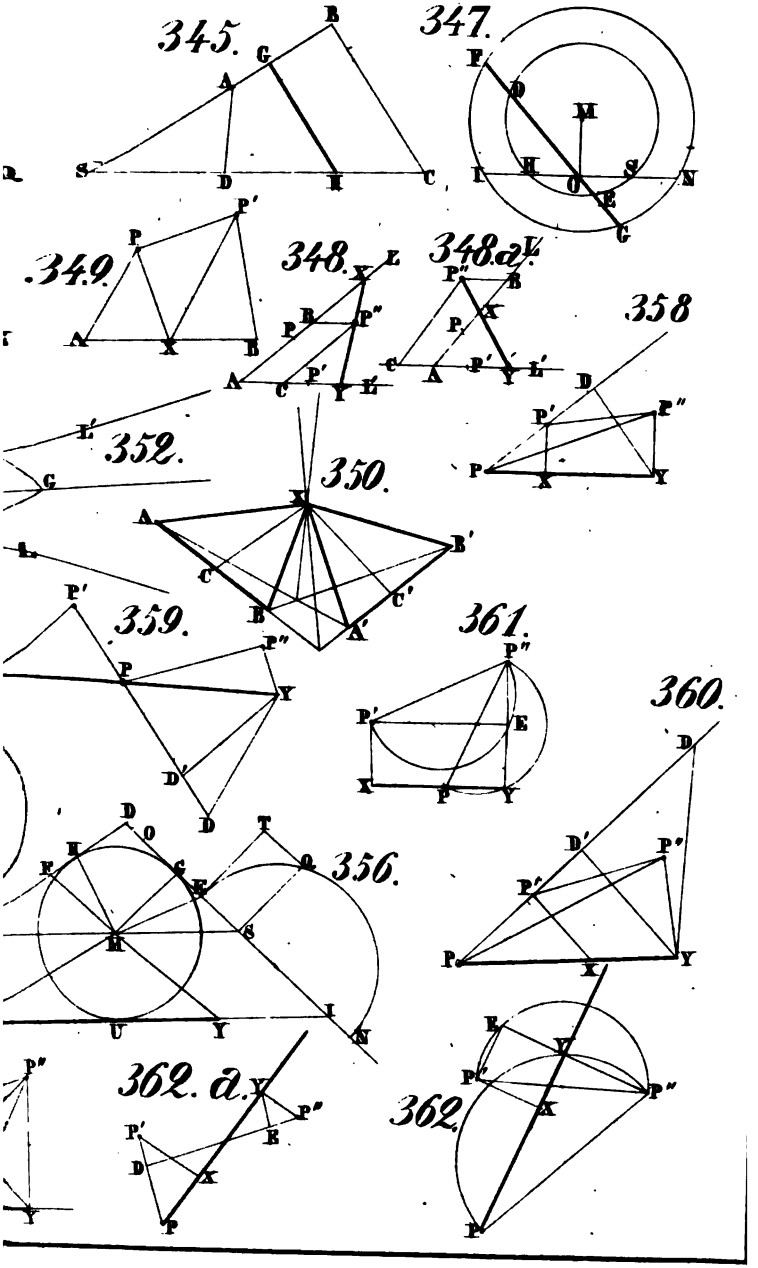


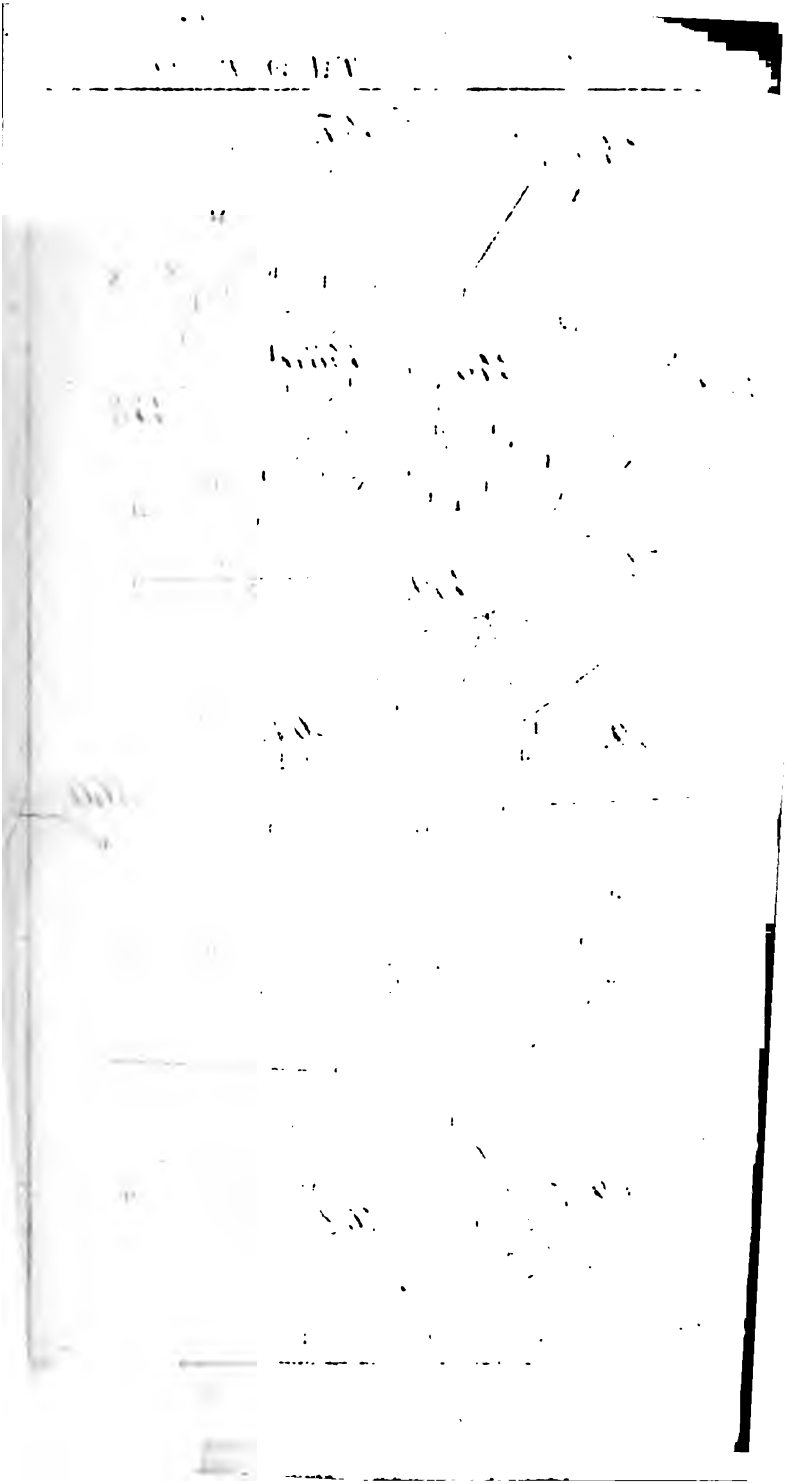
341.

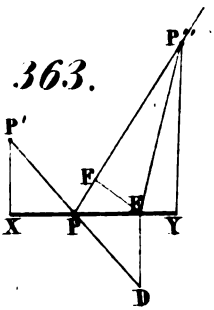


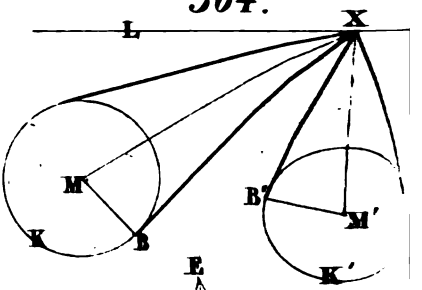


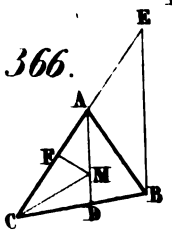

342.
343
344.
346.
353.
351.
357.
355.
354.
361.

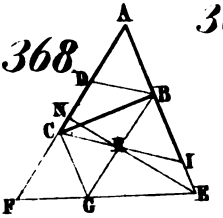

345.
347.
349.
348.
348.a.
358
352.
350.
359.
361.
360.
356.
362. a.
362.

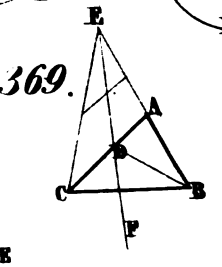



363.
P''
P'
E
X
P
Y
D

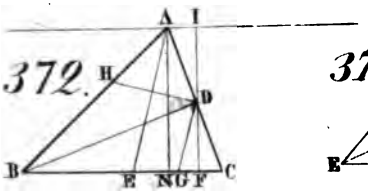

364.
L
X
M
K
B
B'
M'
K'

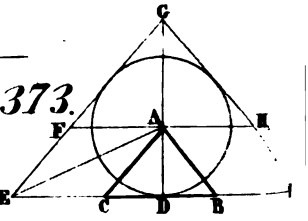

366.
E
A
F
M
C
D
B

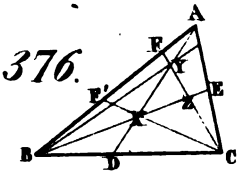

368.
A
D
B
N
C
I
F
G
E

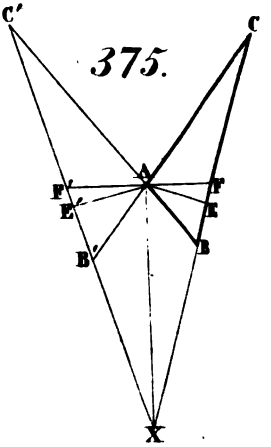

369.
E
A
D
C
B
F

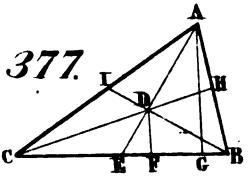
371.

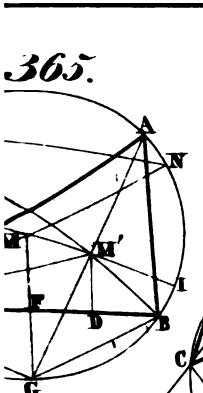

372.
A
I
H
D
B
E
N
G
F
C

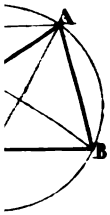

373.
C
A
F
H
E
C
D
B

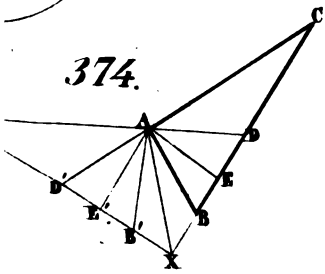

376.
A
F
Y
E
F'
Z
X
B
D
C

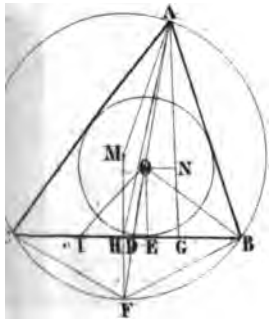

C'
C
375.
A
F'
F
E'
E
B'
B
X

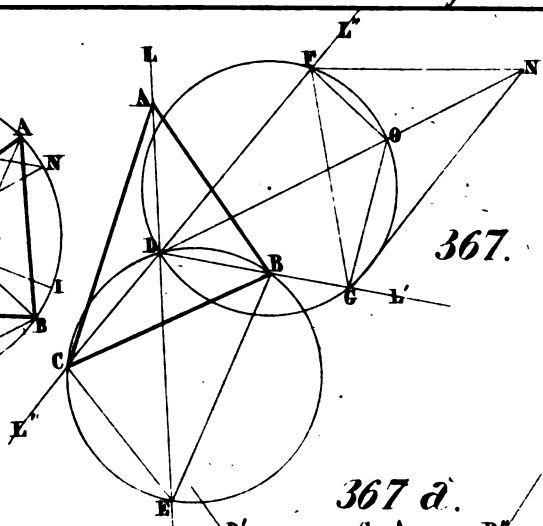

377.
A
I
H
D
C
E
F
G
B

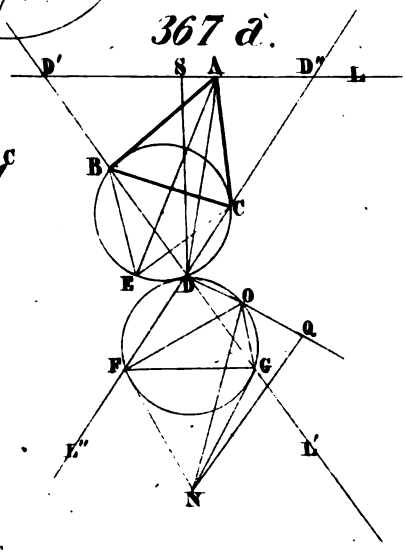

365.
A
N
M
M'
I
F
D
B
G

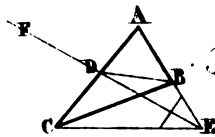

A
B

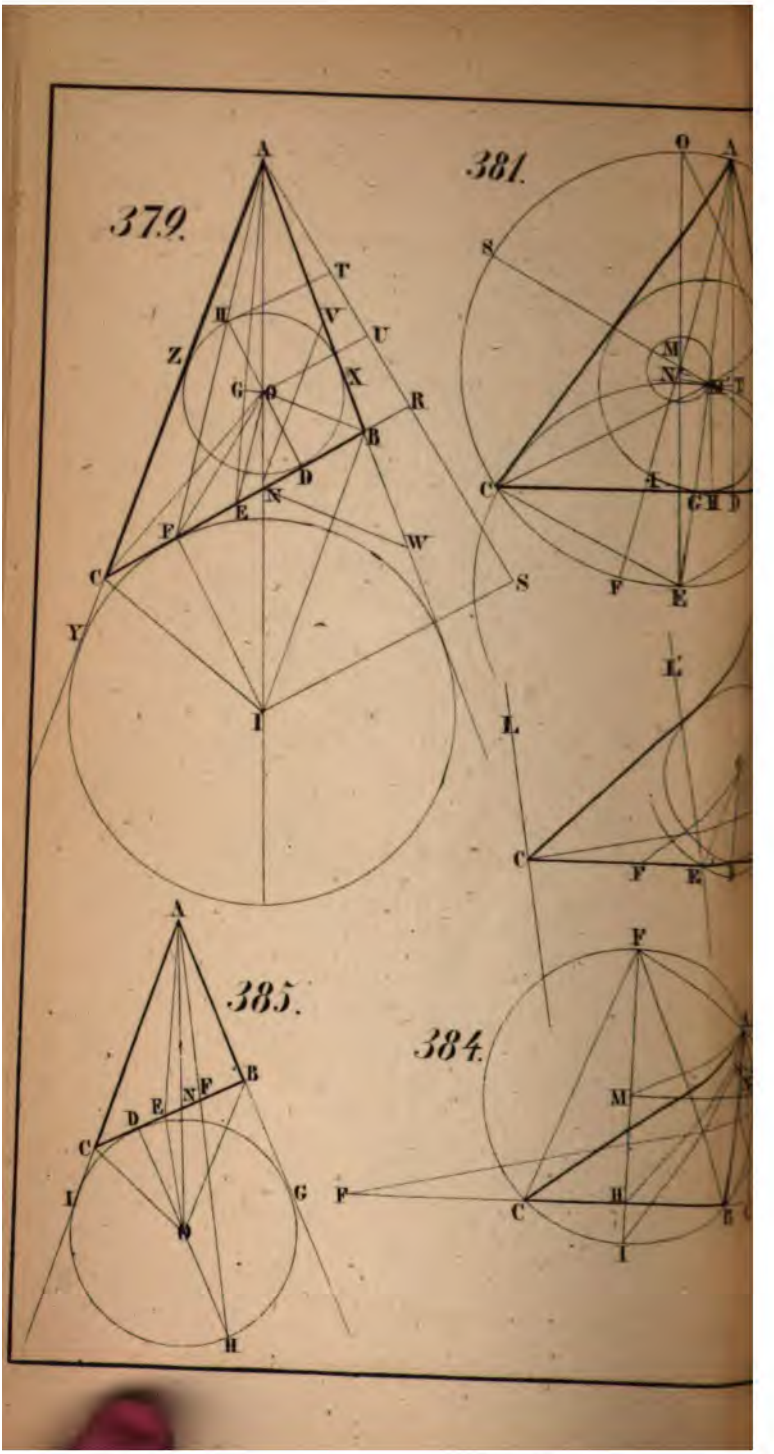

374.
C
A
D
D'
E
L'
E'
B
X


A
M
O
N
I
H
D
E
G
B
F

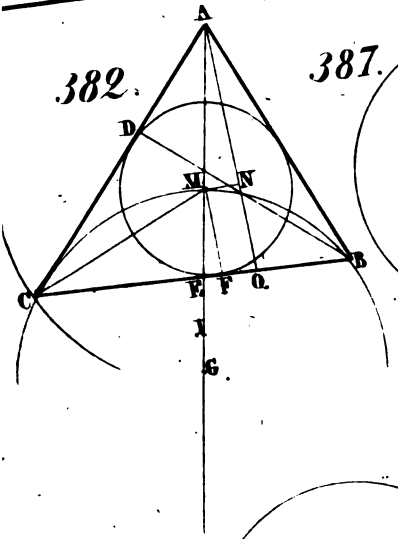

L''
L
F
N
A
O
D
B
C
L'
L'
E
367.


367 a.
D'
S
A
D''
L
B
C
E
D
O
Q
F
G
L''
L'
N

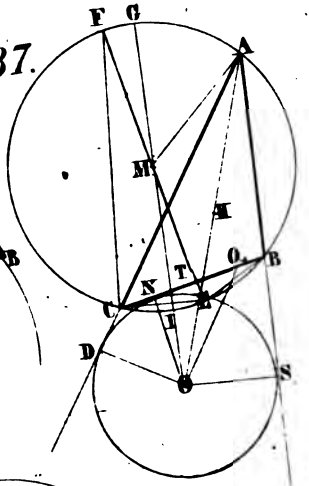

A
F
D
B
370.
C
E


379.
A
T
V
U
Z
X
G
O
R
B
D
N
E
F
C
W
S
Y
I
381.
O
A
S
M
N
T
C
F
E
L
L
C
F
E
385.
A
B
D
E
N
F
C
I
G
O
H
384.
F
M
C
B
F
I

382.

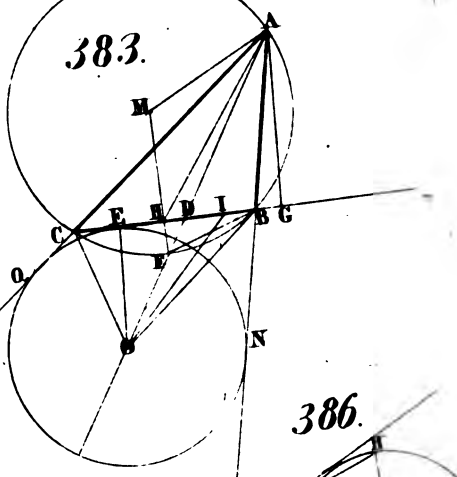


387.

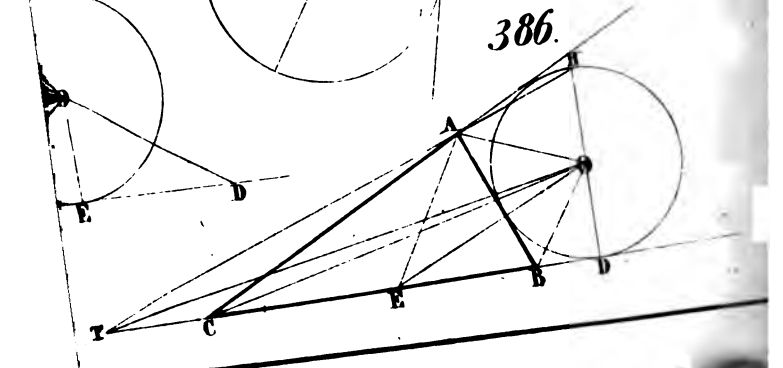


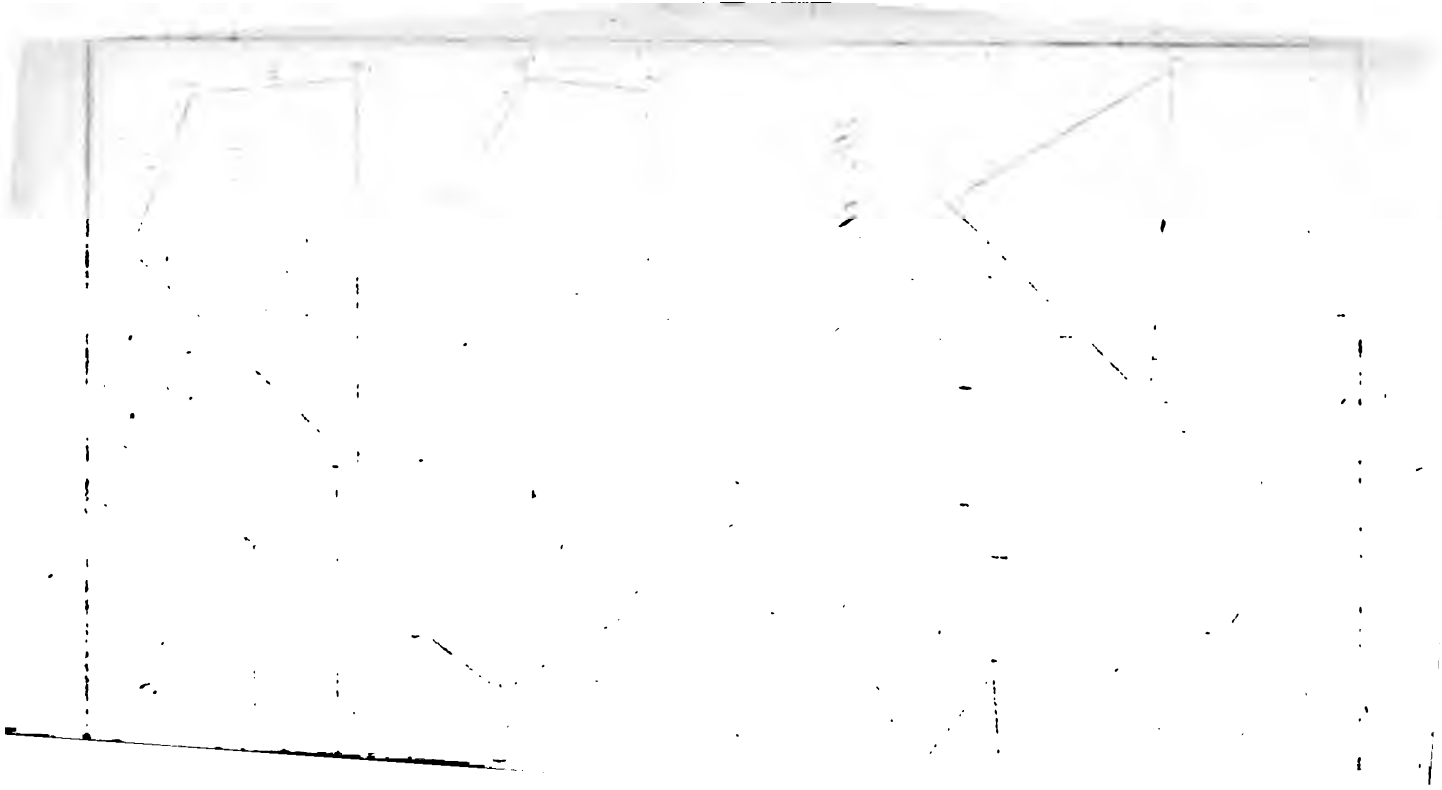
80.

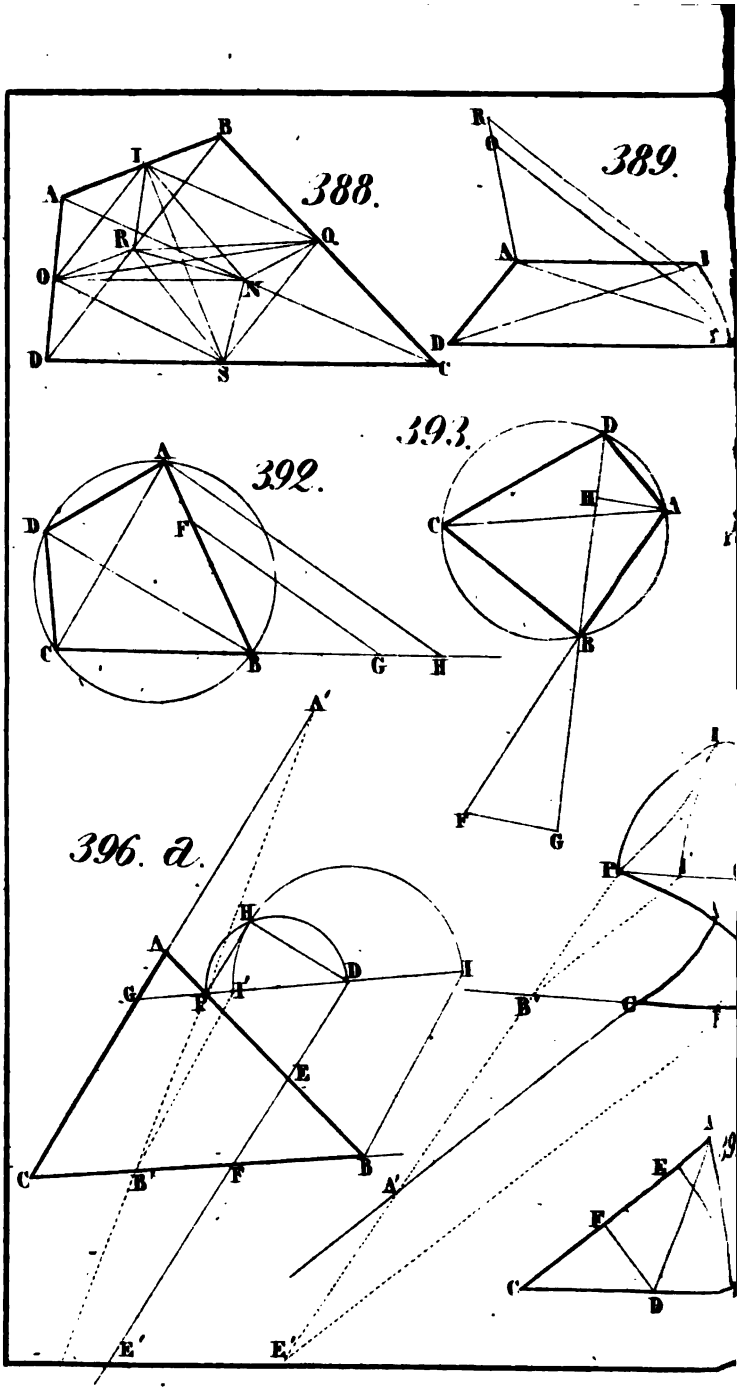
383.

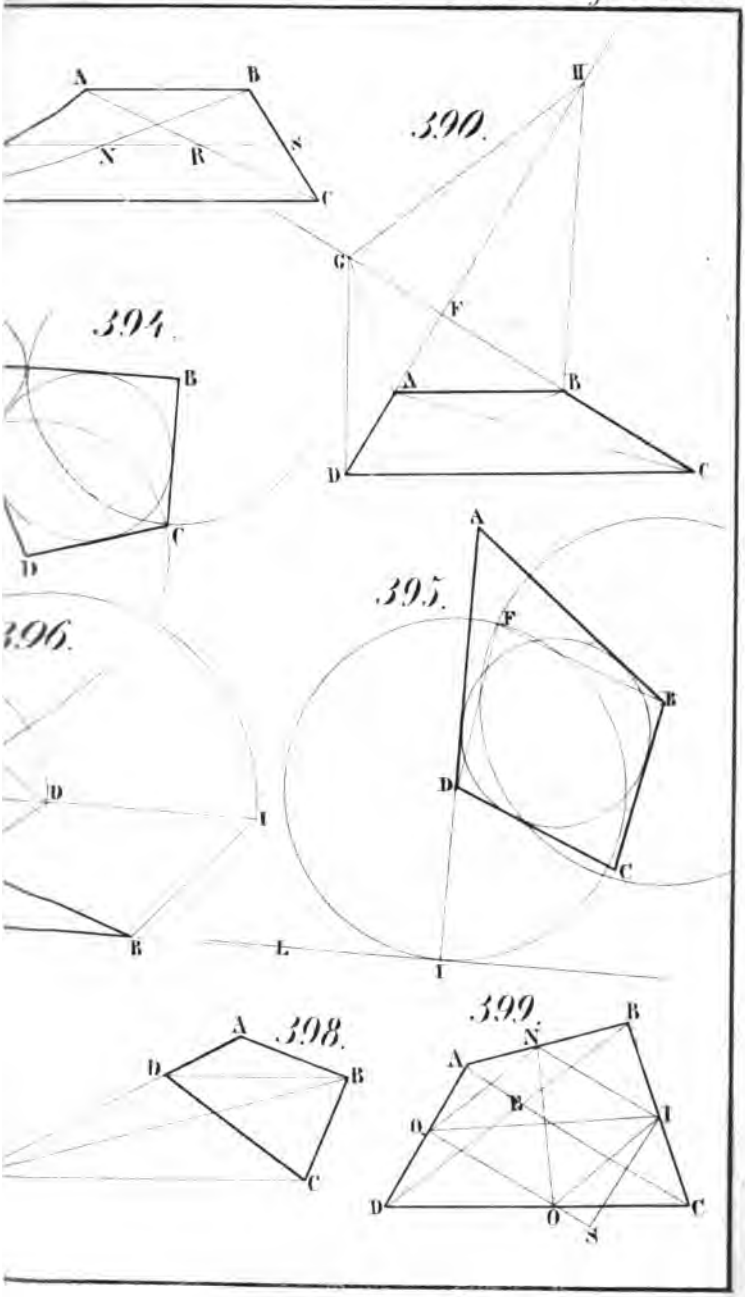


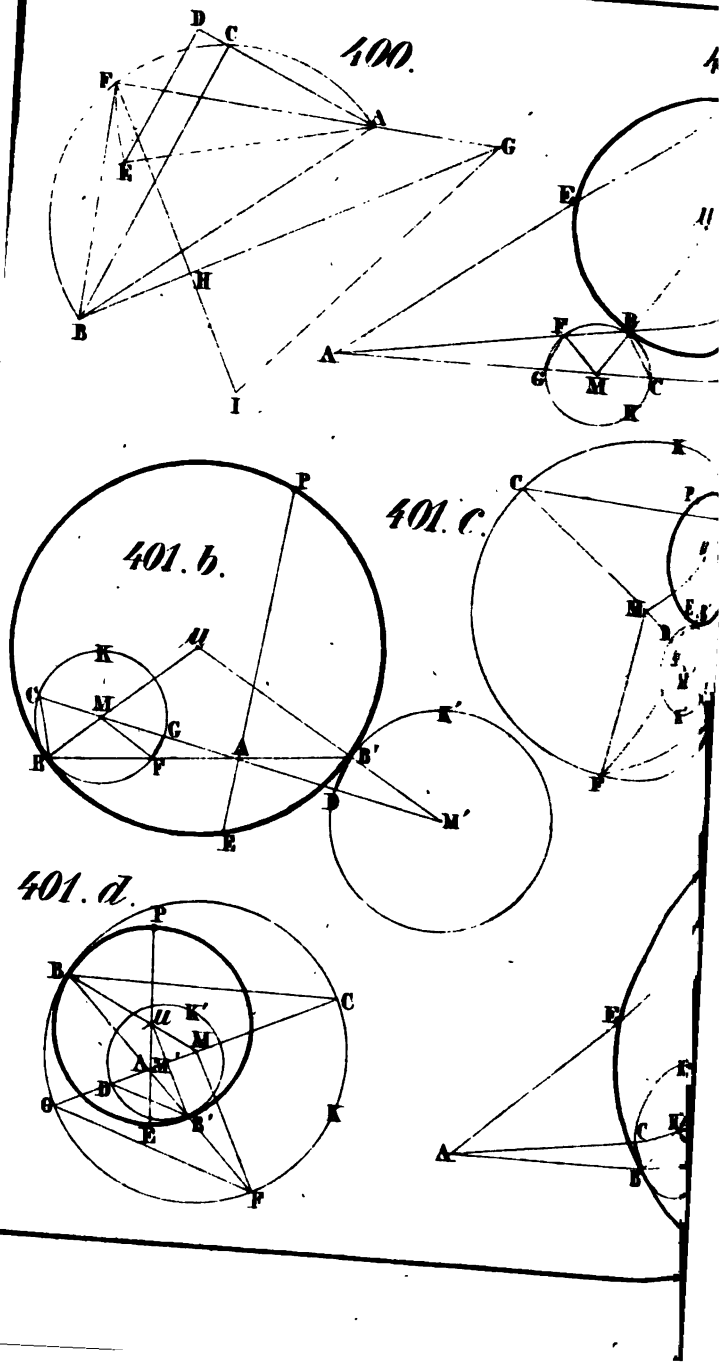
386.



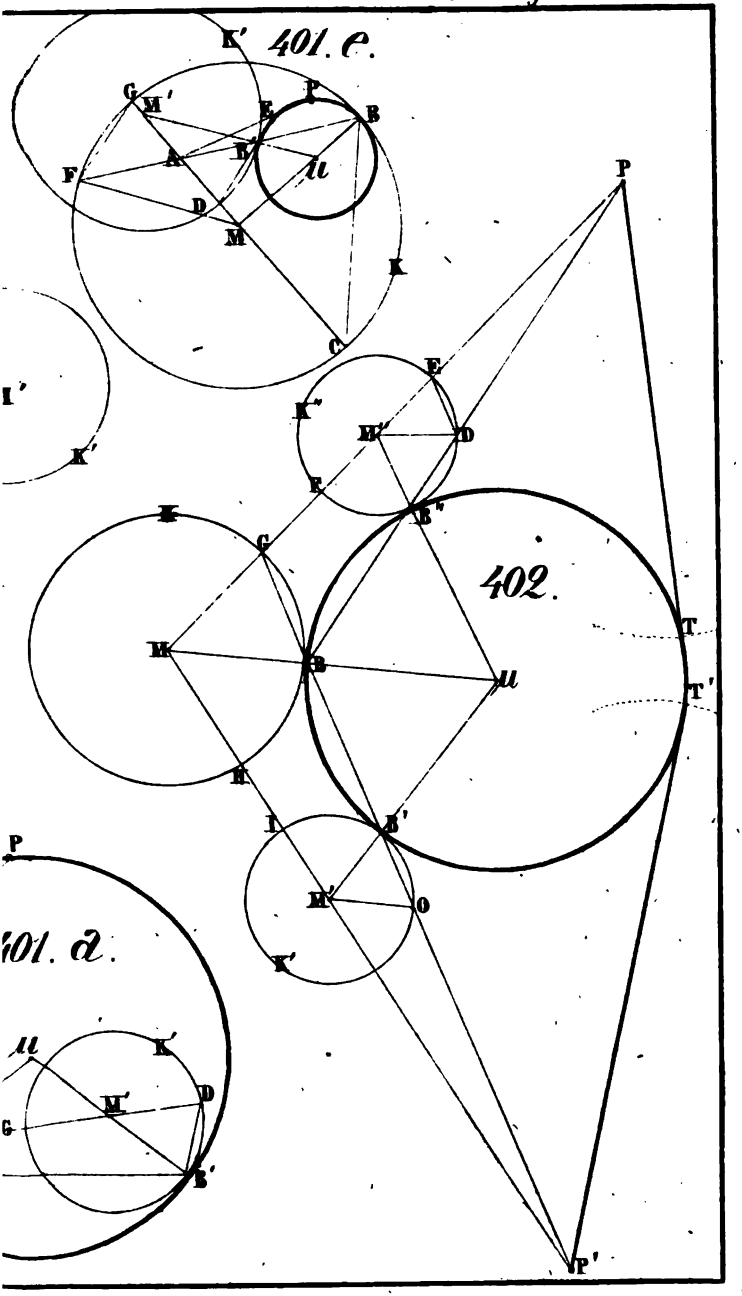


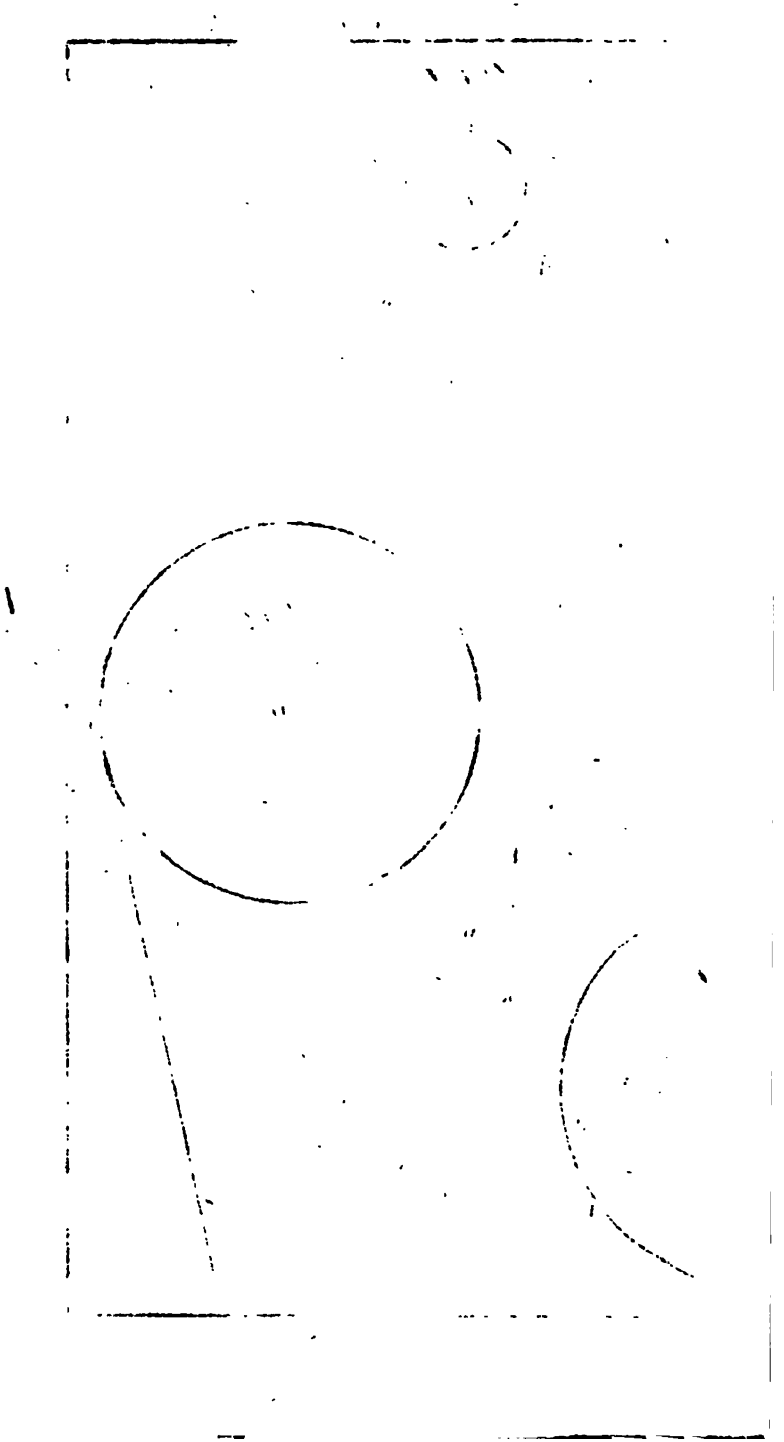

388.
389.
392.
393.
396. a.

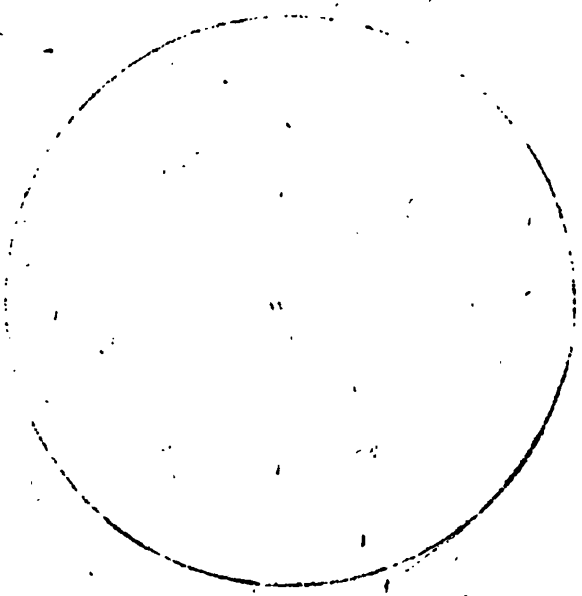

A
B
N
R
S
C
390.
H
G
F
A
B
D
C
394.
B
C
D
396.
D
I
B
L
395.
A
F
E
D
C
I
398.
A
D
B
C
399.
N
B
A
E
I
O
D
O
C
S

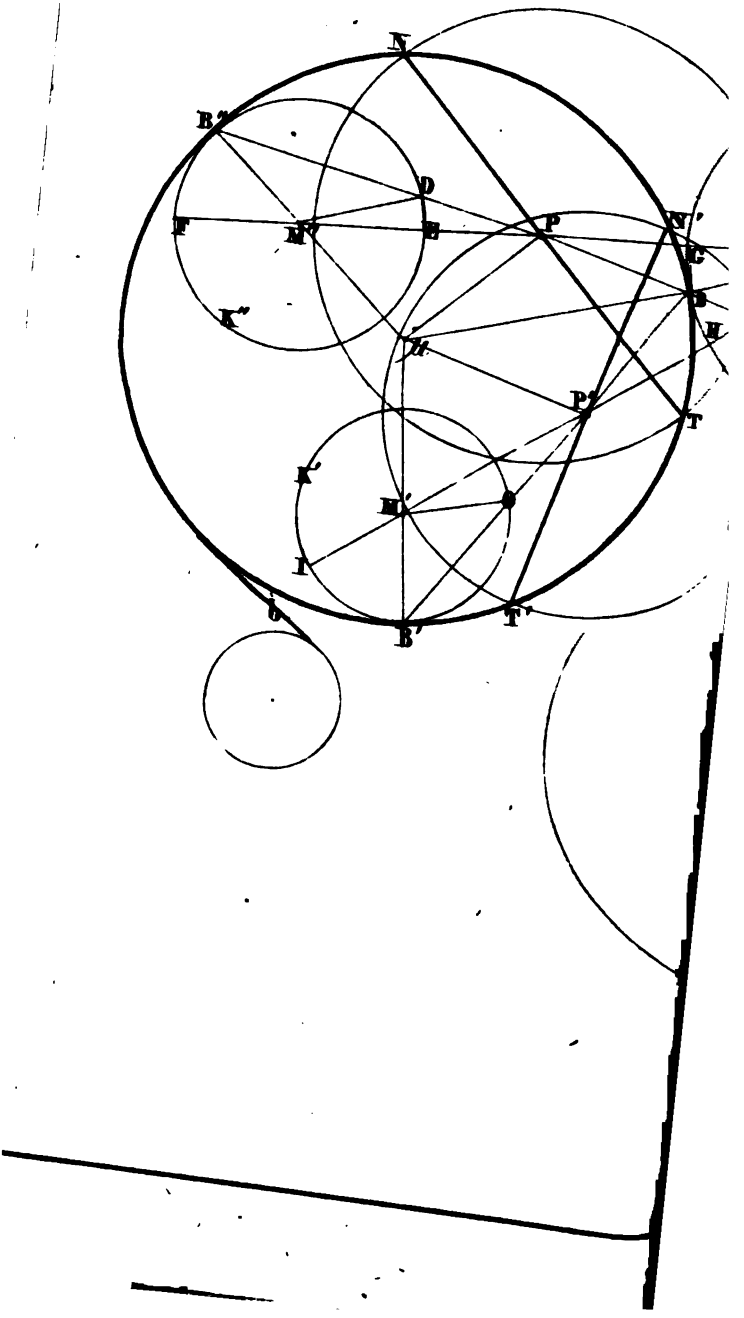

400.
401. b.
401. c.
401. d.

TAF. 43. *Fig.* 400 *bis* 402.

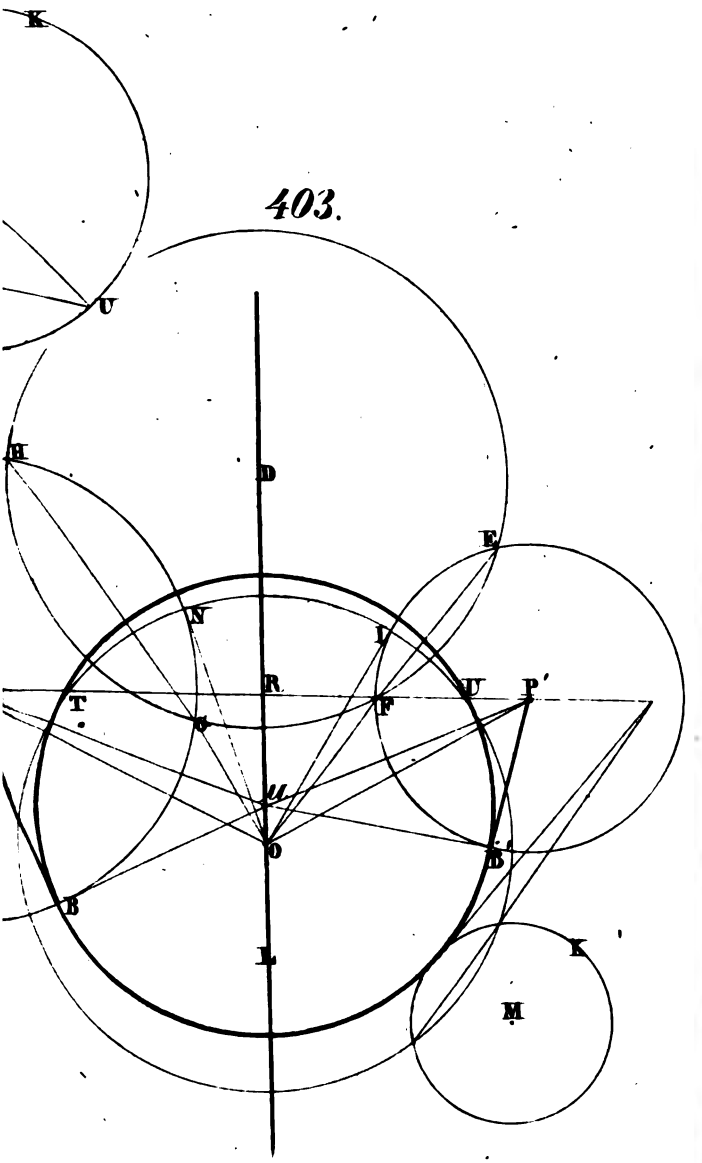


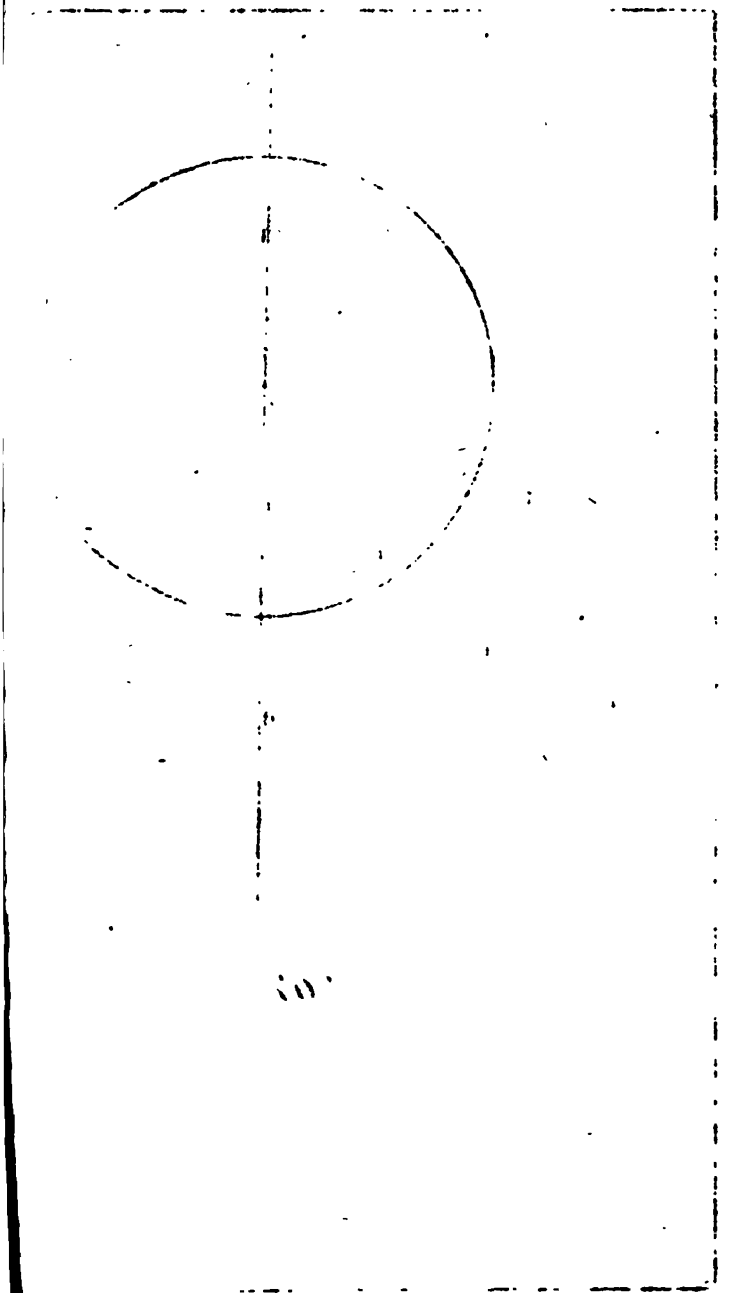


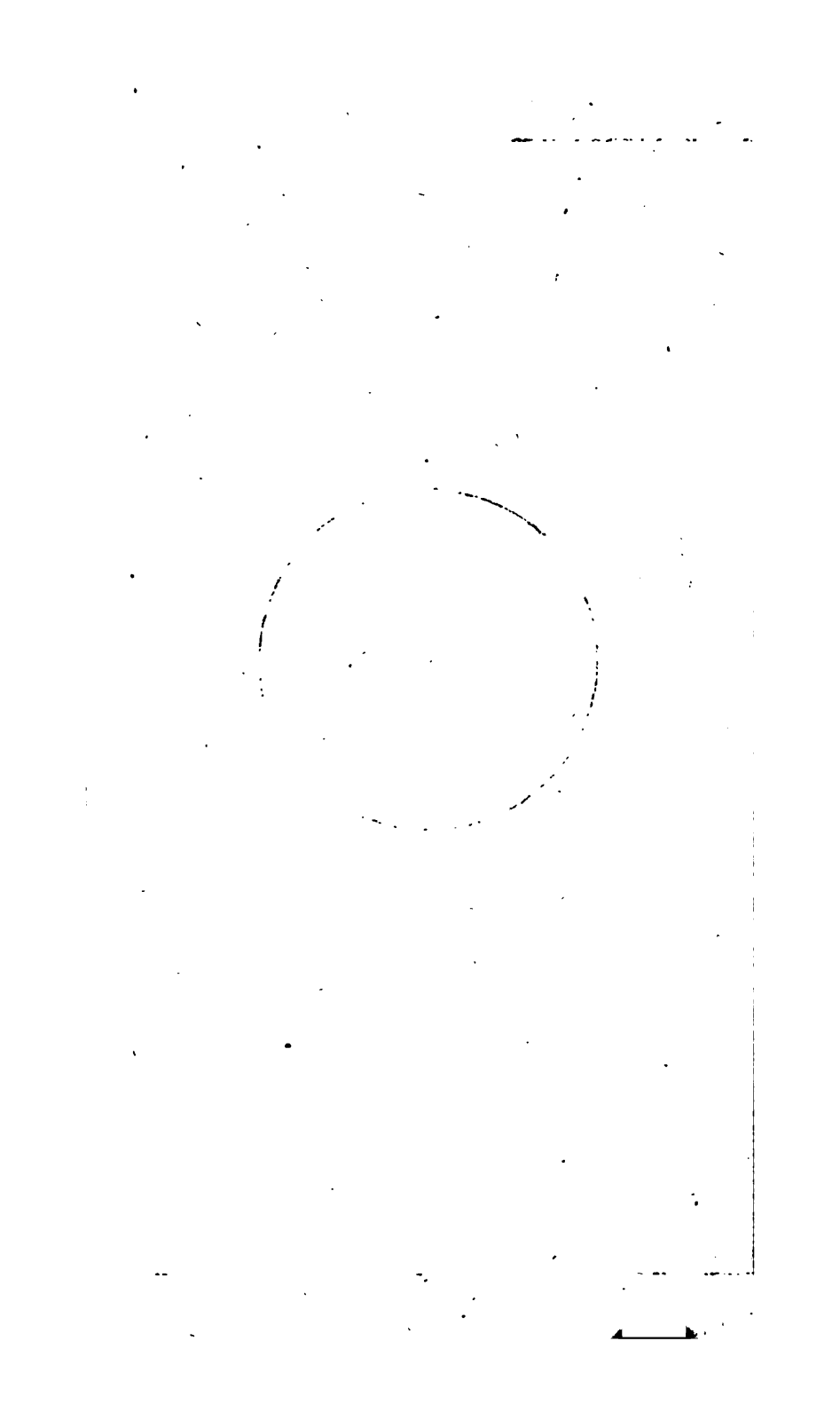


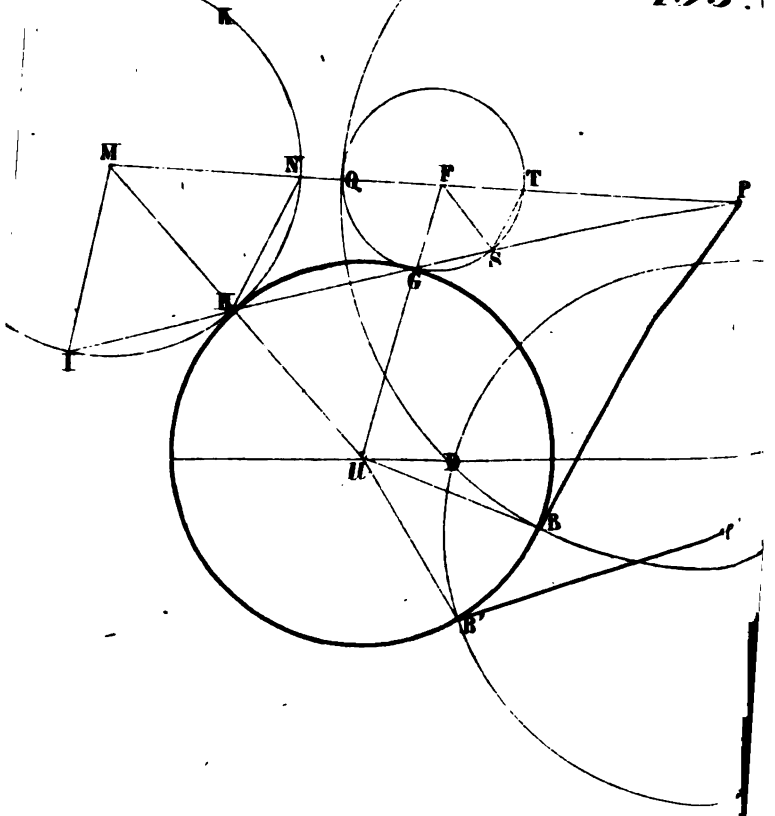

N
B''
D
F
M''
E
P
N'
K''
H'
P'
T
K'
M'
I
G
B'
T'

403.



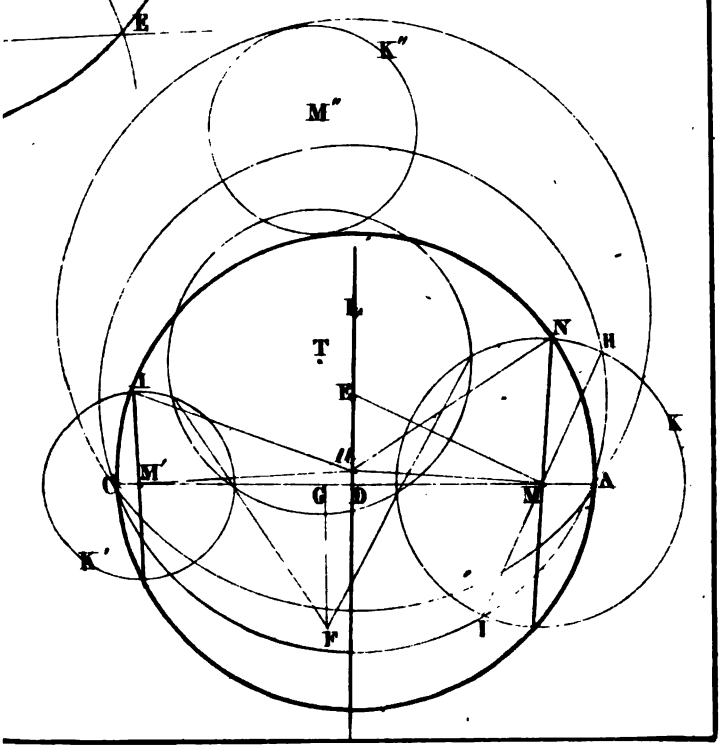




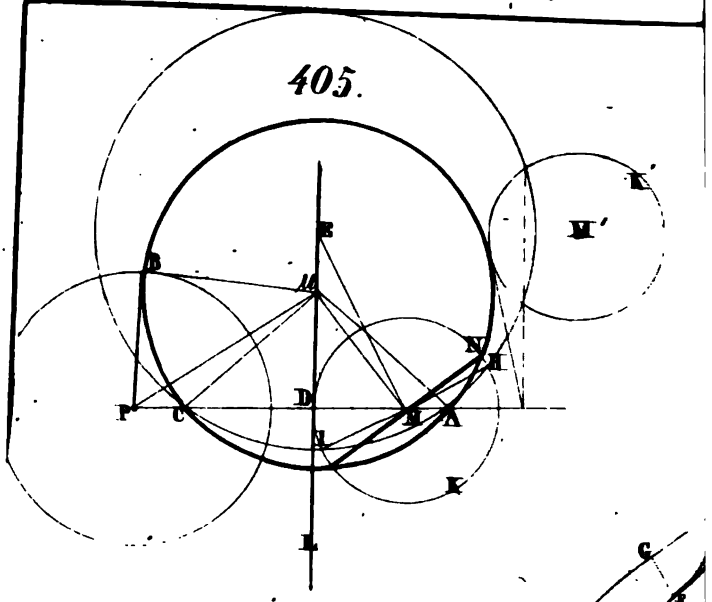

K
M
N
Q
F
T
P
S
G
H
I
U
B
B'

TAF. 45. Fig. 403. a. u. 404.

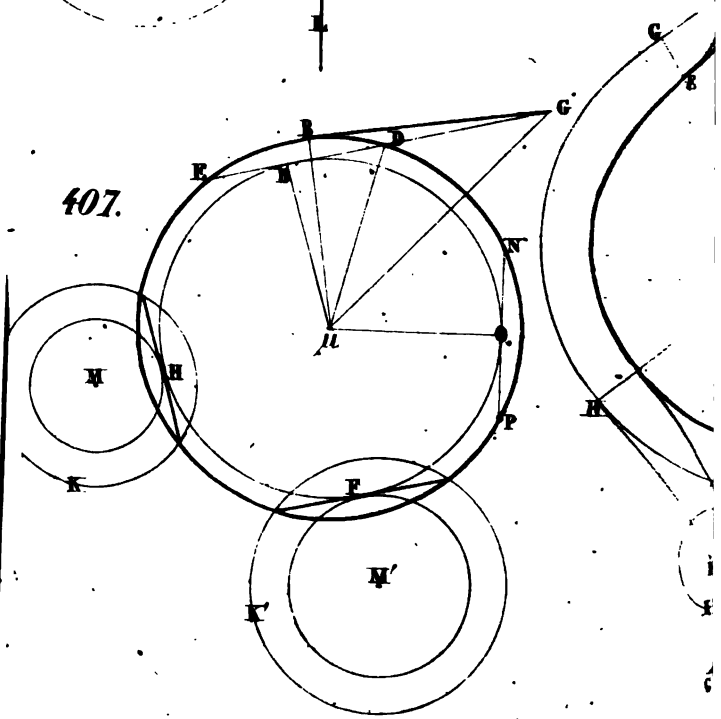
404.

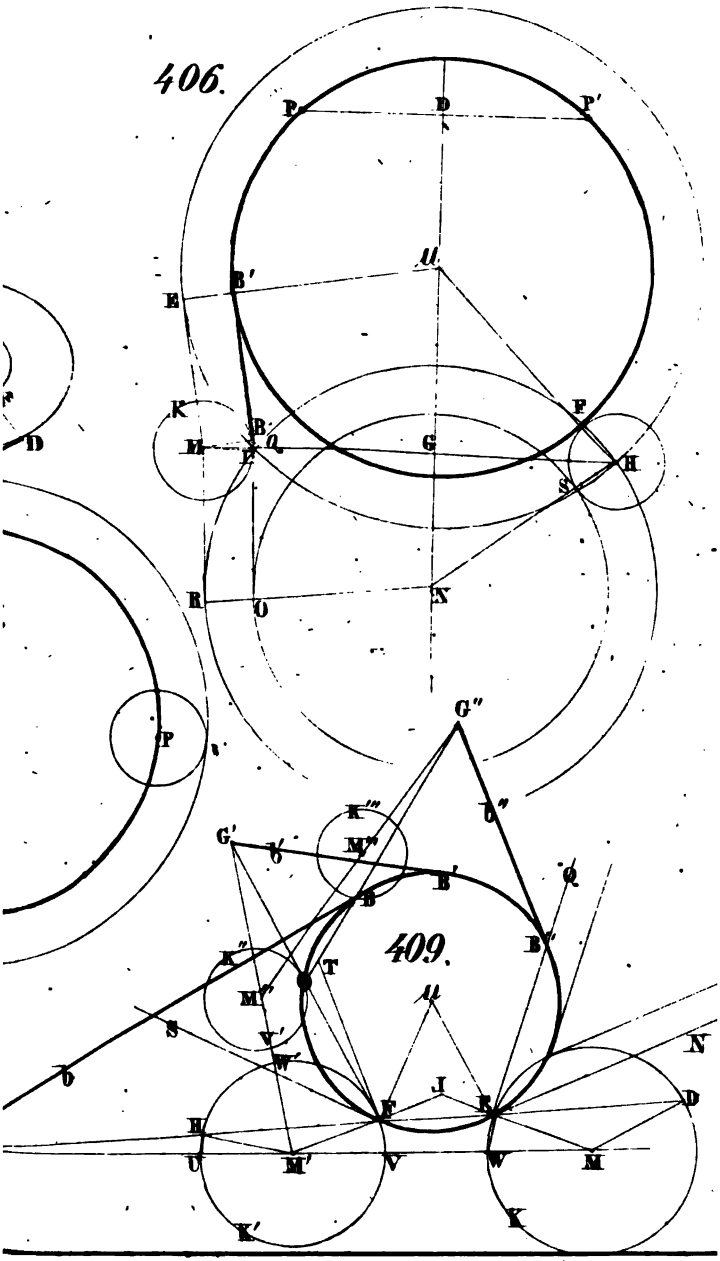


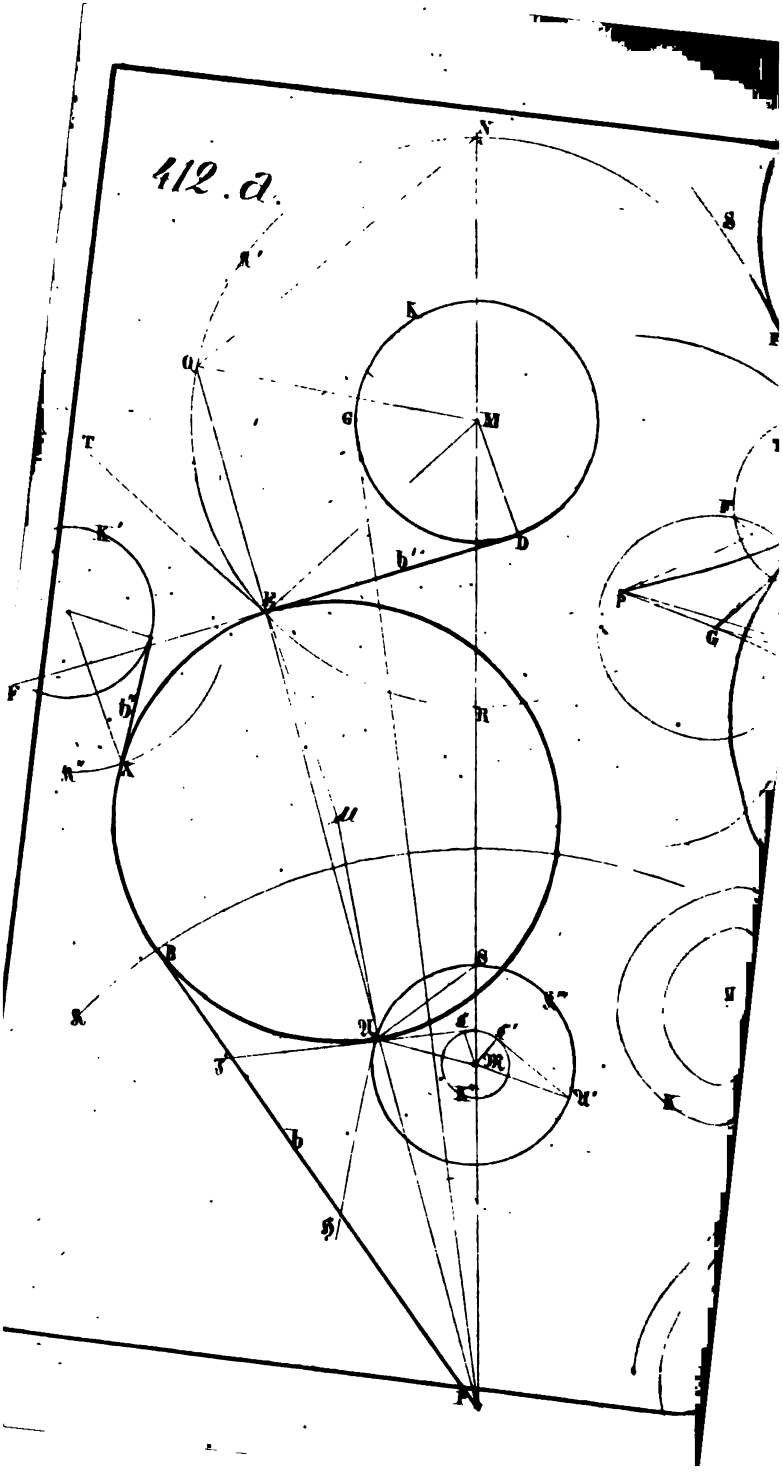
405.



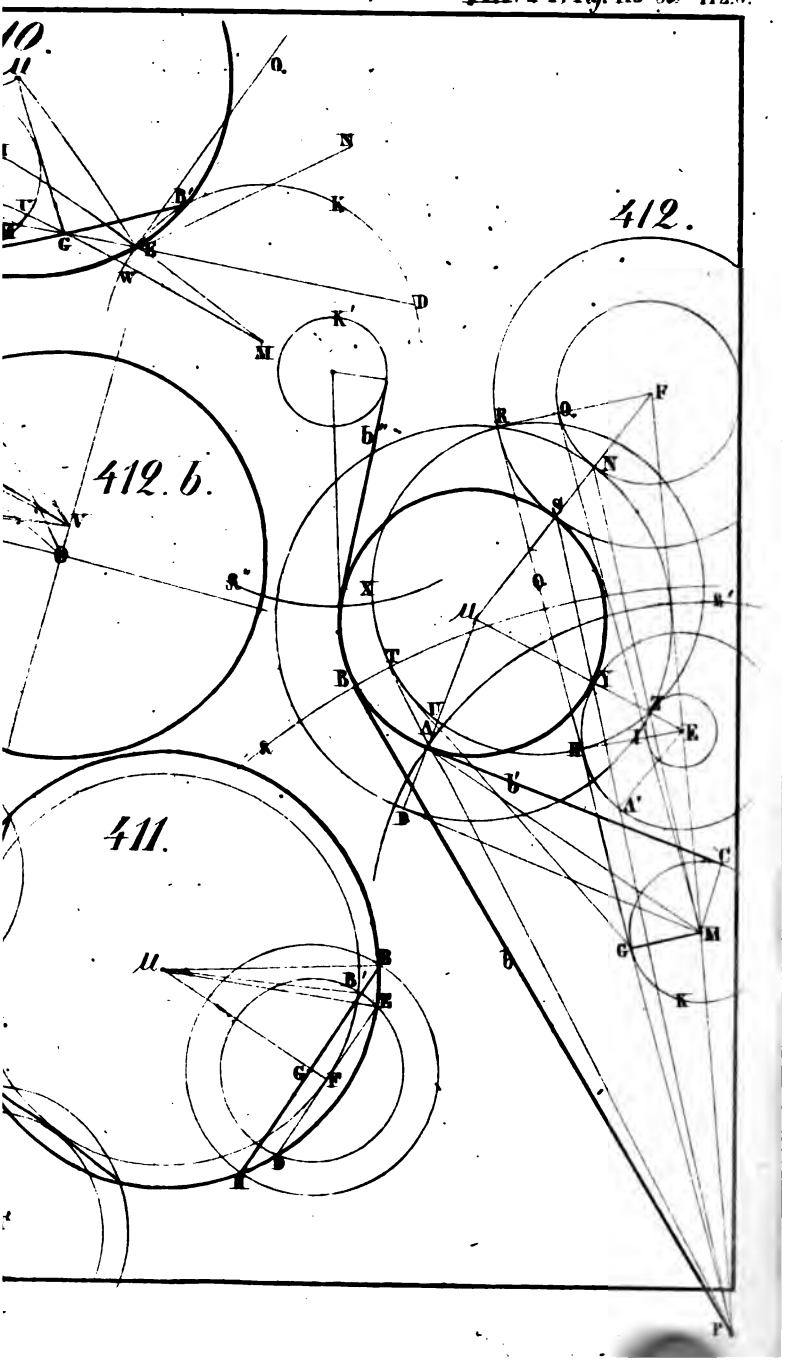
407.

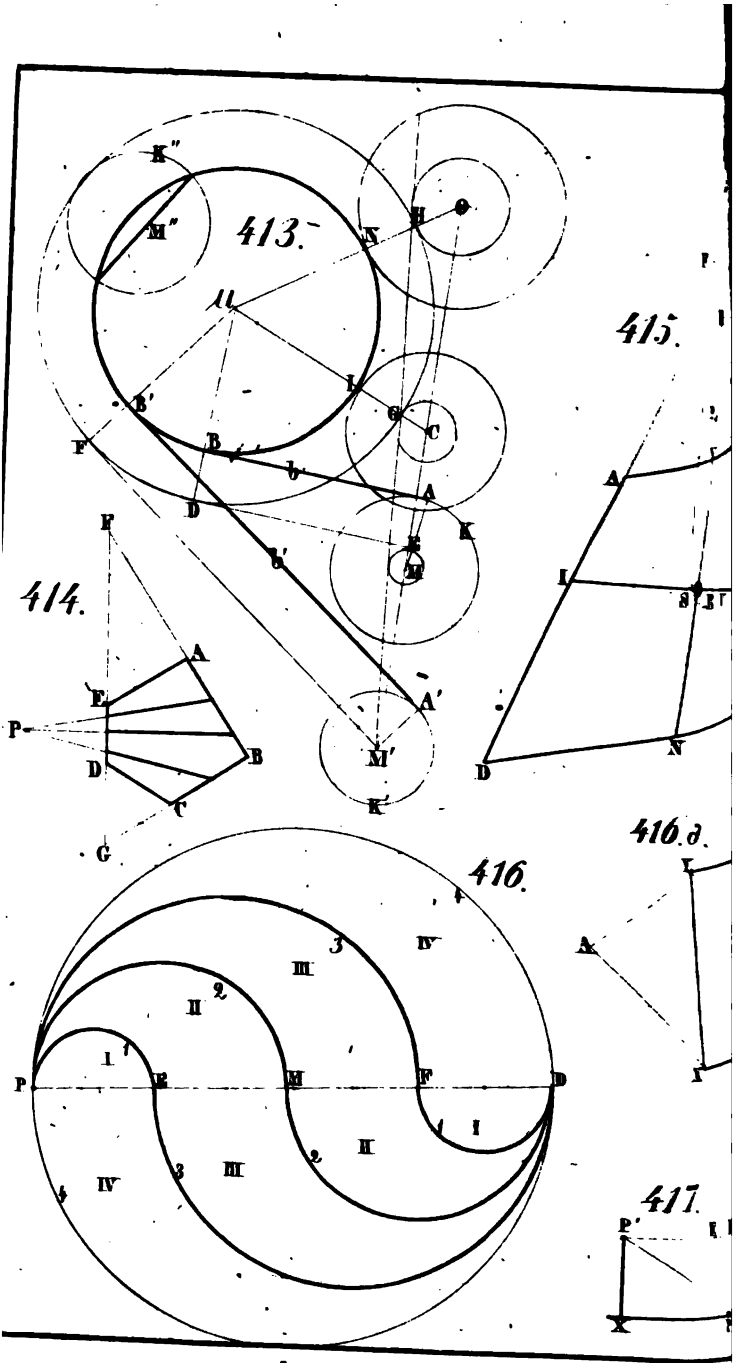


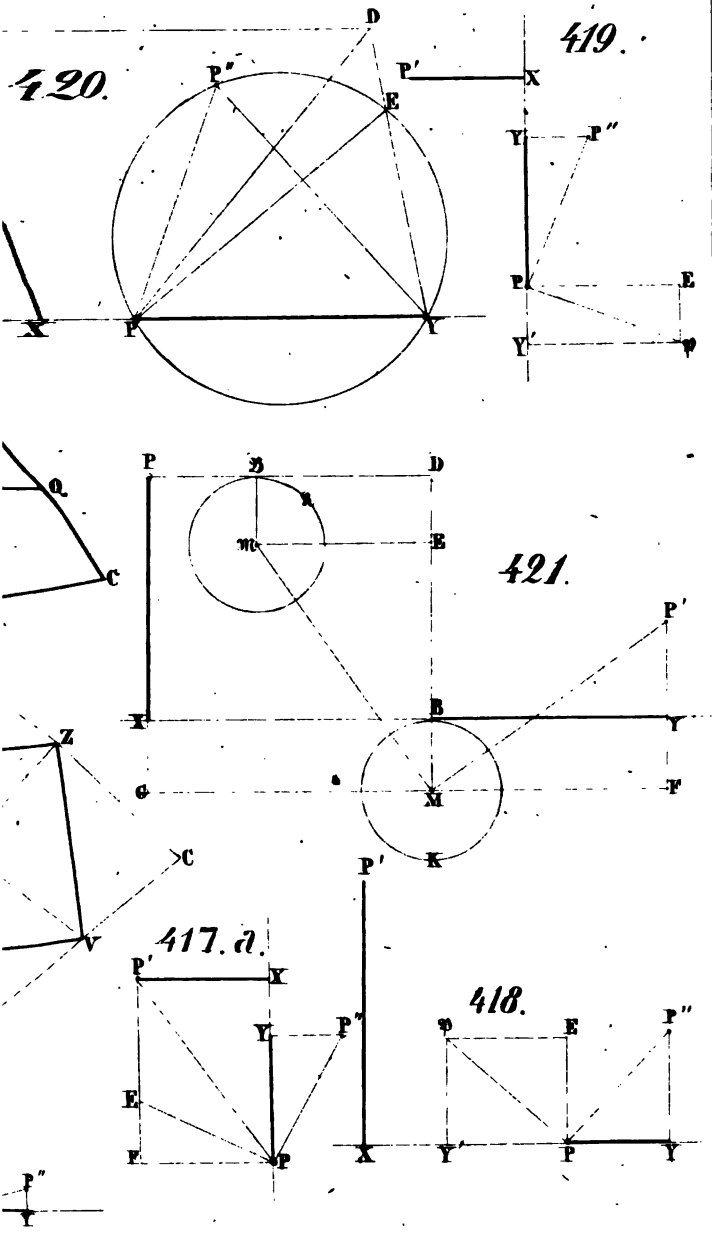

406.
P
D
P'
u
B'
E
K
B
M
Q
G
F
H
S
R
O
N
D
P
G''
K'''
b''
G'
b'
M''
B'
Q
B
B''
K''
T
M''
u
S
V'
W'
N
b
J
F
E
D
H
U
M'
V
W
M
K'
K
409.


412. a.

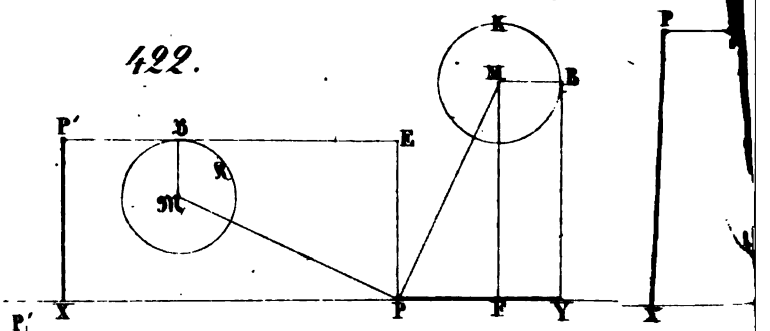
TAF. 47. *Fig.* 410 bis 412.b.



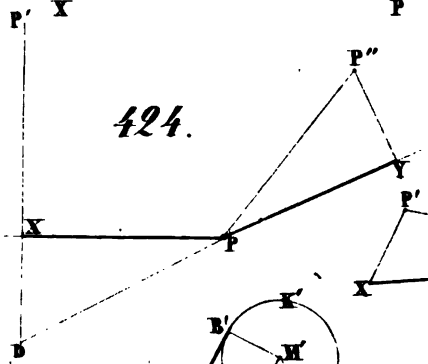

413.
414.
415.
416.
416.a.
417.


420.
419.
421.
417. a.
418.
D
P''
E
P'
X
Y
P''
P
E
Y'
P
X
Y
Q
C
P
D
E
m
X
B
Y
P'
G
M
F
K
Z
C
V
P'
X
Y
P''
E
F
P
P''
Y
X
Y'
P
Y

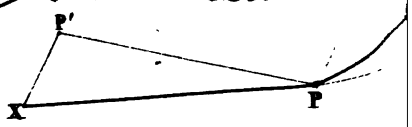
422.



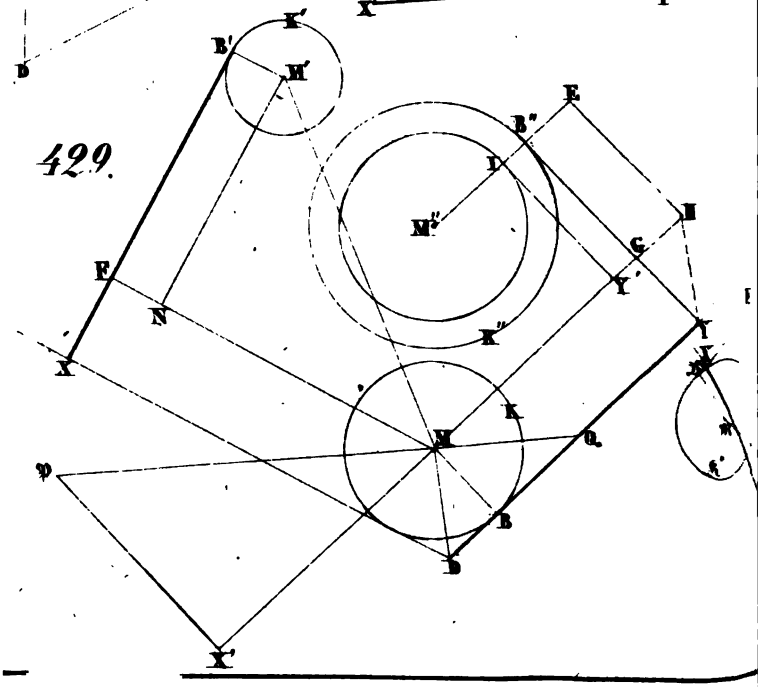
424.

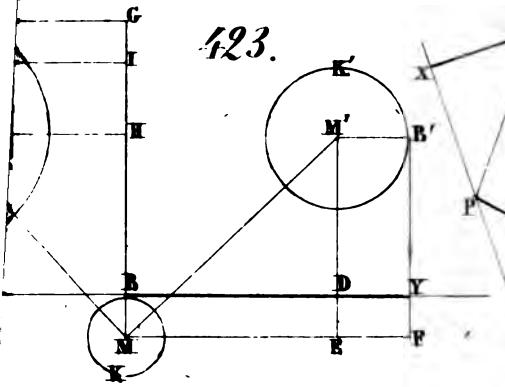


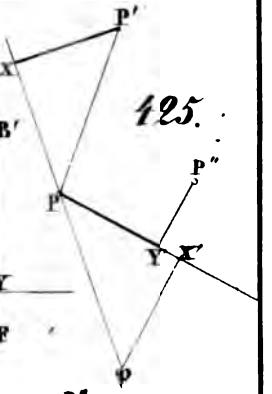
426.

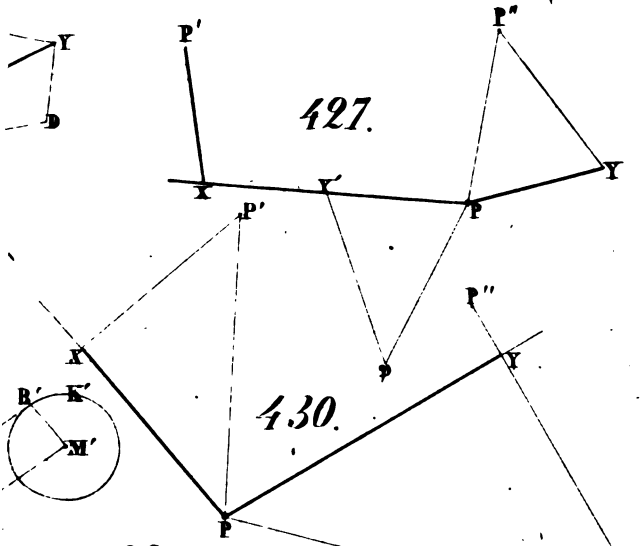


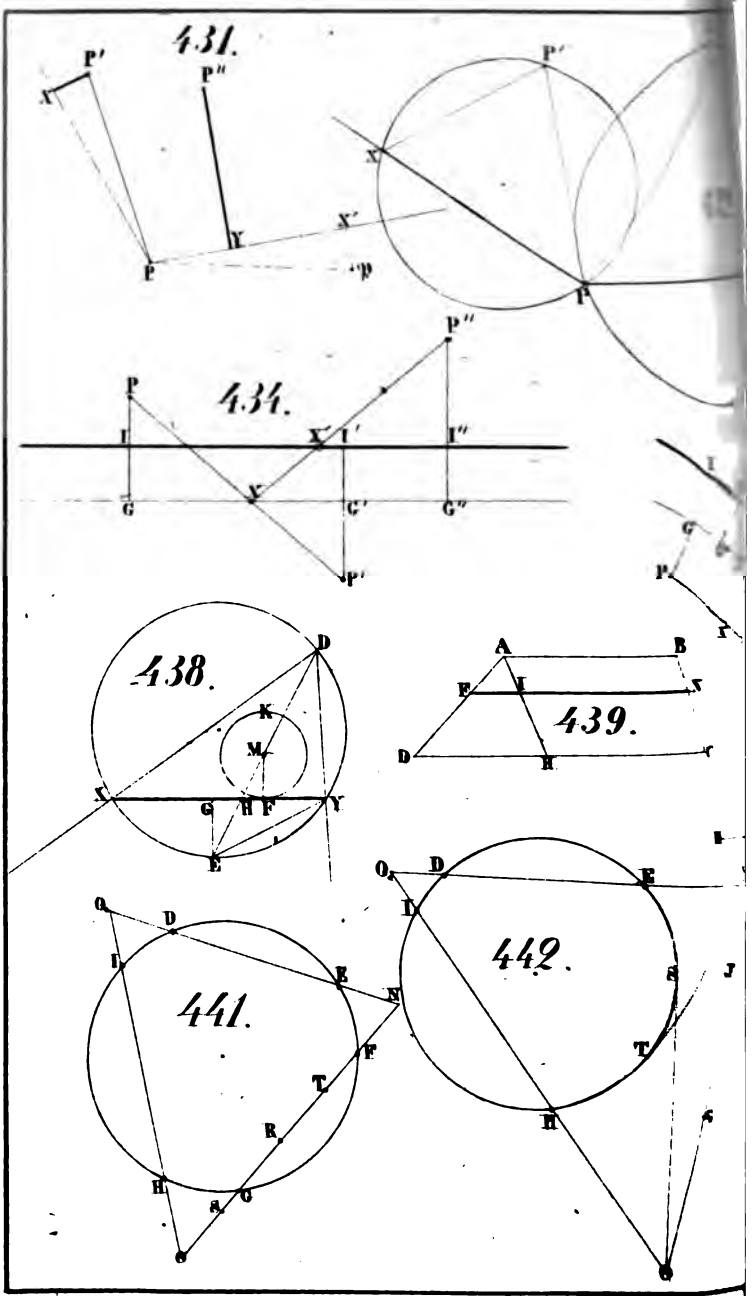
429.

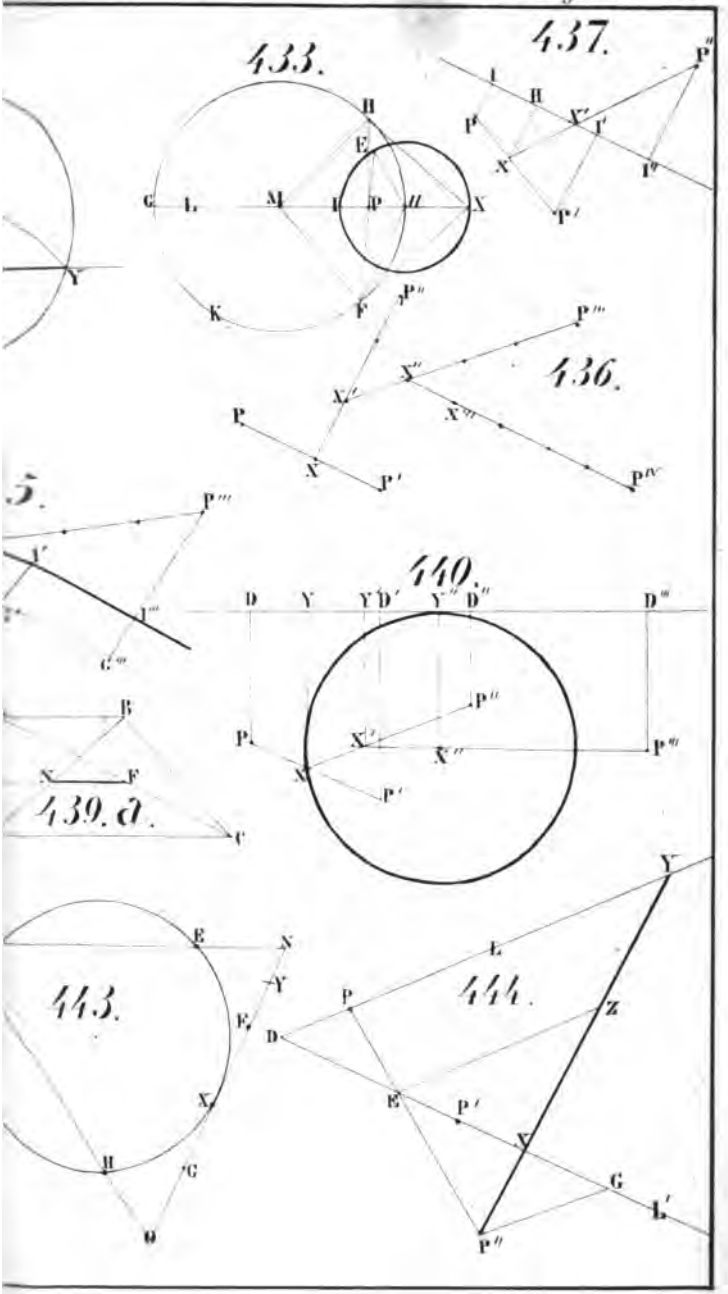


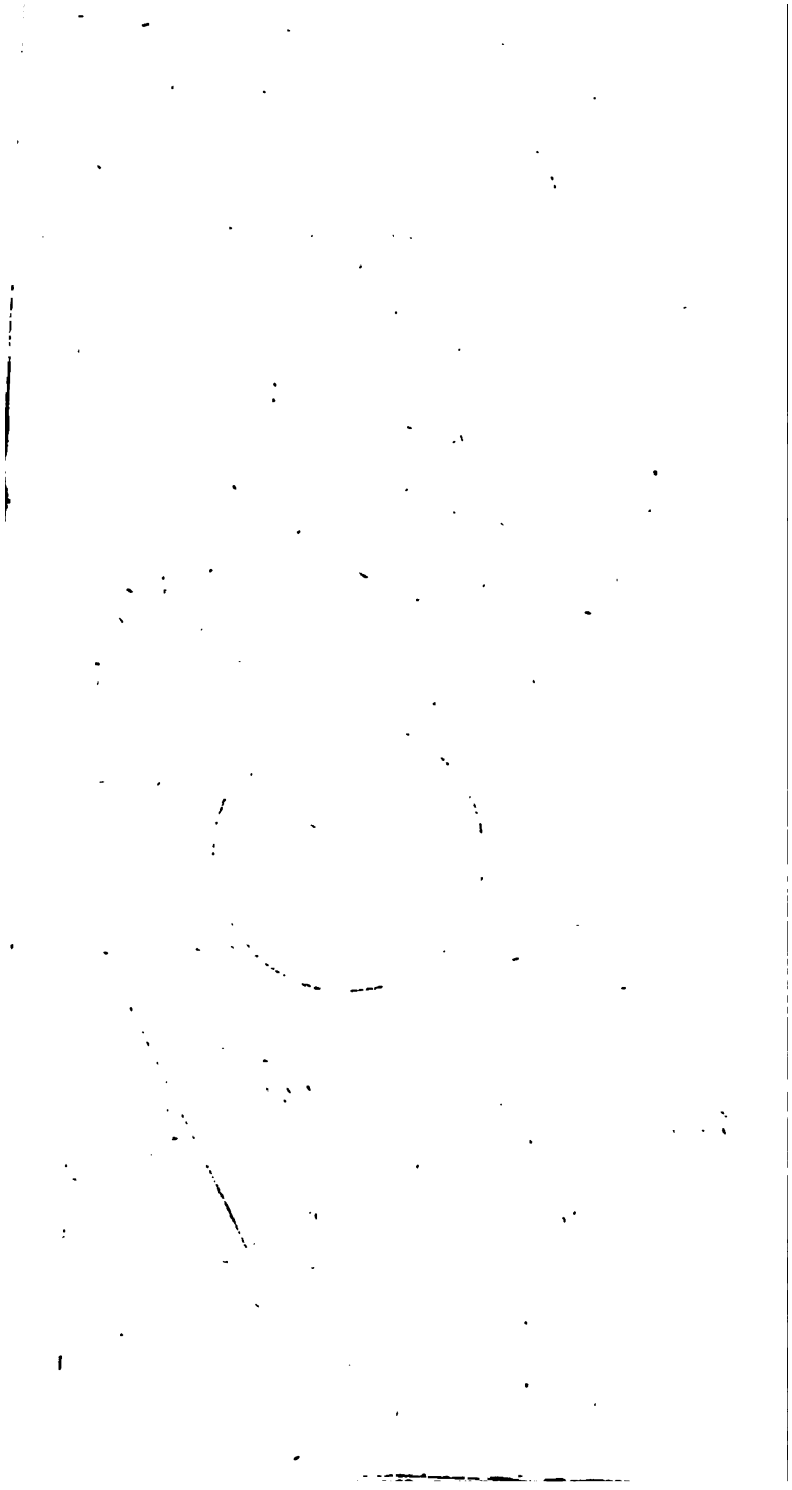

423.
G
I
H
K'
M'
B'
B
D
Y
M
E
F
K

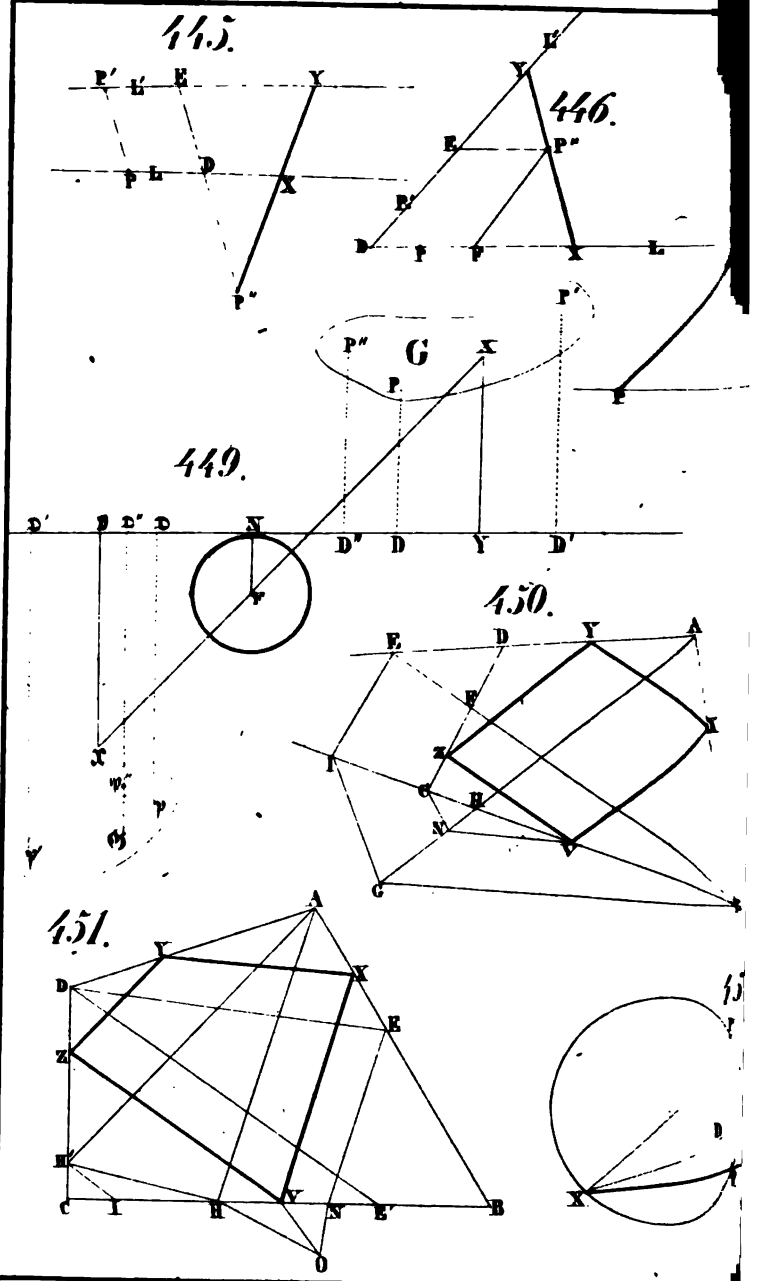

425.
P'
X
P
P''
Y'
X'
p

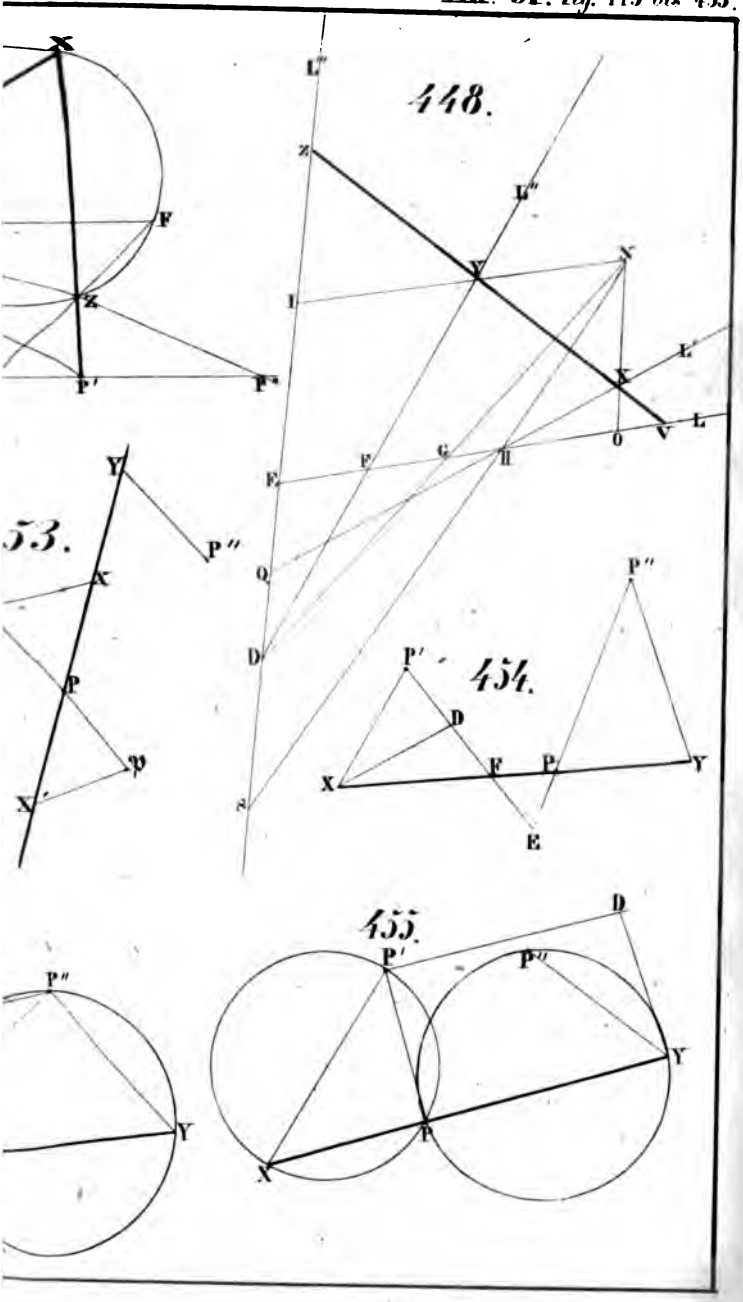

427.
Y
D
P'
P''
X
Y'
Y
P
p
430.
P'
P''
X
Y
R'
K'
M'
P
428.
K''
M''
B''
K
M
E
D
Y

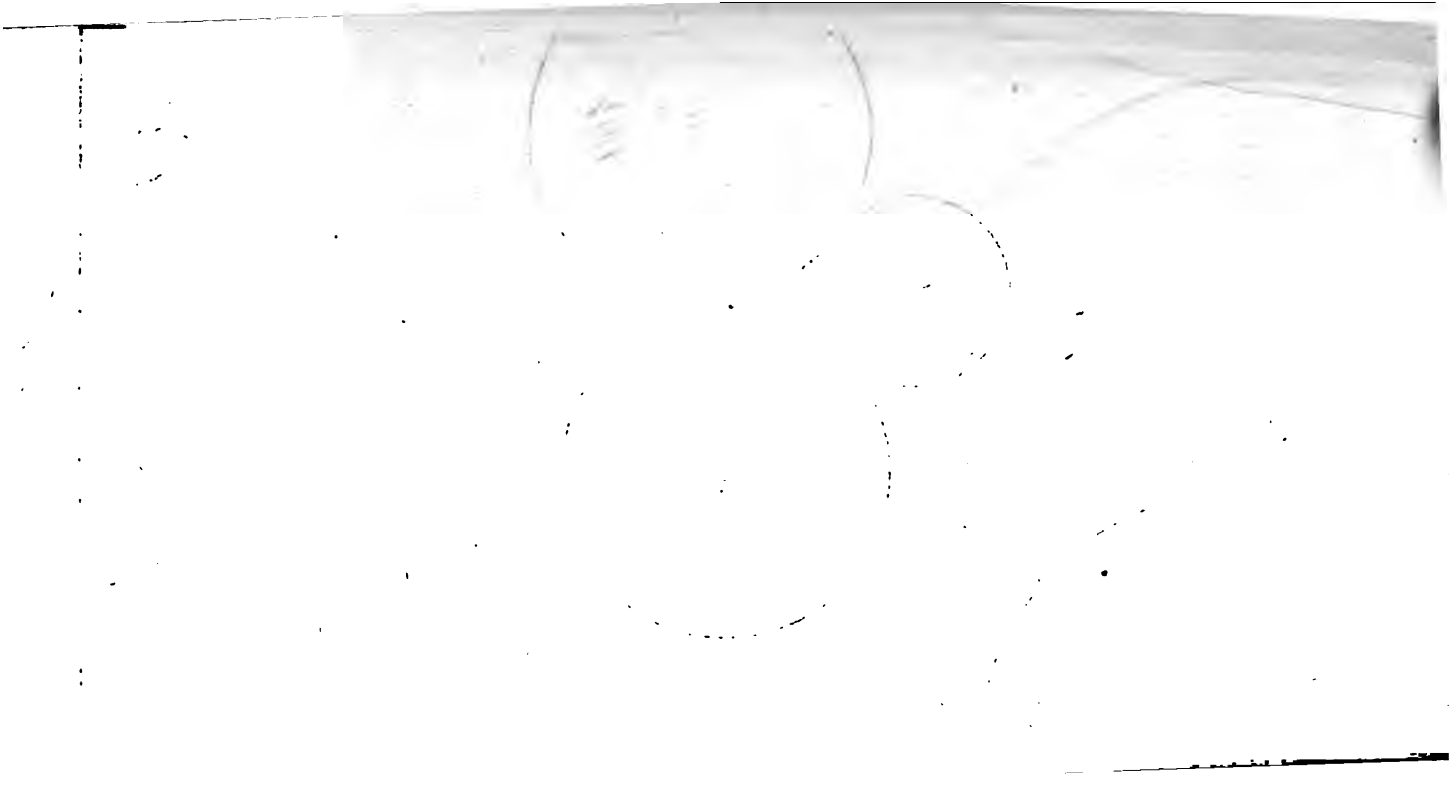

431.
P'
P''
X
Y
X'
P
P'
X
P
434.
P''
P
I
X''
I'
I''
G
Y
G'
G''
P'
438.
D
K
M
X
G
H
F
Y
E
439.
A
B
F
I
D
H
442.
O
D
E
I
S
T
H
441.
O
D
I
E
N
F
T
R
H
S
G

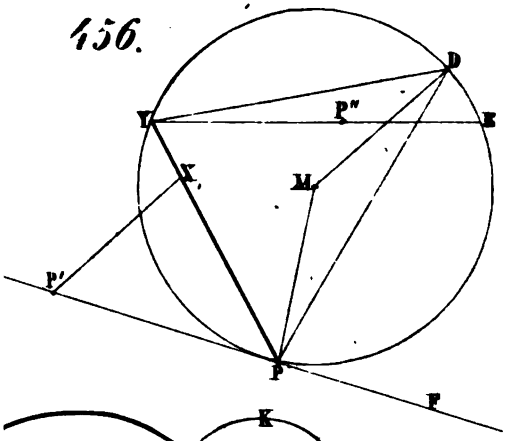

433.
437.
436.
440.
443.
444.
439. a.

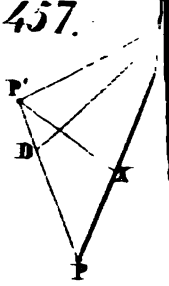


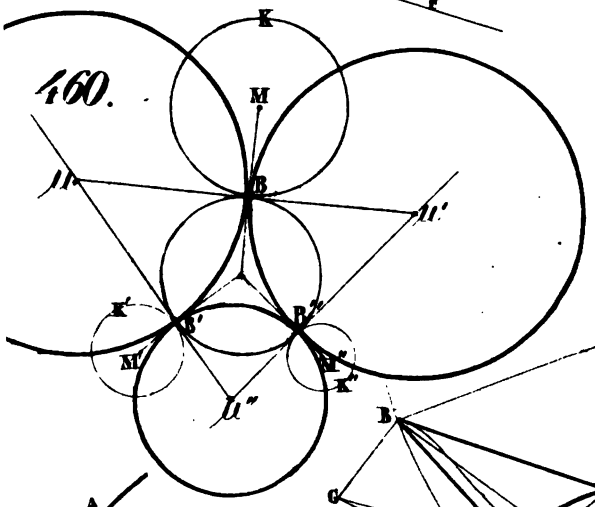

445.
446.
449.
450.
451.

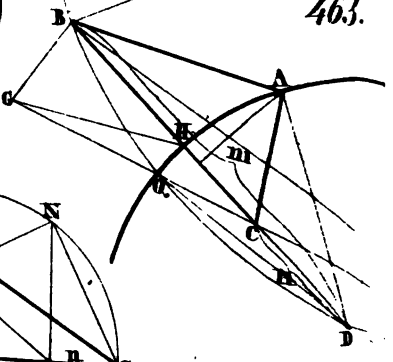

448.
453.
454.
455.

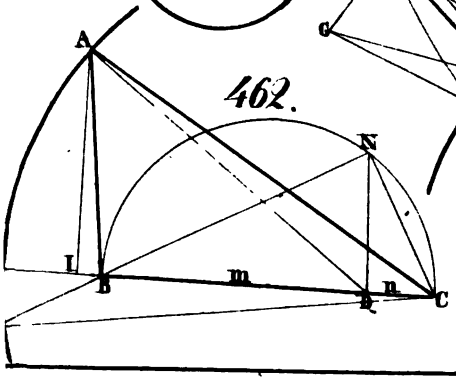


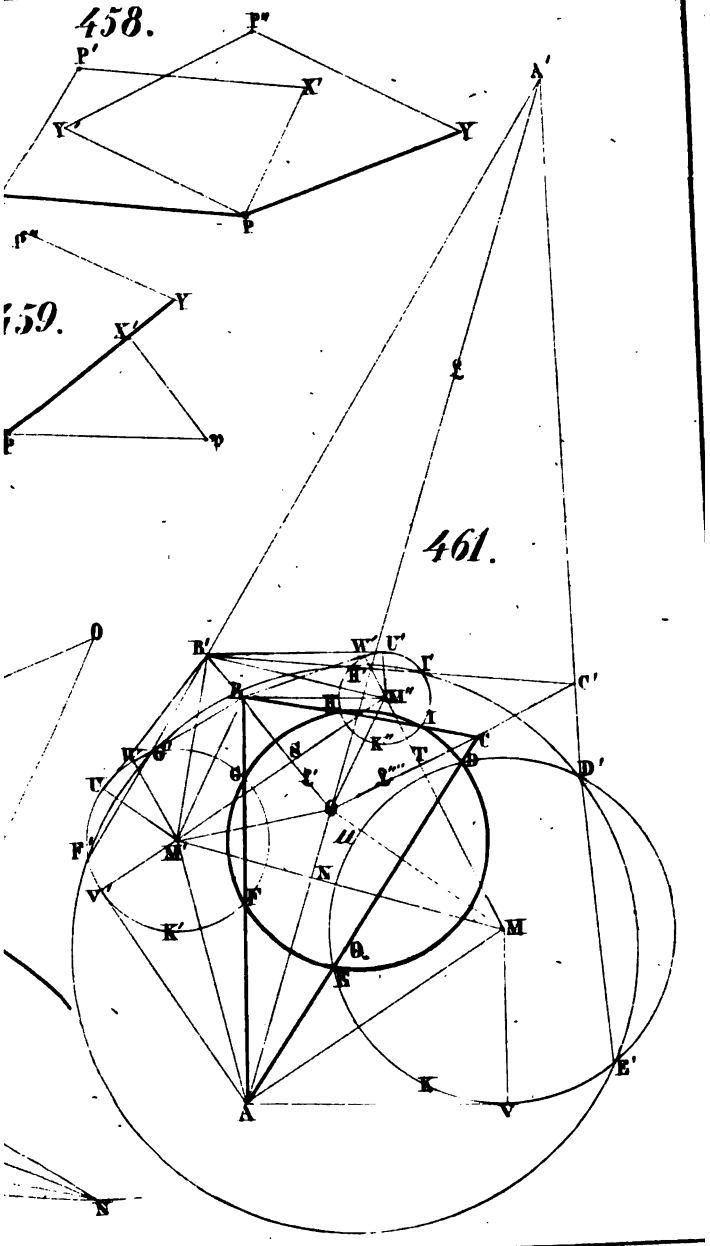

456.
D
P''
E
M
P'
P
F

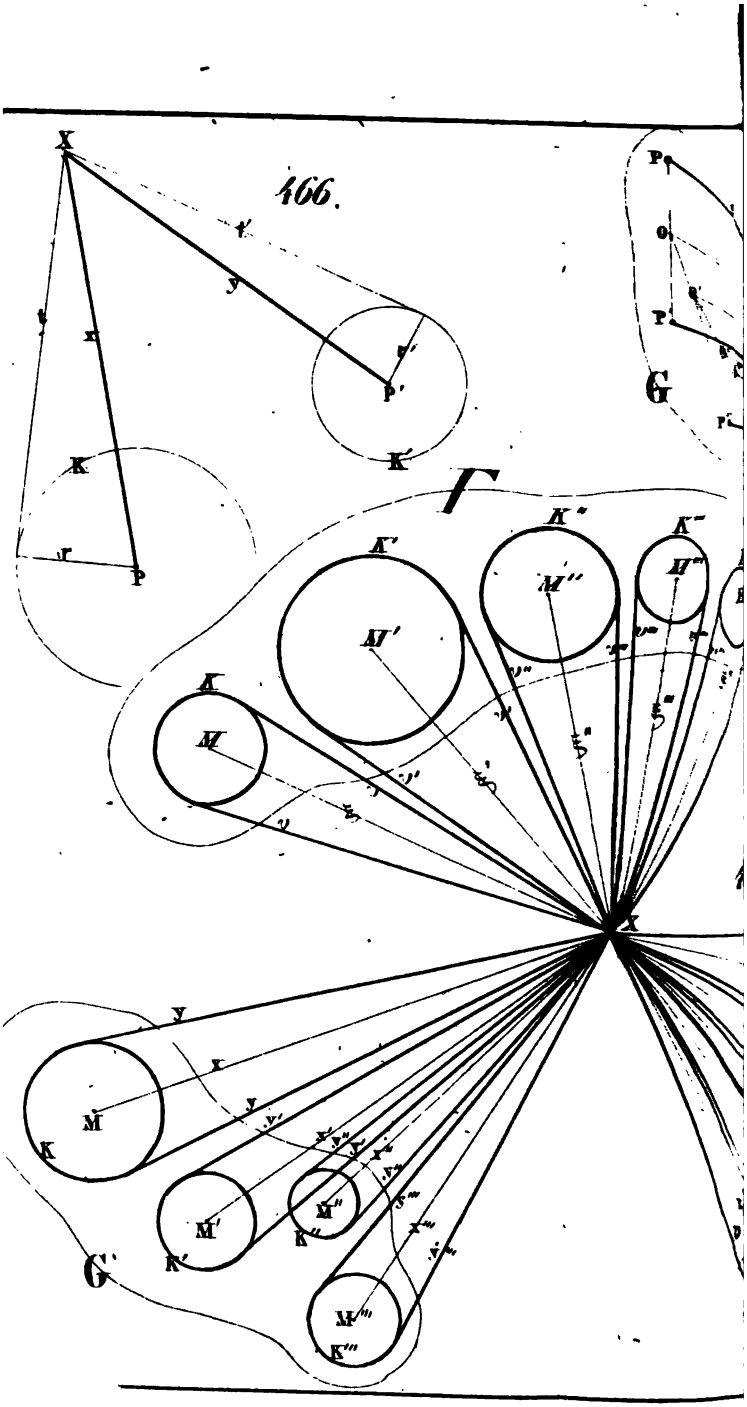

457.
P'
D
K
P

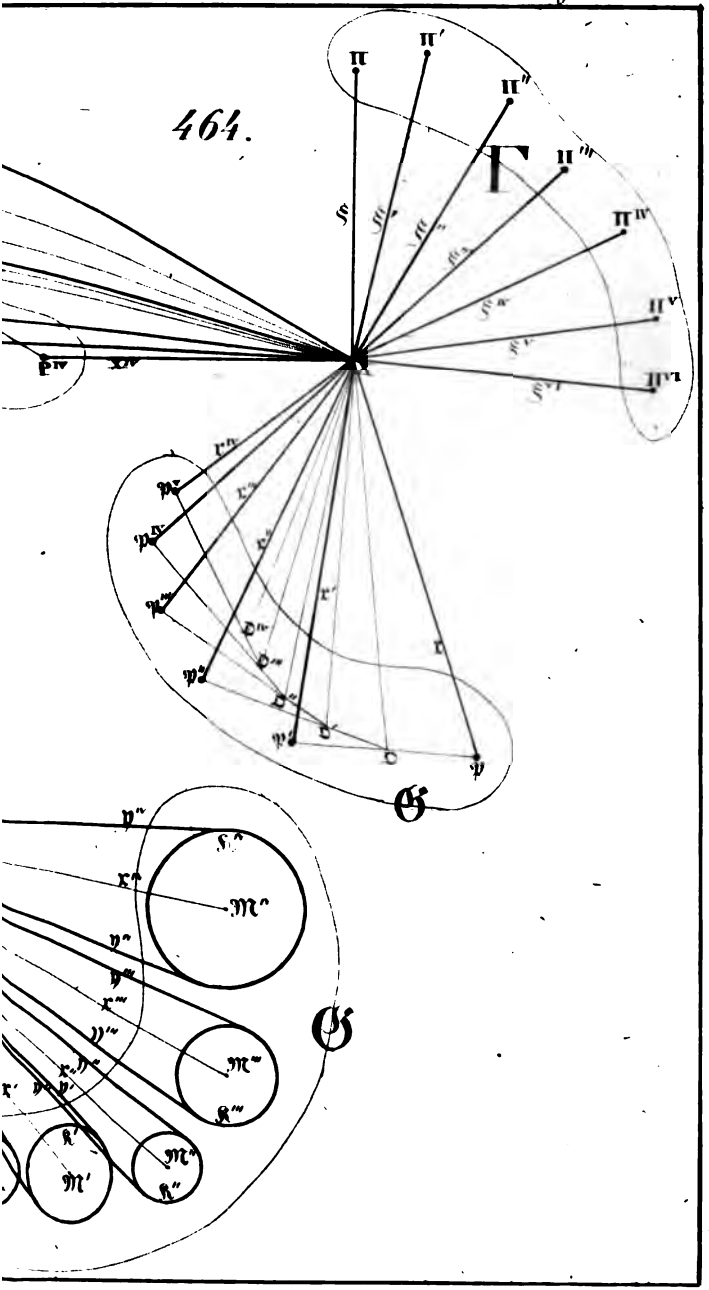
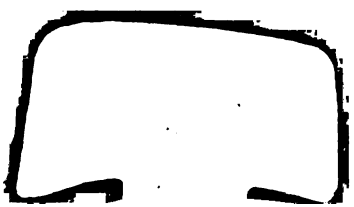

460.
K
M
B
K'
M'
K''
M''


463.
A
C
m
C
D


462.
A
N
l
B
m
n
C


458.
459.
461.


466.
X
P
K
P'
K'
G
Γ
K'
M'
K''
M''
K'''
M'''
K
M
X
y
x
M
K
M'
K'
M''
K''
M'''
K'''
G'


464.